Math. p. 363m -1

Math

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

R

SYSTEM

der

analytischen Geometrie.

Herausgegeben

von

Franz Xav. Moth

gewesenem Supplenten der höheren Mathematik an der Universität zu Prag.

Erster Band.

Mit drei lithographirten Tafeln.

Prag 1828.

Druck bei M. I. Landau, Altstadt, grosser Ring, Nro. 933.

15. D

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Seiner Excellenz

dem

Hochgebornen Herrn Herrn

CARL CHOTEK

Grafen von Chotkowa und Wognin,

Ritter des königl. sard. Skt. Mauritz- und Lazarus-Ordens, (S. C. E. K.) Sr. k. k. apostolischen Majestät wirklichem geheimen Rathe und Kämmerer, Oberstburggrafen zu Prag und Präsidenten des k. k. Landesguberniums und der k. k. Steuerregulirungs-Provinzial-Commission, Director des permanenten und verstärkten landständischen Ausschusses, Protector der patriotisch-öconomischen Gesellschaft, erstem Commissär des theresianischen k. Damenstiftes am prager Schlosse und perpetuirlichem Protector des frei-adelichen Reichstiftes in der k. Neustadt Prag, und wirklichem Mitgliede der k. k. Landwirthschaftsgesellschaft in Wien,

etc. etc.

In

tiefster Ehrfurcht

gewidmet

vom

Verfasser.

Vorrede.

Bei den grossen Fortschritten, welche die mathematischen Wissenschaften nach allen ihren Richtungen hin in den neuern Zeiten gemacht haben, konnte die analytische Geometrie um so weniger zurückbleiben, da sie auf der einen Seite mit der Analys in der innigsten Verbindung steht, auf der andern Seite aber bei der Bearbeitung der dynamischen, astronomischen und optischen Wissenschaften gänzlich unentbehrlich wird, ja sogar von einem solchen Einflusse auf diese letzt genannten Wissenschaften ist, dass dieselben durch sie in einer ganz neuen Gestalt hervorgetreten, und auf einen hohen Grad der Vollkommenheit gefördert worden sind. Jede Entdeckung also, die man nur immer in diesem Theile der Mathematik, welcher die analytische Geometrie genannt wird, gemacht hat und noch machen wird, und jede Erweiterung, welche ihr Gebieth erhält, kann daher auf die übrigen mit ihr in Verbindung stehen-

den Wissenschaften nicht anders als höchst vortheilhaft einwirken, und unsere Erkenntnisse in denselben bereichern.

Hätte ich auch dazu, dass die analytische Geometrie zu den übrigen Disziplinen der Mathematik in einer so wichtigen Beziehung steht, weiter nichts mehr zufügen, wodurch der Werth und die Wichtigkeit dieses neuen Zweiges der Mathematik noch augenscheinlicher dargethan werden könnte; so, glaube ich, würde diess allein schon ein hinreichender Grund seyn, um Jeden, der sich eine genaue und eine zusammenhängende Erkenntniss aller Theile der angewandten Mathematik nach ihrem neuesten Zustande verschaffen will, aufzufordern, sich von den Lehren der analytischen Geometrie nicht bloss eine nur oberflächliche Kenntniss zu verschaffen, sondern tiefer in sie zu dringen, und sich innigst mit ihr vertraut zu machen, wenn man nicht will, dass das tiefere Studium der Erscheinungen der Natur, welche der Gegenstand der Dynamik und Astronomie sind, ganz vergebens bleiben solle.

Aber so besitzt diese Wissenschaft noch andere besondere Vorzüge, welche theils mit ihrem Wesen, theils mit dem Studium derselben vereint sind.

Indem ich einem mathematischen Publikum mein System der analytischen Geometrie übergebe, halte ich es nicht für ganz überflüssig, auf einige dieser ihrer

Vorzüge in Kürze aufmerksam zu machen, wenn auch durch diese Anzeige nichts weiter bewirkt werden sollte, als eine blosse Aufmunterung zum Studium derselben; da Kenner dieser Wissenschaft mir einräumen werden, dass man erst einen beträchtlichen Theil ihres Gebiethes mit Umsicht müsse durchwandert seyn, um von diesen Vorzügen die innigste Uiberzeugung selbst zu erlangen.

Obgleich die analytische Geometrie in den neuern Zeiten erst entstanden, und durch die angesehensten Analysten, namentlich durch La Grange, La Place, Euler, und vorzüglich durch Monge weiter ausgebildet worden ist; so wurde in diesem Fache, durch die vereinten Bemühungen dieser Geometer, bereits schon so viel geleistet, und der Umfang dieses neuen Gebiethes der Mathematik schon so beträchtlich erweitert, dass sich mit den schönen Entdeckungen, womit jene Männer diese Wissenschaft bereicherten, wohl mehrere Bände anfüllen liessen. Dessen ungeachtet macht die analytische Geometrie noch kein geschlossenes Ganzes aus, zu dem noch wenig mehr hinzusetzen wäre; sondern ist viel mehr von der Art, dass ihr Umfang sich nach allen Seiten hin erweitern, und den künftigen Bearbeitern dieser Wissenschaft noch viel zu leisten übrig lässt.

Bei diesem so weiten Umfange und bei dieser so grossen Fruchtbarkeit der interessantesten Wahrheiten besitzt diese Wissenschaft noch den besondern Vorzug,

dass man diese Wahrheiten aus den einfachsten, zuweilen sich unter schönen symmetrischen Formen darstellenden Resultaten hervorgehen sieht, welche oft weit mehr enthalten, als man gesucht hat; und welche noch mehr durch die Beschaffenheit des Verfahrens an Interesse gewinnt, durch das man jene Resultate zum Vorschein brachte, indem sich dasselbe eben so sehr von Seite seiner Einfachheit und Gleichförmigkeit, als von Seite seiner Allgemeinheit empfiehlt. Diese Eigenschaften der in dieser mathematischen Disziplin zur Entwicklung ihrer Sätze angewandten Methoden sind aber für das Studium derselben von Bedeutung, indem durch sie vorzüglich das Gedächtniss des Anfängers unterstützt wird, der, wenn er einmal den Geist dieser Methoden gefasst, und den Besitz der dieser Wissenschaft eigenthümlichen Prinzipien und Grundsätze errungen hat, alle ihre Lehren ohne Schwierigkeiten nicht nur leicht auffassen, sondern mittelst den sich bereits erworbenen Kenntnissen in den Stand gesetzt sehen wird, auf diesem weiten Felde der Untersuchungen, das sich ihm hier nach und nach eröffnet, selbst neue Entdeckungen zu machen; und ich muss es, durch eigene Erfahrung belehrt, gestehen, dass es mir oft ein geistiges Vergnügen gewährte, durch das ich überrascht worden bin, wenn ich aus den durch die angestellten Untersuchungen gewonnenen Resultaten wichtige und interessante Wahrheiten hervorgehen sah. Ausserdem also, dass diese Art der Geistes - Beschäftigung das Denkvermögen übt, insbesondere aber das Combinations - Vermögen in

Anspruch nimmt, gewährt sie nebenbei für das Gemüth zugleich die angenehmste Erholung.

Der Verfasser hielt es nun für ein verdienstliches Unternehmen, die bisher gemachten wichtigern Entdeckungen und in einer grossen Anzahl von Werken und Abhandlungen zerstreuten Sätze zu sammeln, systematisch zu ordnen, unter Einem Gesichtspunkte darzustellen, und dieselben in Einem Werke zusammen zu fassen: — ein Unternehmen, dessen Ausführung mit nicht geringen Schwierigkeiten verknüpft ist, das aber, wenn es gelingt, Beifall und Aufnahme hoffen lässt.

Was nun in diesem Werke Neues von Bedeutung ist, wodurch die Wissenschaft selbst einen Zuwachs erhalten hat, werden Kenner selbst zu beurtheilen wissen.

Den Plan, nach welchem der Verfasser diese Wissenschaft bearbeitet hat, wird man aus der Inhalts-Anzeige des Werkes selbst ersehen.

Die beiden ersten Bände, welche hier der Verfasser liefert, sind der Geraden und der Ebene gewidmet.

Bei Bearbeitung dieses Gegenstandes war es nun das vorzüglichste Bestreben des Verfassers, Deutlichkeit und Bestimmtheit in seinem Vortrage mit der

möglichsten Vollständigkeit zu vereinen, dabei aber noch Vieles für die Selbstthätigkeit des Lesers übrig zu lassen.

Der Verfasser schliesst nun mit dem Wunsche, dass diese Bearbeitung der analytischen Geometrie allen Lesern den grössten Nutzen und das angenehmste Vergnügen gewähren möge!

Prag am 25. November 1827.

MOTH.

ERSTES CAPITEL.

Analytische Bestimmungsarten der Lagen eines Punktes.

Bestimmung der Lage eines Punktes in einer geraden Linie, in einer Ebene und im Raume. Von den Projectionen eines Punktes.

1. Wenn man den Abstand eines Punktes in einer geraden Linie von einem andern Punkte derselben Geraden, d. i. die Länge desjenigen Stückes der geraden Linie, welches zwischen diesen beiden Punkten enthalten ist, nebst der Seite kennt, auf welcher der eine Punkt rücksichtlich des andern liegt; so wird durch diese Länge der Ort des zweiten Punktes gegen den ersten gegeben.

Eine Reihe von Punkten, welche in einer und derselben Geraden liegen, wird also durch ihre Abstände oder Entfernungen von einem als unveränderlich und fixe angenommenem Punkte eben derselben Geraden bestimmt. Was

nun diese Bestimmungsart des Ortes eines Punktes in einer und derselben Geraden betrifft, hat man zu bemerken, dass durch die blosse Kenntniss der absoluten Grösse des Abstandes eines Punktes von einem andern derselben Geraden noch unbestimmt gelassen wird, auf welcher Seite des als fix angenommenen Punktes man die Länge des gegebenen Abstandes und folglich den auf diesen fixen bezogenen Punkt anzunehmen habe. Dieser Zweideutigkeit wegen haben wir noch eine einfache Art und Weise festzusetzen, wie die beiden Punkte, welche auf den entgegengesetzten Seiten des fixen Punktes der geraden Linie liegen, und denselben Abstand von ihm haben, von einander unterschieden, und jeder dieser Punkte insbesondere auf eine völlig bestimmte Art bezeichnet werde. Da beide Punkte auf direkt entgegengesetzten Seiten des fixen Punktes liegen; so biethet dieser Umstand von selbst ein einfaches Mittel dar, das zu ihrer Bestimmung sehr geschickt ist. Wenn wir nun übereinkommen, dass wir die Abstände auf der einen (z. B. auf der rechten) Seite des als fix angenommenen Punktes als positiv betrachten; so haben wir hiemit zugleich festgesetzt, dass die Abstände auf der andern Seite des fixen Punktes (d. i. zur Linken) als negativ anzusehen sind.

2. Betrachten wir itzt die Lage eines Punktes, der ausserhalb der im vorigen Art. betrachteten Geraden liege, und untersuchen wir eben so diejenigen Stücke, welche zur vollkommenen Bestimmung seiner Lage in der durch die Gerade und den gegebenen Punkt gelegten Ebene nothwendig sind. Man kann annehmen, dass die Gerade und der ausser ihr befindliche Punkt in der Ebene des Papiers sich befinde. Wenn nun die Linie XX' die in Rede stehende Gerade (Fig. 1.), und A der fixe Punkt in ihr ist; so stelle man sich durch diesen Punkt A eine in dieser Ebene auf XX' senkrecht stehende Gerade YY' gezogen vor. Ist m ein Punkt der Ebene XAY, und man fällt von ihm auf AX, AY die Perpendikel mx, my; so sieht man, dass in dieser Construktion die Lage der Punkte x und y in den Geraden XX' und YY' gegen den gemeinschaftlichen

Durchschnittspunkt A von der Lage des Punktes m in der Ebene XAY abhänge, indem durch die Aenderung seines Ortes in dieser Ebene entweder beide Längen mx und my zugleich, oder wenigstens eine von ihnen sich ändern. Umgekehrt wird also auch der Ort des Punktes m durch die Orte der zwei Punkte x und y auf den auf einander senkrechten Linien XX' und YY' bestimmt werden. Man wird daher die Lage des Punktes m durch die Längen Ax und Ay bestimmen können, indem man in der auf AX und AY gegebenen Punkten x, y Perpendikel xm, ym zu errichten braucht, die sich in einem einzigen Punkte m durchschneiden.

Da $mx = Ay$ und $my = Ax$, und da mx, my nichts anders sind, als die Abstände des Punktes m von den Linien XX', YY'; so kann man auch sagen, indem man diese Abstände für jene Längen substituirt, dass die Lage eines Punktes in der Ebene XAY (oder vielmehr in demjenigen Theile der Ebene, der zwischen AX und AY liegt) gegeben sey, wenn man seine Abstände mx, my von den Linien AX, AY kennt.

3. Wenn aber bloss die absoluten Abstände eines Punktes von den zwei Geraden XX' und YY' gegeben werden; so bleibt es dabei noch unbestimmt, ob diese Abstände ober- oder unterhalb der XX', und ob sie zur rechten oder zur linken Seite der YY' genommen werden sollen.

Nennt man nemlich y den Abstand des Punktes m von XX' (Fig. 2.) und x den Abstand desselben Punktes m von YY'; so ist es sichtbar, dass, wenn man sich auf beiden Seiten von XX' in dem Abstande y zu XX' parallel gezogene Linien vorstellt, in diesen beiden Linien alle Punkte liegen werden, welche von der geraden Linie XX' den Abstand y haben. Unter dieser unendlichen Menge von Punkten befindet sich nun auch der in Rede stehende Punkt m. Denkt man sich ferner auf den beiden Seiten von YY' in dem Abstande x zu YY' parallel gezogene Linien; so befinden sich in ihnen alle jene Punkte, welche den Abstand x von der Geraden YY' haben. Unter der unendlichen Menge von Punkten, die in diesen zwei geraden

Linien liegen, soll sich auch der in Rede stehende Punkt m befinden. Diese beiden Merkmale kommen aber nicht mehr einer unendlichen Menge von Punkten zu, sondern ihre Anzahl beschränkt sich auf die Zahl der Durchschnittspunkte je zweier Geraden des Systems der vier Linien. Denn bloss die Durchschnittspunkte jener beiden zu XX' parallelen Geraden mit den zu YY' parallelen werden beide Eigenschaften zugleich in sich vereinigen, d. i. von XX' den Abstand y und von YY' den Abstand x haben. Da durch diese Combinirung vier Durchschnittspunkte, als $m\ m'\ m''\ m'''$ möglich sind; so giebt es im Allgemeinen immer vier Punkte in einer Ebene, welche von den in derselben Ebene auf einander senkrecht stehenden Geraden XX' und YY' dieselben absoluten Abstände haben. Bei der blossen Kenntniss der absoluten Grösse der Abstände bleibt es daher noch immer unentschieden, welcher von den so bestimmten vier Punkten, die alle die verlangten Merkmale an sich haben, der gesuchte Punkt sey. Zu dieser nähern Bestimmung ist es auch nothwendig, anzugeben, auf welcher Seite von XX' und YY', oder, bestimmter zu sprechen, in welchem der vier Quadranten oder Winkel XAY, $X'AY$, XAY', $X'AY'$ dieser Punkt liegen solle. So wie im vorhergehenden Art. drückt man auch hier diesen Unterschied auf die Art aus, dass man die Abstände oberhalb der XX' und rechter Hand von YY' als positiv ansieht, während die Abstände unterhalb der XX' und linker von YY' als negativ betrachtet werden. Mit Zuziehung dieser letztern nähern Bestimmung der Lage der Abstände wird man itzt die Lage eines Punktes in der Ebene, in welcher XX' und YY' liegen, vollkommen bestimmt haben, und zugleich im Voraus entscheiden können, in welchem der vier Winkel XAY, $X'AY$, XAY', $X'AY'$ der gesuchte Punkt enthalten seyn werde. Da man die Abstände der Punkte von der Linie YY', wegen $my = Ax$, auf der XX' rechnen kann; so können wir endlich auch sagen, dass die Lage des Punktes m durch den Abstand mx dieses Punktes von der Geraden XX', und die Entfernung des Punktes x vom Punkte A; oder durch die

Längen der Geraden Ax, mx bestimmt werde. In diesem Falle heisst von diesen zwei Linien die eine Ax, welche auf der XX' gerechnet wird, die Abscisse und der Abstand mx die Ordinate des Punktes m; Abscisse und Ordinate eines Punktes m heissen zusammen die Coordinaten dieses Punktes. Die fixe und unveränderliche Gerade XX', worauf die Abscissen gerechnet werden, heisst die Abscissenlinie, und der fixe Punkt A in der Abscissenlinie heisst der Anfangspunkt der Coordinaten. Man pflegt dann die Abscisse des Punktes m, d. i. Ax mit x, und die Ordinate xm mit y zu bezeichnen, welche Bezeichnung der Coordinaten der Punkte auch in der Folge fast durchgängig beibehalten werden soll.

Wird die Lage des Punktes m gegen die zwei Linien XX' und YY', die sich in A unter rechten Winkeln schneiden, durch seine Abstände mx, my von ihnen bestimmt; dann heisst der eine Abstand my oder Ax die erste, und der andere Abstand mx oder Ay die zweite Ordinate des Punktes m; diese beiden Ordinaten bezeichnet man respektive auch mit x und y; die gerade Linie XX', worauf die Längen von x genommen werden, heisst die Achse der x, und die Gerade YY', worauf man die Längen y nimmt, wird die Achse der y genannt; und beide geraden Linien XX' und YY' heissen die coordinirten Achsen, oder auch, weil sie senkrecht auf einander stehen, ein System zweier rechtwinklichter coordinirter Achsen.

Beide Bestimmungsarten kommen offenbar auf eins hinaus; überhaupt also sind die Grössen x und y die beiden, die Lage eines Punktes m bestimmenden, Stücke.

4. Wir wollen nun diese Bestimmungsarten der Lage eines Punktes analytisch festsetzen.

Sind a und b die gegebenen absoluten Längen der Abstände eines Punktes von den Achsen der y und x; so dass

$$\left.\begin{array}{l} x = a \\ y = b \end{array}\right\};$$

so werden diese Gleichungen, wenn die Vorzeichen der Grössen a und b unbestimmt gelassen sind, zu jedem der vier Punkte m, m', m'', m''' gehören.

Behaftet man aber diese Grössen mit Vorzeichen; so zerfällt jenes System der Gleichungeu in vier besondere von einander verschiedene Systeme von Gleichungen; diese allein mögliche Systeme sind

I.	II.	III.	IV.
$x = + a$	$x = - a$	$x = + a$	$x = - a$
$y = + b$	$y = + b$	$y = - b$	$y = - b$

Jedes dieser vier Systeme von Gleichungen gehört nur für einen einzigen Punkt der Ebene, in welcher die Achsen XX' und YY' liegen, und welche wir die koordinirte Ebene xy nennen wollen; und einem jeden Systeme korrespondirt einer jener vier Punkte.

Der vorhergehenden Annahme zu Folge sind die Gleichungen (I) die Gleichungen des Punktes m; dessgleichen bestimmt das System (II) die Lage des Punktes m'; das System (III) die Lage des Punktes m''; und endlich das System (IV) die Lage des Punktes m'''.

Man sieht hieraus, wie diese vier Systeme auch vier wesentlich von einander verschiedene Punkte charakterisiren. Sie haben nur diess unter einander gemein, dass sie im Allgemeinen die Eckpunkte eines Rechteckes sind.

5. Wenn $a = o$ ist; so liegt der Punkt m in der Achse der y; ist nur $b = o$; so liegt er in der Achse der x. Daher wird das System der Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} x = o \\ y = +b \end{array}\right\} \text{ oder } \left.\begin{array}{l} x = o \\ y = -b \end{array}\right\}$$

für einen Punkt gehören, welcher in der Achse YY' liegt; so wie das System der Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} x = +a \\ y = o \end{array}\right\} \text{ oder } \left.\begin{array}{l} x = -a \\ y = o \end{array}\right\}$$

für ein Punkt gehören, welcher in der Achse YY' liegt.

Das System der Gleichungen $x = o$, $y = o$ gehört also

für einen Punkt, der in beiden Achsen zugleich liegt, d. i. für den Durchschnittspunkt der beiden Achsen. Diese Gleichungen charakterisiren demnach den Anfangspunkt der Coordinaten.

Aus diesem Wenigen wird schon die Einfachheit des Mittels, die Lage eines jeden Punktes in einer Ebene zu bestimmen, so wie der Zusammenhang sichtbar, der dadurch zwischen den beiden Wissenschaften, der Analysis und der Geometrie, bewirkt wird. Da sich diese letztere Wissenschaft nicht ausschliesslich mit Grössen zweier Dimensionen beschäftiget, sondern auch Grössen dreier Dimensionen zum Gegenstande ihrer Betrachtungen macht; so müssen wir, weil die vorige Bestimmungsweise der Lage eines Punktes in einer Ebene unzureichend ist, die Lage eines Punktes im Raume zu bestimmen, auf ein ähnliches Mittel bedacht seyn, dessen man sich in der Geometrie dreier Dimensionen bedienen könne, um den Ort eines Punktes im Raume auf eine unzweideutige Art anzugeben. Mit der Erklärung dieser Hilfsmittel beschäftigen sich die folgenden Artikel.

6. Betrachten wir also einen Punkt m, welcher ausserhalb der in den vorhergehenden Art. betrachteten Ebene der xy oder überhaupt im Raume liege, und suchen wir auf eben dieselbe Art, wie vorhin, die Bestimmungsstücke seiner Lage. In der Absicht stelle man sich (Fig. 3.), wenn XAY die fixe und unveränderliche Ebene ist (z. B. die Ebene des Papiers oder eine Horizontalebene), über oder unter welcher der gegebene Punkt des Raumes liegt, durch die Achsen XX' und YY' Ebenen gelegt vor (z. B. Vertikal-Ebenen), welche senkrecht auf der Ebene der xy stehen; und es seyen ZAX, ZAY diese zwei Ebenen; so dass ZA, als ihre gemeinschaftliche Durchschnittslinie, senkrecht auf der Ebene XAY oder überhaupt auf der Ebene xy stehet; (wenn die Ebene xy horizontal liegt, dann ist AZ eine Vertikallinie).

Diese Gerade AZ steht folglich auch senkrecht sowohl auf AX als AY; und weil auch AX auf AY senkrecht steht; so bilden die drei Linien AX, AY, AZ, welche den Punkt A

mit einander gemein haben, ein System dreier gegenseitig auf einander senkrecht stehender Geraden. Die drei Ebenen XAY, XAZ, YAZ, in welchen immer zwei jener Geraden liegen, schliessen bei A einen körperlichen Winkel ein. Wenn man sich jede dieser drei Geraden über A hinaus unbestimmt verlängert denkt, so bilden sich um A noch sieben andere körperliche Winkel, und der Raum und alle Punkte des Raumes werden durch diese drei gegenseitig auf einander senkrecht stehende Ebenen in acht Theile vertheilt. Wir wollen annehmen, der Punkt m liege in demjenigen Theile des Raumes, den die Ebenen XAY, XAZ, YAZ, einerseits begrenzen, oder in demjenigen körperlichen Winkel, den AX, AY, AZ in A bilden, und den wir mit (XYZ) bezeichnen wollen.

Stellen wir uns nun, nach diesen Voraussetzungen, vor, dass von diesem Punkte m auf diese drei Ebenen Perpendikel herabgelassen werden, und seyen xyz die Punkte, in denen diese Ebenen von ihnen respektive getroffen werden; so sieht man sehr leicht ein, dass, wenn der Punkt m seinen Ort im Raume ändert, sich zugleich die Orte der Punkte xyz in den unveränderlichen Ebenen XAY, XAZ, YAZ ändern werden, oder wenigstens der Ort eines dieser Punkte eine Änderung erfahren werde. So wie nun die Orte jener drei Punkte xyz in den Ebenen von dem Orte des Punktes m im Raume abhängen; so wird auch umgekehrt der Ort des Punktes m im Raume von den Orten der Punkte xyz in jenen drei Ebenen zugleich dergestalt abhängig seyn, dass durch diese letztern der Ort des Punktes m völlig bestimmt werde.

So wie wir die Lage eines Punktes in einer Ebene von den Lagen zweier Punkte in geraden Linien, die auf einander senkrecht stehen, abhängen liessen; eben so lassen wir hier die Lage des Punktes im Raume von den Lagen dreier Punkte in Ebenen abhängig seyn, welche auf einander senkrecht stehen; und folglich würde die Lage des Punktes im Raume von den Lagen von sechs Punkten in geraden Linien abhängig gemacht werden, welche Anzahl aber durch

einen leicht begreiflichen Umstand auf **d r e i** reduzirt wird.

7. Um einzusehen, wie der Ort des Punktes m durch die Abstände mx, my, mz, welche wir kurz mit xyz bezeichnen wollen, bestimmt werde; denken wir uns durch den Punkt m Ebenen gelegt, welche zu den Ebenen XAY, XAZ, YAZ, die wir die Ebenen (xy), (xz), (yz) nennen werden, parallel sind. Es sey nun $x\zeta$ die Durchschnittslinie dieser Ebene $xmy\zeta$, welche in einem Abstande z zur Ebene (xy) parallel läuft, mit der Ebene (yz); so wie ζy die Durchschnittslinie derselben Ebene $xmy\zeta$ mit der Ebene (xz).

Es ist leicht einzusehen, dass diese Ebene, welche durch m, in einem Abstande z von der Ebene (xy) dieser parallel gelegt wird, durch die Punkte x und y gehen müsse, weil sie auch durch die Perpendikel mx und my, die zur Ebene (xy) parallel sind, gehen muss. Diese Ebene $xmy\zeta$, welche die AZ im Punkte ζ schneidet, enthält alle Punkte, welche von der Ebene (xy) den Abstand z haben; folglich alle Punkte, welche **e i n e** Eigenschaft mit dem Punkte m gemein haben. Denkt man sich ferner durch den Punkt m eine Ebene gelegt, die zur Ebene (xz) parallel ist; so ist es leicht einzusehen, dass diese Ebene durch die Punkte x und z gehen müsse, weil sie auch durch die Perpendikel mx, mz geht, welche auf den Ebenen (yz) und (xy) senkrecht stehen; ist η der Durchschnittspunkt dieser Ebene mit der AY; so dass ηx und ηz die Durchschnittslinien dieser Ebene mit den Ebenen (yz) und (xy) sind; so werden alle Punkte der Ebene $xmz\eta$ von der Ebene (xz) den Abstand y, oder eine der Eigenschaften des Punktes m haben. Die Linie mx ist die Durchschnittslinie der so eben betrachteten zwei Ebenen $xmy\zeta$ und $xmz\eta$. Alle Punkte dieser geraden Linie haben **z w e i** Eigenschaften mit dem Punkte m gemein, indem sie von der Ebene (xy) den Abstand z und von der Ebene (xz) den Abstand y haben.

Denkt man sich endlich durch den Punkt m noch eine dritte Ebene gelegt, welche zur Ebene (yz) parallel ist; so ist

es leicht einzusehen, dass diese Ebene durch die Punkte y und z gehen müsse, weil sie auch durch die Perpendikel my und mz geht, welche auf den Ebenen xy und xz senkrecht stehen, oder zur Ebene (yz) parallel sind; ist ξ der Durchschnittspunkt dieser Ebene mit der AX; so dass ξy und ξz die Durchschnittslinien dieser Ebene mit den Ebenen (xy) und (xz) sind; so werden alle Punkte der Ebene $ymz\xi$ von der Ebene (yz) denselben Abstand x oder eine der Eigenschaften des Punktes m haben. Die Linie my ist die Durchschnittslinie der zwei Ebenen $xmy\zeta$ und $ymz\xi$; so wie mz die Durchschnittslinie der zwei Ebenen $xmz\eta$ und $ymz\xi$. Alle Punkte der Linie my haben mit dem Punkte m die zwei Eigenschaften gemein, dass sie von der Ebene (xy) den Abstand z und von der Ebene (yz) den Abstand x haben; und alle Punkte der Linie mz haben mit dem Punkte m gleichfalls zwei Eigenschaften gemein; sie stehen von der Ebene (xz) um y und von der Ebene (yz) um x ab.

Da nun alle Punkte der Geraden mz von der Ebene (xy) den Abstand z, von der Ebene (xz) aber den Abstand y haben; da ferner alle Punkte der Ebene $ymz\xi$ von der Ebene (yz) den Abstand x haben; so gibt es in dem körperlichen Winkel (XYZ) nur einen einzigen Punkt, welcher diese drei Eigenschaften in sich zugleich vereinigt, und er ist der Durchschnittspunkt jener Geraden mx mit dieser Ebene $ymz\xi$ d. i. der Punkt m. Ausser diesem Punkte gibt es also in diesem körperlichen Winkel (XYZ) keinen mehr, der von den Ebenen (xy), (xz), (yz) die Abstände z y x hätte. Wir folgern hieraus, dass durch diese drei Abstände xyz eines Punktes m von den drei auf einander senkrechten Ebenen XAY, XAZ, YAZ, seine Lage im Raume vollkommen bestimmt sey.

Gelegenheitlich merken wir an, dass die drei geraden Linien AX, AY, AZ in den Punkten $\xi\eta z$ senkrecht auf den Ebenen stehen, welche man durch den Punkt m, parallel zu den Ebenen (yz), (xz), (xy) legt, und dass man habe:

$$mx = z\eta = y\zeta = A\xi ;$$
$$my = x\zeta = z\xi = A\eta ;$$
$$mz = y\xi = x\eta = A\zeta .$$

Hieraus lässt sich folgern, dass man die Abstände aller Punkte einer Ebene, die einer der Ebenen (xy), (xz), (yz) parallel ist, auf die darauf senkrechten Geraden zyx reduziren, und auf diesen zugleich messen könne, und dass man überhaupt die Lage des Punktes m im Raume auf mancherlei Art durch drei Perpendikel bestimmen könne, indem man die unter einander gleichen Grössen vertauscht. So z. B. gelangt man auf den Punkt m, wenn man den Abstand $x = A\xi$ auf der Geraden AX aufträgt, wodurch man den Punkt ξ bestimmt; in ξ über AX in der Ebene XAY ein Perpendikel errichtet, und darauf $\xi z = y$ nimmt; wodurch der Punkt z erhalten wird; endlich in z über der Ebene XAY ein Perpendikel zm errichtet, worauf man die Länge $zm = z$ macht, wodurch zuletzt der Punkt m des Raumes erhalten wird. Auf diese Art ist der Punkt m durch die drei Perpendikel $A\xi = x$, $\xi z = y$ und $zm = z$ vollkommen bestimmt worden. Auch hätte man, nachdem durch Auftragung der Distanz x auf AX der Punkt ξ erhalten worden ist, in demselben ein Perpendikel über AX errichten können, das in die Ebene XAZ fiele; wird auf diesem Perpendikel $\xi y = z$ genommen; so wird der Punkt y erhalten; errichtet man endlich im Punkte y ein Perpendikel über die Ebene XAZ, und nimmt darauf $ym = y$; so wird dadurch der Punkt m im Raume erhalten; so dass der Punkt m durch die drei Perpendikel $A\xi = x$; $\xi y = z$; $ym = y$ bestimmt werde.

Auf eben diese Art kann man sich zur Construktion des Punktes m im Raume der Abstände in nachstehender Folge noch bedienen:

$$A\eta = y ; \quad \eta x = z ; \quad xm = x ;$$
$$A\eta = y ; \quad \eta z = x ; \quad zm = z ;$$
$$A\zeta = z ; \quad \zeta y = x ; \quad ym = y ;$$
$$A\zeta = z ; \quad \zeta x = y ; \quad xm = x .$$

Aendert sich nun die Lage des Punktes m im Raume, so ändert sich der Ort entweder aller drei Punkte $\xi\eta\zeta$ zugleich oder zweier dieser Punkte, oder nur eines einzigen. Welches nun auch immer die Orte der drei Punkte $\xi\eta\zeta$ auf den Linien XX', YY', ZZ' seyn mögen, so wird man alsogleich den dadurch bestimmten Ort des Punktes im Raume finden, wenn man durch die Punkte $\xi\eta\zeta$, senkrecht auf die Geraden XX', YY', ZZ', Ebenen legt; der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt dieser drei Ebenen im Raume ist der gesuchte Punkt.

8. Nachdem nun die Art und Weise aus einander gesetzt worden ist, wie die Lage eines Punktes in demjenigen Theile des Raumes, der einerseits von den Ebenen XAY, XAZ, YAZ, begrenzt wird, sich bestimmen lasse; so wollen wir im gegenwärtigen Art. noch die nähern Bestimmungen hiezufügen, wodurch analytisch ausgedrückt werden könne, in welchem der acht körperlichen Winkel ein durch Abstände von drei auf einander senkrecht stehenden und sich gegenseitig in den Linien XX', YY', ZZ' schneidenden Ebenen gegebener Punkt des Raumes falle.

Da zu beiden Seiten der Ebene, worin XX' und YY' liegt, und welche wir mit xy bezeichnen wollen, Ebenen gelegt werden können, welche die Abstände z von der Ebene xy haben; und da ein Gleiches für die Ebenen xz und yz statt finden kann; so ist es einleuchtend, dass, weil je drei Ebenen einen Durchschnittspunkt geben, und a c h t solche Durchschnittspunkte möglich sind, auch a c h t Punkte im Raume existiren, welche von den Ebenen xy, xz, yz die respektiven Abstände xy, xz, yz haben; was sich durch folgende Construktion leicht einsehen lässt. Es sey (Fig. 4.) Ax' und $Ax_{,}$ der Abstand x; in jedem dieser Punkte x' und $x_{,}$ errichte man in der Ebene xy auf XX' Perpendikel, auf denen man $x'y' = x'y_{,} = x_{,}y' = x_{,}y_{,} =$ dem Abstande y nehme; auf diese Art hat man vier verschiedene Punkte der Ebene xy erhalten, deren jeder von der Ebene yz den Abstand x und von der Ebene xz den Abstand y hat. Zieht man durch ei-

nen jeden dieser vier Punkte Perpendikel $m'\mu'$, $m''\mu''$, $m'''\mu'''$, $m^{\mathrm{v}}\mu^{\mathrm{v}}$ auf die Ebene xy, und nimmt auf ihnen die gleichen Abstände z von dieser Ebene xy; so erhält man acht Punkte von denen $m'm''m'''m^{\mathrm{v}}$ über und $\mu'\mu''\mu'''\mu^{\mathrm{v}}$ unter der Ebene xy liegen, und von denen ein jeder die obigen drei Bedingungen, dass er die Abstände xyz von den Ebenen yz, xz, xy habe, zugleich erfüllt. Man sieht hieraus, dass die blosse Kenntniss der absoluten Grössen der Abstände allein nicht hinreichend sey, die Lage des Punktes m im Raume vollkommen zu bestimmen, indem es dadurch noch unentschieden bleibt, welcher jener acht Punkte der gemeinte Punkt sey. Diese Unbestimmtheit lässt sich nun durch folgende Annahme beseitigen. Wir werden die Abstände, welche auf den Linien AX, AY, AZ gerechnet werden, als positiv, und die auf den rückwärts verlängerten Geraden AX', AY', AZ' gerechneten Abstände als negativ ansehen. Das Vorzeichen, womit der gegebene Abstand behaftet ist, wird dann, diesem Prinzip gemäss, alsogleich zu erkennen geben, nach welcher Gegend derselbe zu nehmen sey.

Die drei auf einander senkrechten Linien XX', YY', ZZ' nennen wir die drei coordinirten Achsen oder ein System dreier rechtwinklichter coordinirter Achsen; den Punkt A, in welchem sich alle drei Achsen durchschneiden, nennen wir den Anfangspunkt der Coordinaten; den Abstand x nennen wir die erste Coordinate; er wird gewöhnlich auf der Achse XX' d. i. der Achse der x gerechnet; eben so heisst der Abstand y, der auf der Achse YY' gerechnet wird, die zweite Coordinate; so wie z die dritte Coordinate heisst, und auf der Achse ZZ' gerechnet wird. Eine Ebene, welche zwei coordinirte Achsen enthält, heisst eine coordinirte Ebene; und zwar heisst die Ebene, welche die Achsen XX' und YY' enthält die Ebene der xy; die Ebene, welche die Achsen XX' und ZZ' enthält, die Ebene der xz; endlich heisst die Ebene, welche die Achsen YY' und ZZ' enthält, die Ebene der yz.

Die Ebenen xy, xz, yz nennt man zusammen ein *System dreier rechtwinklichter coordinirter Ebenen*; ihre Durchschnittslinien sind zugleich die Achsen der xyz.

9. Wir wollen nun diese geometrischen Bestimmungen der Lage eines Punktes im Raume *auf eine analytische Weise* festsetzen.

Sind a, b und c die *gegebenen* absoluten Längen der Coordinaten xyz; so hat man

$$\left.\begin{aligned} x &= a \\ y &= b \\ z &= c \end{aligned}\right\}$$

und diese sind überhaupt die *Gleichungen eines Punktes im Raume*, die aber, falls die Vorzeichen der Grössen a, b, c unbestimmt gelassen werden, zu einem jeden der acht Punkte gehören, davon jeder diese drei Bedingungen erfüllt. Behaftet man aber diese Grössen mit Vorzeichen; so kann es acht verschiedene Verbindungen zwischen den Grössen $\pm a$, $\pm b$, $\pm c$ geben, wodurch jenes System der Gleichungen in *acht* besondere von einander verschiedene Systeme von Gleichungen zerfällt. Einer jeden dieser Gleichungen entspricht eine Lage des Punktes in einem der acht körperlichen Winkel. Diese acht möglichen Verbindungen sind in folgender Tafel zusammengestellt, welche zugleich den Punkt, der zu den nebenstehenden Gleichungen gehört, nebst den körperlichen Winkel anzeigt, in welchem dieser Punkt liegt; und aus welcher man zugleich ersieht, wie diese acht Systeme auch acht wesentlich von einander verschiedene Punkte charakterisiren. Sie haben nur dies unter einander gemein, dass sie im Allgemeinen die Eckpunkte eines rechtwinklichten Parallelepipedes sind.

Coordinaten des Punktes.	Der zugehörige Punkt	Der körperliche Winkel, in welchem der Punkt liegt.
$x = +a,\ y = +b,\ z = +c$	m'	$XYZ,$
$x = +a,\ y = +b,\ z = -c$	μ'	XYZ'
$x = -a,\ y = +b,\ z = +c$	m''	$X'YZ$
$x = -a,\ y = +b,\ z = -c$	μ''	$X'YZ'$
$x = +a,\ y = -b,\ z = +c$	m'''	$XY'Z$
$x = +a,\ y = -b,\ z = -c$	μ'''	$XY'Z'$
$x = -a,\ y = -b,\ z = +c$	m^{IV}	$X'Y'Z$
$x = -a,\ y = -b,\ z = -c$	μ^{IV}	$X'Y'Z'$

Diese Tabelle enthält zwei Systeme von Gleichungen, in welchen die Vorzeichen einerlei sind; drei, worin ein Zeichen negativ, die beiden andern aber positiv sind; und drei, worin ein Zeichen positiv ist, die beiden andern aber negativ sind.

Man erkennt nun hieraus, wie durch diese Gleichungen alle möglichen Lagen im Raume, die ein Punkt nur immer haben kann, auf eine eben so einfache und präcise als bestimmte Art und Weise bezeichnet und analytisch festgesetzt werden können. Auch lassen sich durch diese Gleichungen alle besondere Lagen, die ein Punkt noch einnehmen kann, analytisch bestimmen. Um z. B. anzugeben, der Punkt m befinde sich in der Ebene xy, hat man die Gleichungen $x = o$, $y = b$, $z = c$.

Eben so werden die Gleichungen $x = a$, $y = o$, $z = c$ für einen Punkt gehören, der in der Ebene xz liegt; endlich

werden die Punkte, deren Lagen durch Gleichungen von der Beschaffenheit: $x = a$, $y = b$, $z = o$ bestimmt werden, in der Ebene xy liegen.

10. Es ist von Wichtigkeit, dass man sich von den in den vorigen Art. erklärten Construktionen die deutlichsten Vorstellungen verschaffe. Anfänger werden daher wohl thun, wenn sie den Vorstellungen durch ein aus Rechtecken zusammengesetztes Parallelepiped zu Hülfe kommen, indem die Ebenen, welche durch irgend einen Punkt m des Raumes zu den coordinirten Ebenen parallel gelegt werden, mit diesen eben einen solchen körperlichen Raum einschliessen. Die zwölf Kanten des Parallelepipedes, davon je vier einander gleich sind, sind nichts anders, als die drei Coordinaten des Punktes m. Um den Gedanken noch einen andern bestimmten Gegenstand zu geben, kann man sich vorstellen, dass die Ebene der xy eine horizontale Ebene sey, so dass also beide Achsen XX' und YY' Horizontallinien sind; dann wird ZZ' d. i. die Achse der z eine Vertikallinie, und die Ebenen der xz, yz werden Vertikalebenen seyn. Nimmt man an, dass die Vertikalebene yz die Ebene des Meridians sey; so dass die Achse der y in der Richtung der Mittagslinie liege; so wird die Achse $X'X$ durch den Ost- und Westpunkt gehen. Sind nun die drei Coordinaten eines Punktes gegeben, und $x = a$, $y = b$, $z = c$; so ist c der Abstand des Punktes von der Horizontalebene, a der Abstand desselben Punktes von der Ebene des Meridians, und b der Abstand dieses Punktes von derjenigen Vertikallinie, welche durch den Ost- und Westpunkt geht.

Die Gleichung $x = a$, allein und für sich betrachtet, gehört für alle Punkte, welche von der coordinirten Ebene der yz d. i. von der Ebene des Meridians den Abstand a haben, und diese Punkte liegen alle in einer in diesem Abstande von der Meridianebene yz zu ihr parallel gelegten Ebene. Die Gleichung $y = b$ allein und für sich betrachtet, gehört für alle Punkte, welche von der Ebene xz den Abstand b haben; sie liegen sämmtlich in einer Ebene, die man im Abstande b

zur xz parallel legt. Endlich gehört die Gleichung $y = c$, allein und für sich betrachtet, zu allen Punkten, welche den Abstand c von der Horizontalebene xy haben; dieser Punkte giebt es wieder unendlich viele, und sie liegen alle in einer Ebene, die von der Horizontalebene xy den Abstand c hat.

Zwei dieser Gleichungen zusammen z. B. $x = a$ und $z = c$ gehören für alle Punkte, welche in zwei Ebenen zugleich liegen, davon die eine zur Ebene des Meridians im Abstande a, und die andere zur Horizontalebene im Abstande c parallel ist, d. i. diese zwei Gleichungen, zusammen betrachtet, gehören für alle Punkte, welche in der Durchschnittslinie dieser zwei Ebenen liegen. Diese Durchschnittslinie ist eine zur Achse der y parallele Gerade.

Verbindet man mit diesen Gleichungen noch die Gleichung

$$y = b,$$

so dass man die Gleichungen

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c$$

zusammen (coëxistirend) betrachtet; so werden diese denjenigen Punkt charakterisiren, welcher in jener zur Mittagslinie oder Achse y parallelen Geraden, und in der Ebene zugleich liegt, welche im Abstande b von der durch den Ost- und Westpunkt gehenden Vertikalebene sich befindet. Dieser Punkt ist der Durchschnittspunkt jener Geraden mit dieser Ebene.

Hieraus lässt sich der Zusammenhang der analytischen Ausdrücke, wodurch der Ort eines Punktes im Raume bestimmt wird, mit den geometrischen Construktionen im Raume ganz deutlich begreifen.

11. Wir haben nun ein sehr einfaches Mittel kennen gelernt, dessen man sich in der analytischen Geometrie bedient, um den Ort eines Punktes, und einer jeden Anzahl Punkte zu bestimmen; es besteht darin, dass man sich ein System rechtwinklichter coordinirter Ebenen von unveränderlicher Lage denkt, und hierauf alle Punkte des Raumes bezieht. Die Punkte der Ebenen, in welchen sie von den von einem Punkte des Raumes herabgelassenen Perpendikeln getroffen werden, oder

in denen die Abstände auf den respektiven coordinirten Ebenen senkrecht stehen, nennt man die Projektionen (und zwar die orthogonalen oder rechtwinklichten P.) des Punktes im Raume in diesen Ebenen. Uiberhaupt heisst Projektion eines Punktes in einer Ebene derjenige Punkt, in welchem ein aus dem gegebenen Punkte im Raume auf diese Ebene gefälltes Perpendikel dieselbe trifft. Dieser Erklärung zu Folge, wird jeder Punkt einer Ebene die Projektion unendlich vieler Punkte im Raume seyn können; alle die Punkte nemlich, davon er die Projektion ist, liegen in einer auf diese Ebene senkrechten und durch diesen Punkt gehenden Geraden. Sind nun die Projektionen eines Punktes auf zwei nicht parallelen Ebenen von bekannter Lage gegeben; so ist auch der Ort des Punktes im Raume selbst bekannt; denn man braucht nur in den gegebenen Projektionen des Punktes beider Ebenen Perpendikel zu errichten; so gehen beide durch den gegebenen Punkt, der folglich in zwei Geraden von bestimmter Lage liegen und kein anderer seyn wird, als der Durchschnittspunkt dieser beiden Geraden.

So reicht es z. B. bei geographischen Construktionen hin, dass man die Projektionen eines Punktes in einer horizontalen und vertikalen Ebene kenne, um hieraus die Lage des Punktes im Raume selbst kennen zu lernen. Sind die Projektionen einer gewissen Anzahl Punkte des Raumes in einer horizontalen Ebene gegeben; so darf man nur durch jeden dieser Punkte eine Vertikale gehen lassen: die Punkte, deren horizontale Projektionen gegeben sind, liegen in diesen vertikalen Linien. Sind überdiess noch die Höhen der Punkte im Raume über der horizontalen Ebene bekannt; so sind dadurch die Punkte des Raumes bestimmt.

Wird von einem Punkte im Raume auf eine der Lage nach gegebene gerade Linie eine Senkrechte gezogen, so heisst der Punkt, in welchem sie jene Gerade trifft, die Projektion des Punktes im Raume auf der gegebenen Geraden. Fällt man die Perpendikel vom gegebenen Punkte auf die drei

coordinirten Achsen, so sind die Durchschnittspunkte dieser Lothe mit den Achsen die **Projektionen** des Punktes im Raume **auf den coordinirten Achsen**. Jeder Punkt einer Geraden kann die Projektion unzählig vieler Punkte im Raume seyn, welche sämmtlich in einer Ebene liegen, so durch diesen Punkt der geraden Linie, senkrecht auf sie gelegt wird. Sind die Projektionen eines Punktes auf den drei coordinirten Achsen gegeben, so ist dadurch die Lage des Punktes im Raume selbst gegeben, indem er der Durchschnittspunkt der drei Ebenen ist, die man durch die gegebenen Projektionen senkrecht auf die coordinirten Achsen legt.

Abstände eines durch drei rechtwinklichte Coordinaten bestimmten Punktes im Raume von den drei coordinirten Achsen, und vom Anfangspunkte der Coordinaten. Analytische Ausdrücke für die in diesen Construktionen vorkommenden Winkel. Ableitung der sphärisch - trigonometrischen Formeln für rechtwinklichte sphärische Dreiecke.

12. Es seyen nun überhaupt xyz die Coordinaten eines Punktes im Raume, so dass z der Abstand desselben von der Ebene xy ist, und x, y die Coordinaten seiner Projektion in dieser Ebene sind. Denken wir uns den Punkt des Raumes mit dem Anfangspunkte der Coordinaten und mit denjenigen Punkten der drei coordinirten Achsen in Verbindung, in welchen sie von den durch den Punkt m des Raumes zu den coordinirten parallel gelegten Ebenen getroffen werden.

Wenn also (Fig. 5.) A der Anfangspunkt der Coordinaten, AX, AY, AZ die drei rechtwinklichten coordinirten Achsen der xyz sind, und wenn $n\,n'\,n''$ die Projektionen des Punktes m in den coordinirten Ebenen xy, yz, zx sind; wenn ferner np, $n'p'$, $n''p''$, in diesen Ebenen auf die Achsen AX, AY, AZ senkrechte Linien sind; und man verbindet den Punkt m mit den Punkten $pp'p''A$; so ist es erstlich klar, das die Gerade mp senkrecht auf AX stehen werde, weil die Ebene mnp, in

in denen die Abstände auf den respektiven coordinirten Ebenen senkrecht stehen, nennt man die Projektionen (und zwar die orthogonalen oder rechtwinklichten P.) des Punktes im Raume in diesen Ebenen. Uiberhaupt heisst Projektion eines Punktes in einer Ebene derjenige Punkt, in welchem ein aus dem gegebenen Punkte im Raume auf diese Ebene gefälltes Perpendikel dieselbe trifft. Dieser Erklärung zu Folge, wird jeder Punkt einer Ebene die Projektion unendlich vieler Punkte im Raume seyn können; alle die Punkte nemlich, davon er die Projektion ist, liegen in einer auf diese Ebene senkrechten und durch diesen Punkt gehenden Geraden. Sind nun die Projektionen eines Punktes auf zwei nicht parallelen Ebenen von bekannter Lage gegeben; so ist auch der Ort des Punktes im Raume selbst bekannt; denn man braucht nur in den gegebenen Projektionen des Punktes beider Ebenen Perpendikel zu errichten; so gehen beide durch den gegebenen Punkt, der folglich in zwei Geraden von bestimmter Lage liegen und kein anderer seyn wird, als der Durchschnittspunkt dieser beiden Geraden.

So reicht es z. B. bei geographischen Construktionen hin, dass man die Projektionen eines Punktes in einer horizontalen und vertikalen Ebene kenne, um hieraus die Lage des Punktes im Raume selbst kennen zu lernen. Sind die Projektionen einer gewissen Anzahl Punkte des Raumes in einer horizontalen Ebene gegeben; so darf man nur durch jeden dieser Punkte eine Vertikale gehen lassen: die Punkte, deren horizontale Projektionen gegeben sind, liegen in diesen vertikalen Linien. Sind überdiess noch die Höhen der Punkte im Raume über der horizontalen Ebene bekannt; so sind dadurch die Punkte des Raumes bestimmt.

Wird von einem Punkte im Raume auf eine der Lage nach gegebene gerade Linie eine Senkrechte gezogen, so heisst der Punkt, in welchem sie jene Gerade trifft, die Projektion des Punktes im Raume auf der gegebenen Geraden. Fällt man die Perpendikel vom gegebenen Punkte auf die drei

coordinirten Achsen, so sind die Durchschnittspunkte dieser Lothe mit den Achsen die Projektionen des Punktes im Raume auf den coordinirten Achsen. Jeder Punkt einer Geraden kann die Projektion unzählig vieler Punkte im Raume seyn, welche sämmtlich in einer Ebene liegen, so durch diesen Punkt der geraden Linie, senkrecht auf sie gelegt wird. Sind die Projektionen eines Punktes auf den drei coordinirten Achsen gegeben, so ist dadurch die Lage des Punktes im Raume selbst gegeben, indem er der Durchschnittspunkt der drei Ebenen ist, die man durch die gegebenen Projektionen senkrecht auf die coordinirten Achsen legt.

Abstände eines durch drei rechtwinklichte Coordinaten bestimmten Punktes im Raume von den drei coordinirten Achsen, und vom Anfangspunkte der Coordinaten. Analytische Ausdrücke für die in diesen Constructionen vorkommenden Winkel. Ableitung der sphärisch-trigonometrischen Formeln für rechtwinklichte sphärische Dreiecke.

12. Es seyen nun überhaupt xyz die Coordinaten eines Punktes im Raume, so dass z der Abstand desselben von der Ebene xy ist, und x, y die Coordinaten seiner Projektion in dieser Ebene sind. Denken wir uns den Punkt des Raumes mit dem Anfangspunkte der Coordinaten und mit denjenigen Punkten der drei coordinirten Achsen in Verbindung, in welchen sie von den durch den Punkt m des Raumes zu den coordinirten parallel gelegten Ebenen getroffen werden.

Wenn also (Fig. 5.) A der Anfangspunkt der Coordinaten, AX, AY, AZ die drei rechtwinklichten coordinirten Achsen der xyz sind, und wenn $n\,n'\,n''$ die Projektionen des Punktes m in den coordinirten Ebenen xy, yz, zx sind; wenn ferner np, $n'p'$, $n''p''$, in diesen Ebenen auf die Achsen AX, AY, AZ senkrechte Linien sind; und man verbindet den Punkt m mit den Punkten $pp'p''A$; so ist es ers[illegible] klar, das die Gerade mp senkrecht auf AX stehen w[illegible] Ebene mnp, in

welcher mp liegt, auch auf AX senkrecht steht; $p p' p''$ sind daher die Projektionen des Punktes m auf den coordinirten Achsen; und mp, mp', mp'' sind die Abstände des Punktes m von den coordinirten Achsen AX, AY, AZ. Endlich ist mA die Entfernung des Punktes m vom Anfangspunkte der Coordinaten.

Alle diese Abstände hängen, ihrer absoluten Grösse nach, von der Lage des Punktes m gegen die coordinirten Achsen ab, und es sind die analytischen Ausdrücke dieser Grössen Funktionen der Coordinaten dieses Punktes.

Dem pythagoräischen Lehrsatze gemäss hat man in den bei $n\ n'\ n''$ rechtwinklichten Dreiecken mnp, $mn'p'$, $mn''p''$, offenbar

$$\overline{mp}^2 = \overline{mn}^2 + \overline{np}^2;$$
$$\overline{mp'}^2 = \overline{mn'}^2 + \overline{np'}^2;$$
$$\overline{mp''}^2 = \overline{mn''}^2 + \overline{np''}^2;$$

Setzt man $mp = p$; $mp' = p'$; $mp'' = p''$; so wird man, wenn auch für die andern Linien die abgekürzten Bezeichnungen der Coordinaten gebraucht werden, folgende Gleichungen erhalten:

$$\left.\begin{array}{llll} p^2 = z^2 + y^2; & \text{und hieraus} & p = \sqrt{z^2 + y^2}; \\ p'^2 = x^2 + z^2; & \ldots\ldots & p' = \sqrt{x^2 + z^2}; \\ p''^2 = y^2 + x^2; & \ldots\ldots & p'' = \sqrt{x^2 + y^2}; \end{array}\right\} \ldots (1)$$

Nun hat man auch in den Dreiecken mpA, $mp'A$, $mp''A$, welche bei $pp'p''$ rechtwinklicht sind,

$$\overline{mA}^2 = \overline{Ap}^2 + \overline{pm}^2 = \overline{Ap'}^2 + \overline{p'm}^2 = \overline{Ap''}^2 + \overline{p''m}^2;$$

Setzt man $mA = D$; dann hat man

$$D = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \quad \ldots\ldots (2)$$

So wie man die Punkte $pp'p''$ die Projektionen des Punktes m auf den coordinirten Achsen nennt, kann man auch die

Linien Ap, Ap', Ap'' respektive die Projektionen von Am auf den drei coordinirten Achsen nennen. Stellt man sich die Punkte $n\,n'\,n''$ mit dem Anfangspunkte A verbunden vor (was in der Fig. wegen Vermeidung zu vieler Linien nicht ausgedrückt ist); dann werden nA, $n'A$, $n''A$ die Abstände der Projektionen des Punktes m in den coordinirten Ebenen vom Anfangspunkte seyn, und man kann diese, den frühern Beziehungen analog, die Projektionen des Abstandes mA in den coordinirten Ebenen nennen. Setzt man diese Entfernungen respektive $dd'd''$; so ist in den rechtwinklichten Dreiecken Anm, $An'm$, $An''m$:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}\ ;\quad d' = \sqrt{y^2 + z^2}\ ;\quad d'' = \sqrt{x^2 + z^2}\ ; \quad . \ . \ (3)$$

Die Gleichungen (1) (3) geben zu erkennen, dass

$$p = d'\ ;\quad p' = d''\ ;\quad p'' = d$$

sey; wie auch aus der geometrischen Construktion folgt.

13. Aus den Gleichungen (1) (3) folgt unmittelbar nachstehende Relation:

$$\sqrt{p^2 + p'^2 + p''^2} = \sqrt{d^2 + d'^2 + d''^2} = D.\sqrt{2}\ ; \quad . \ . \ . \ (1)$$

Aus denselben Gleichungen findet man auch die Coordinaten xyz in Funktionen der Projektionen $pp'p''$ der Linie D auf den coordinirten Achsen, oder der Projektionen $dd'd''$ derselben Linie in den coordinirten Ebenen. Es ist nemlich:

$$\left.\begin{aligned} x &= \sqrt{\tfrac{1}{2}\cdot(p'^2 + p''^2 - p^2)} = \sqrt{\tfrac{1}{2}\cdot(d^2 + d''^2 - d'^2)}\ ; \\ y &= \sqrt{\tfrac{1}{2}\cdot(p^2 + p''^2 - p'^2)} = \sqrt{\tfrac{1}{2}\cdot(d^2 + d'^2 - d''^2)}\ ; \\ z &= \sqrt{\tfrac{1}{2}\cdot(p^2 + p'^2 - p''^2)} = \sqrt{\tfrac{1}{2}\cdot(d'^2 + d''^2 - d^2)}\ ; \end{aligned}\right\} \ . \ . \ . \ (2)$$

Man gelangt auf diese Resultate unmittelbar, wenn man den Werth von D aus der Gleichung (1) in nachstehende Gleichungen setzt:

$$\left.\begin{aligned} x &= \sqrt{D^2 - d'^2} = \sqrt{D^2 - p^2} \\ y &= \sqrt{D^2 - d''^2} = \sqrt{D^2 - p'^2} \\ z &= \sqrt{D^2 - d^2} = \sqrt{D^2 - p''^2} \end{aligned}\right\} \ . \ . \ . \ (3)$$

14. Wir wollen nun auch die Winkel, welche in den betrachteten Construktionen entstehen, in die Rechnung einführen. Auch diese hängen von der Lage des Punktes m gegen die coordinirten Achsen und Ebenen ab, und sind folglich Funktionen der Coordinaten dieses Punktes m. Unter allen diesen Winkeln werden wir erstlich diejenigen bemerken, welche der Abstand mA eines Punktes m vom Anfangspunkte mit den drei coordinirten Achsen AX, AY, AZ macht, und welche die Projektionen dieses Abstandes in den Ebenen xy, xz, yz d. i. welche $d\,d'd''$ respektive mit den Achsen xyz machen.

Für jene setzen wir:

$$mAX = \alpha\,; \quad mAY = \beta; \quad mAZ = \gamma.$$

Für diese sey:

$$nAX = \varepsilon\,; \quad n'AY = \varepsilon'\,; \quad n''AZ = \varepsilon''\,;$$

so ist . . $nAY = 90^\circ - \varepsilon\,; n'AZ = 90^\circ - \varepsilon'\,; n''AX = 90^\circ - \varepsilon''\,;$

Die rechtwinklichten Dreiecke Apn, $Ap'n'$, $Ap''n''$ geben unmittelbar nachstehende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \cos.\ \varepsilon &= \frac{Ap}{An} = \frac{x}{d} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,; \\ \cos.\ \varepsilon' &= \frac{Ap'}{An'} = \frac{y}{d'} = \frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}\,; \\ \cos.\ \varepsilon'' &= \frac{Ap''}{An''} = \frac{z}{d''} = \frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}}\,; \end{aligned}\right\} \ldots (1)$$

und

$$\left.\begin{aligned} \sin.\ \varepsilon &= \frac{np}{An} = \frac{y}{d} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,; \\ \sin.\ \varepsilon' &= \frac{n'p'}{An'} = \frac{z}{d'} = \frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}\,; \\ \sin.\ \varepsilon'' &= \frac{n''p''}{An''} = \frac{x}{d''} = \frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}}\,; \end{aligned}\right\} \ldots (2)$$

Aus den rechtwinklichten Dreiecken Apm, $Ap'm$, $Ap''m$ erhält man auf ähnliche Art:

$$\left.\begin{aligned}
\cos.\,\alpha &= \frac{Ap}{Am} = \frac{x}{D} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,,\\
\cos.\,\beta &= \frac{Ap'}{Am} = \frac{y}{D} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,;\\
\cos.\,\gamma &= \frac{Ap''}{Am} = \frac{z}{D} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,;
\end{aligned}\right\}\ldots (3)$$

Aus diesen Ausdrücken lassen sich sehr leicht diejenigen Funktionen von xyz herleiten, wodurch die Sinusse und Tangenten derselben Winkel $\alpha\beta\gamma$ gegeben werden.

15. Aus den vorhergehenden Gleichungen können durch schickliche Verbindungen einige merkwürdige Relationen hergeleitet werden. Multiplizirt man die Gleichungen (3) respektive mit xyz; so erhält man, wenn sie hierauf addirt werden, die Gleichung

$$D = (x.\ \cos.\,\alpha + y.\ \cos.\,\beta + z.\ \cos.\,\gamma)\ \ldots\ldots (1)$$

Bemerkt man nun, dass

$$x = D.\ \cos.\,\alpha;\ \ y = D.\ \cos.\,\beta;\ \ z = D.\ \cos.\,\gamma\ \ldots (2)$$

so wird die Verbindung der Gleichungen (2) mit (1) geben

$$\cos.^2\alpha + \cos.^2\beta + \cos.^2\gamma = 1\ \ldots\ldots (3)$$

d. h. die Summe der Quadrate der Cosinusse der Winkel, welche die Gerade Am mit den coordinirten Achsen macht, ist stets gleich der Einheit, welches auch immer der Ort des Punktes m im Raume seyn mag.

In Rücksicht der Gleichungen (2) bemerke man, dass die Coordinaten xyz des Punktes m die Projektionen von Am auf den coordinirten Achsen sind, und dass diese Projektionen respektive durch $D.\cos.\,\alpha$, $D.\cos.\,\beta$, $D.\cos.\,\gamma$ ausgedrückt werden. Es sind daher $x.\ \cos.\,\alpha$, $y.\ \cos.\,\beta$, $z.\ \cos.\,\gamma$ die Projektionen der Coordinaten xyz auf der geraden Linie Am; und man kann diese die Projektionen der zweiten Ord-

nung von D nennen. Der Fall, welchen die Gleichung (1) enthält, ist ein besonderer von einem noch weit allgemeinern, wie erst in der Folge gezeigt werden wird.

Die Gleichungen (1) (2) des vorigen Art. geben die merkwürdige Relation

$$\left.\begin{array}{l} \cos.\varepsilon.\ \cos.\varepsilon'.\ \cos.\varepsilon'' = \sin.\varepsilon.\ \sin.\varepsilon'.\ \sin.\varepsilon'' \\ \text{oder auch}\quad \text{tg.}\,\varepsilon.\ \text{tg.}\,\varepsilon'.\ \text{tg.}\,\varepsilon'' = 1 \end{array}\right\} . \quad (4)$$

Man kann noch bemerken, dass die Winkel $\varepsilon\,\varepsilon'\varepsilon''$ respektive dieselben sind, als die Winkel, welche $p''m$, pm und $p'm$ mit den respektiven Ebenen xz, xy, yz machen, d. i. als die Winkel $mp''n''$, mpn, $mp'n'$; und dass $(90^\circ - \alpha)$, $(90^\circ - \beta)$, $(90^\circ - \gamma)$ die Neigungswinkel der Geraden Am gegen die coordinirten Ebenen yz, xz, xy sind.

16. Die Gleichungen (1) (2) des 14. Art. geben ferner

$$\text{tang.}\,\varepsilon = \frac{y}{x}\ ;\quad \text{tang.}\,\varepsilon' = \frac{z}{y}\ ;\quad \text{tang.}\,\varepsilon'' = \frac{x}{z}\quad \ldots\ (1)$$

wie man auch aus den Dreiecken Apn, $Ap'n'$, $Ap''n''$ erhält.

Multiplizirt man die erste der Gleichungen (3) desselben Art. mit y, die zweite mit x, und zieht sie von einander ab; so erhält man

$$(y.\ \cos.\alpha - x.\ \cos.\beta) = o\ ;$$

Eine ähnliche Verbindung der ersten und dritten, so wie der zweiten und dritten Gleichung giebt

$$(z.\ \cos.\alpha - x.\ \cos.\gamma) = o\ ;$$

und

$$(z.\ \cos.\beta - y.\ \cos.\gamma) = o\ ;$$

Diese drei Gleichungen geben

$$\frac{y}{x} = \frac{\cos.\beta}{\cos.\alpha}\ ;\quad \frac{z}{y} = \frac{\cos.\gamma}{\cos.\beta}\ ;\quad \frac{x}{z} = \frac{\cos.\alpha}{\cos.\gamma}\ \ldots\ (2)$$

Wir wollen auch noch die Sinusse und Tangenten der Winkel $\alpha\beta\gamma$ mit Hilfe der Gleichungen (2) dieses, und der

Gleichung (3) des vorigen Artikels ausdrücken. Man findet leicht:

$$\left.\begin{aligned}\sin.\,\alpha &= \frac{\sqrt{y^2+z^2}}{D} = \frac{d'}{D} = \frac{p}{D};\\ \sin.\,\beta &= \frac{\sqrt{x^2+z^2}}{D} = \frac{d''}{D} = \frac{p'}{D};\\ \sin.\,\gamma &= \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{D} = \frac{d}{D} = \frac{p''}{D};\end{aligned}\right\}\quad \ldots\ (3)$$

und

$$\left.\begin{aligned}\text{tang.}\,\alpha &= \frac{\sqrt{y^2+z^2}}{x} = \frac{d'}{x} = \frac{p}{x};\\ \text{tang.}\,\beta &= \frac{\sqrt{x^2+z^2}}{y} = \frac{d''}{y} = \frac{p'}{y};\\ \text{tang.}\,\gamma &= \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} = \frac{d}{z} = \frac{p''}{z};\end{aligned}\right\}\quad \ldots\ (4)$$

17. Unter den Winkeln $\alpha\,\beta\,\gamma\,\varepsilon\,\varepsilon'\varepsilon''$ giebt es einige sehr merkwürdige Relationen, die allgemein statt finden, welches auch immer der Ort des Punktes m im Raume seyn mag, und die desswegen verdienen, genauer untersucht zu werden.

Hält man die Gleichungen (1) und (2) des vorigen Art. an einander; so findet man unmittelbar nachstehende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\text{tg.}\,\varepsilon &= \frac{\cos.\,\beta}{\cos.\,\alpha};\ \text{oder}\ \cos.\,\beta = \text{tg.}\,\varepsilon.\,\cos.\,\alpha;\\ \text{tg.}\,\varepsilon' &= \frac{\cos.\,\gamma}{\cos.\,\beta};\ \ldots\ \cos.\,\gamma = \text{tg.}\,\varepsilon'.\,\cos.\,\beta;\\ \text{tg.}\,\varepsilon'' &= \frac{\cos.\,\alpha}{\cos.\,\gamma};\ \ldots\ \cos.\,\alpha = \text{tg.}\,\varepsilon''.\,\cos.\,\gamma;\end{aligned}\right\}\quad \ldots\ (1)$$

Werden die Gleichungen (3) Art. 16. respektive mit der

zweiten, dritten und ersten der Gleichungen (1) und (2) Art. 14 multiplizirt, so erhält man die Relationen:

$$\left.\begin{array}{l} \sin.\alpha.\cos.\varepsilon' = \cos.\beta;\ \sin.\alpha.\sin.\varepsilon' = \cos.\gamma; \\ \sin.\beta.\cos.\varepsilon'' = \cos.\gamma;\ \sin.\beta.\sin.\varepsilon'' = \cos.\alpha; \\ \sin.\gamma.\cos.\varepsilon = \cos.\alpha;\ \sin.\gamma.\sin.\varepsilon = \cos.\beta; \end{array}\right\} \ldots (2)$$

Setzt man die Werthe von $\cos.\beta$, $\cos.\gamma$, $\cos.\alpha$ aus den erstern der drei Gleichungen (2) in die Gleichungen (1); so erhält man:

$$\text{tg.}\,\varepsilon = \text{tg.}\,\alpha.\cos.\varepsilon';\ \text{tg.}\,\varepsilon' = \text{tg.}\,\beta.\cos.\varepsilon'';\ \text{tg.}\,\varepsilon'' = \text{tg.}\,\gamma.\cos.\varepsilon; \ldots (3)$$

Werden die Gleichungen (4) Art. 16 mit den Gleichungen (2) Art. 14 multiplizirt; dann ergeben sich daraus folgende:

$$\left.\begin{array}{l} \text{cotg.}\,\varepsilon'' = \text{tg.}\,\alpha.\sin.\varepsilon'; \\ \text{cotg.}\,\varepsilon = \text{tg.}\,\beta.\sin.\varepsilon''; \\ \text{cotg.}\,\varepsilon' = \text{tg.}\,\gamma.\sin.\varepsilon; \end{array}\right\} \ldots\ldots (4)$$

Mit Hilfe der hier entwickelten Relationen lassen sich die Winkel $\alpha\beta\gamma$ durch die Winkel $\varepsilon\varepsilon'\varepsilon''$, und umgekehrt, diese durch jene bestimmen. So findet man z. B.

$$\left.\begin{array}{l} \text{tg.}\,\alpha = \dfrac{\text{cotg.}\,\varepsilon''}{\sin.\varepsilon'} = \dfrac{\text{tg.}\,\varepsilon}{\cos.\varepsilon'} \\ \text{tg.}\,\beta = \dfrac{\text{cotg.}\,\varepsilon}{\sin.\varepsilon''} = \dfrac{\text{tg.}\,\varepsilon'}{\cos.\varepsilon''} \\ \text{tg.}\,\gamma = \dfrac{\text{cotg.}\,\varepsilon'}{\sin.\varepsilon} = \dfrac{\text{tg.}\,\varepsilon''}{\cos.\varepsilon} \end{array}\right\} \text{aus (3) und (4);}$$

$$\left.\begin{array}{l} \sin.\varepsilon = \dfrac{\cos.\beta}{\sin.\gamma};\ \cos.\varepsilon = \dfrac{\cos.\alpha}{\sin.\gamma};\ \text{tg.}\,\varepsilon = \dfrac{\cos.\beta}{\cos.\alpha} \\ \sin.\varepsilon' = \dfrac{\cos.\gamma}{\sin.\alpha};\ \cos.\varepsilon' = \dfrac{\cos.\beta}{\sin.\alpha};\ \text{tg.}\,\varepsilon' = \dfrac{\cos.\gamma}{\cos.\beta} \\ \sin.\varepsilon'' = \dfrac{\cos.\alpha}{\sin.\beta};\ \cos.\varepsilon'' = \dfrac{\cos.\gamma}{\sin.\beta};\ \text{tg.}\,\varepsilon'' = \dfrac{\cos.\alpha}{\cos.\gamma} \end{array}\right\} \text{aus (1) und (2).}$$

Uiberhaupt, wenn von den sechs Winkeln $\alpha\,\beta\,\gamma\,\varepsilon\,\varepsilon'\varepsilon''$ zwei gegeben sind, so sind dadurch auch schon die übrigen bestimmt; (vorausgesetzt, dass der Punkt m im körperlichen Winkel liege, den die coordinirten Achsen AX, AY, AZ der positiven xyz bilden). Je vier Winkel lassen sich also immer in Funktionen der zwei übrigen ausdrücken; auch ist es nicht schwer, diese Funktionen aus den hier gefundenen Relationen zu entwickeln.

In Betreff der in diesem Artikel gefundenen Relationen bemerke ich überhaupt, dass eine jede von ihnen sich als eine identische Gleichung erweise, sobald man in dieselben die Werthe für die Sinusse, Cosinusse und Tangenten der Winkel $\alpha\,\beta\,\gamma\,\varepsilon\,\varepsilon'\varepsilon''$ aus den Gleichungen (1) (2) (3) Art. 14, und (1) (3) (4) Art. 15, worin sie sich durch xyz ausgedrückt finden, substituiren wird. Diess ist eben der Grund, warum jede dieser Relationen, unabhängig von den Werthen, so xyz haben können, statt habe.

Endlich bemerke ich noch dieses, dass die Gleichungen des 14. und 16. Art. noch manche andere merkwürdige Relation gewähren, die man durch schickliche Verbindungen unter ihnen erlangen kann. So z. B. ist

$$\frac{D^2}{x^2} - \frac{x^2+y^2}{x^2} = \frac{z^2}{x^2}.$$

Diese identische Gleichung gibt offenbar die Relation:

$$\left(\frac{1}{\cos^2\alpha} - \frac{1}{\cos^2\varepsilon}\right) = \mathrm{tg.}^2\,\varepsilon''$$

woraus

$$\mathrm{tg.}\,\varepsilon'' = \sqrt{\left\{\frac{1}{\cos^2\alpha} - \frac{1}{\cos^2\varepsilon}\right\}};$$

oder

$$\mathrm{tg.}\,\varepsilon'' = \sqrt{(\sec^2\alpha - \sec^2\varepsilon)}$$

folgt.

18. Wir wollen itzt die Relationen (1) (2) (3) (4) des vorhergehenden Art. unter einem andern Gesichtspunkte betrachten, wozu wir uns die drei Geraden Am, An, Ap, d. i. die

Entfernungen eines Punktes und seiner Projektionen in der Ebene xy und auf der Achse der x vom Anfangspunkte A besonders vorstellen wollen. Je zwei dieser Geraden liegen in einer Ebene, deren folglich drei entspringen werden, als: (Fig. 6.) die Ebene mAn, welche auf der Ebene xy senkrecht steht; die Ebene nAp, welche mit der Ebene xy dieselbe ist; und endlich die Ebene mAp. Bekanntlich ist der Winkel, der entsteht, wenn man in was immer für einem Punkte ihrer Durchschnittslinie Perpendikel auf diese Durchschnittslinie in diesen Ebenen errichtet, das Maass der Neigung beider Ebenen gegen einander, oder selbst ihr Neigungswinkel. Es wird also npm der Winkel seyn, unter welchem beide Ebenen Apm und Apn gegen einander geneigt sind, weil np und mp in diesen Ebenen auf ihre Durchschnittslinie Ap senkrecht stehen. Auf ähnliche Art fände man den Neigungswinkel der Ebene mAp gegen mAn, wenn man in irgend einem Punkte ihrer Durchschnittslinie z. B. im Punkte m über Am in den Ebenen mAp und mAn senkrechte Linien errichten würde. Der Winkel, den diese zwei Perpendikel mit einander einschliessen, ist der Neigungswinkel der zwei Ebenen mAp und mAn.

Dieses vorausgesetzt, wollen wir uns einen aus A, mit dem Halbmesser Am in der Ebene mAn beschriebenen Kreisbogen mr vorstellen, welcher die verlängerte An im Punkte r trifft, und uns ferner einen aus A mit $Ar = Am$ in der Ebene rAX oder xy beschriebenen Kreisbogen rs denken, der die Achse x im Punkte s treffe. Endlich werde m mit s durch den aus A mit $Am = As$ beschriebenen Kreisbogen ms verbunden. Durch diese Construktion wird im Raume ein System dreier unter einander verbundener Kreisbögen mr, rs, ms erhalten, welches man ein sphärisches Dreieck nennt, indem m, r, s Punkte der um den Mittelpunkt A mit dem Halbmesser Am beschriebenen Oberfläche einer Kugel (Sphäre) sind, in welchem sie von den Linien Am, Ap, An oder ihren Verlängerungen getroffen wird. Verbindet man diese drei Punkte der Kugelfläche durch grösste Kreise mr, rs, ms; so entsteht

auf derselben eine von drei Seiten begrenzte Fläche, welche desshalb ein **sphärisches Dreieck** heisst. Die Bögen mr, rs, ms werden die **Seiten** des sphärischen Dreieckes, und smr, mrs, msr die **sphärischen Winkel** desselben genannt. Die Seiten mr, rs, ms sind nichts anders, als das Maass der Winkel mAr, rAs, mAs, welche die Durchschnittslinien As, Am, Ar der Ebenen mAr, rAs, mAs mit einander machen; so wie die Winkel smr, mrs, msr in That nichts anders sind, als die gegenseitigen Neigungen der Ebenen, worin die Kreisbögen liegen, welche dieselben einschliessen.

Dem zufolge ist $msr = npm = \varepsilon'$;

$$mrs = 90^\circ.$$

Es ist leicht einzusehen, dass

$$mr = mAn = 90^\circ - \gamma;$$
$$rs = nAp = \varepsilon;$$
$$ms = mAX = \alpha.$$

19. Wir wollen nun für den Augenblick an die Stelle der Punkte s, m, r (Fig. 7.) die Buchstaben A, B, C setzen; und es sey der Kürze wegen $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$; so hat man

$$\alpha = c;\ \gamma = 90^\circ - a;\ \varepsilon = b;\ \varepsilon' = A.$$

Die erste und dritte der Relationen (2), die dritte der Relationen (4) und die erste der Relationen (3) Art. 17 geben sogleich:

$$\left.\begin{aligned} &\sin. a = \sin. c. \sin. A; \\ &\cos. c = \cos. a. \cos. b; \\ &\sin. b = \text{tang}. a. \cot. A; \\ &\cos. A = \text{tang}. b. \cot. c. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (1)$$

Der ersten, dritten und vierten dieser Gleichungen analog hat man

$$\left.\begin{aligned} &\sin. b = \sin. c. \sin. B; \\ &\sin. a = \text{tang}. b. \cot. B; \\ &\cos. B = \text{tang}. a. \cot. c; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (2)$$

wenn man nur a, A mit b, B vertauscht.

Da

$$\cos. c = \cos. a. \cos. b = \frac{\sin. a}{\text{tang}.a} . \frac{\sin. b}{\text{tang}.b};$$

oder $$\cos. c = \frac{\sin. b}{\text{tang}.a} . \frac{\sin. a}{\text{tang}.b} .$$

und da $$\frac{\sin. b}{\text{tang}.a} = \cot. A; \quad \frac{\sin. a}{\text{tang}.b} = \cot. B;$$

so hat man

$$\cos. c = \cot. A. \cot. B \quad . \; . \; . \; . \; (3)$$

Die dritte der Gleichungen (1) gibt

$$\cos. A = \frac{\sin. A. \sin. b. \cos. a}{\sin. a};$$

da aber

$$\frac{\sin. A. \sin. b}{\sin. a} = \sin. B,$$

wie aus der gegenseitigen Theilung der ersten der Gleichungen (1) und (2) folgt; so hat man

$$\left.\begin{array}{l} \cos. A = \sin. B. \cos. a; \\ \text{und ihr analog: } \cos. B = \sin. A. \cos. b; \end{array}\right\} \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

In den Formeln (1) (2) (3) (4) sind alle Auflösungen der rechtwinklichten sphärischen Dreiecke enthalten.

Aus den in den vorhergehenden Art. entwickelten Formeln ergeben sich durch eine leichte Folge nachstehende merkwürdige Relationen:

I. Denkt man sich ein sphärisches Dreieck ABC, dessen drei Seiten Quadranten sind, und nimmt man wo immer auf derselben Kugeloberfläche einen Punkt m an, den man durch grösste Kreise mA, mB, mC mit den Eckpunkten des sphärischen Dreieckes verbindet; so hat man

$$\cos.^2(mA) + \cos.^2(mB) + \cos.^2(mC) = 1 .$$

II. Zieht man unter denselben Umständen aus m auf die Seiten BC, AC, AB Perpendikel mA', mB', mC'; so ist:

$$\sin.^2(mA') + \sin.^2(mB') + \sin.^2(mC') = 1 .$$

III. Zieht man unter eben diesen Umständen von den Spitzen A, B, C dieses sphärischen Dreieckes auf was immer für einen grössten Kreis dieser Kugeloberfläche Perpendikel Aa, Bb, Cc; so ist

$$\sin.^2(Aa) + \sin.^2(Bb) + \sin.^2(Cc) = 1 .$$

IV. Schneidet der willkührlich gezogene grösste Kreis die drei Seiten des sphärischen Dreieckes ABC oder ihre Verlängerungen in den Punkten $\alpha\beta\gamma$; so sind diese Seiten gegen den grössten Kreis immer so geneigt, dass:

$$\cos.^2(B\alpha\gamma) + \cos.^2(A\beta\gamma) + \cos.^2(A\gamma\beta) = 1 .$$

Bestimmung der Lage eines Punktes in einer Ebene und im Raume mittelst der schiefwinklichten Coordinaten. Ausdruck der Entfernung eines Punktes vom Anfangspunkte durch schiefwinklichte Coordinaten. Winkel, welche hier entspringen.

20. Wir haben in den vorhergehenden Abschnitten gesehen, wie die Lage eines Punktes, sowohl in einer Ebene als im Raume mittelst Coordinaten bestimmt werde, die wir, weil sie auf einander senkrecht stehen, rechtwinklichte Coordinaten genannt haben. In den Untersuchungen der analytischen Geometrie bedient man sich zuweilen gewisser Absichten wegen zur Bestimmung der Lagen der Punkte solcher Coordinaten, die nicht auf einander senkrecht stehen, und welche desshalb schiefwinklichte Coordinaten genannt werden. Es ist daher nothwendig, von den Ortsbestimmungen der Punkte auch durch solche Coordinaten zu sprechen.

21. Man stelle sich erstlich in der Ebene, in welcher ein gegebener Punkt liege, zwei gerade Linien gezogen vor, die sich unter irgend einem Winkel schneiden; so wird man die Lage eines jeden Punktes dieser Ebene kennen, wenn man seine Lage gegen jene zwei unveränderliche Geraden kennt.

Ist m (Fig. 8.) der Punkt der Ebene, in welcher die unveränderlichen Geraden AX, AY,

liegen, und sind my, mx die ihnen respektive Parallelen; so wird der Ort des Punktes m in dieser Ebene gegeben seyn, wenn es die zwei Geraden Ax, Ay oder Ax, xm sind, welche alsdann die schiefwinklichten Coordinaten des Punktes m heissen. Die Geraden AX, AY, nennt man die schiefwinklichten coordinirten Achsen, und den Winkel XAY, den sie mit einander machen, und welchen wir mit ν bezeichnen wollen, den Ordinatenwinkel.

Setzt man also $Ax = x$, $Ay = xm = y$; so ist

$$Axm = (180^\circ - \nu),$$

und die Entfernung Am, welche wir mit D bezeichnen wollen, ist bekanntlich

$$D = \sqrt{(x^2 + y^2 + 2x.y.\cos.\nu)} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Setzt man ferner $mAX = \alpha$, $mAY = \beta$; so hat man im Dreiecke Axm

$$D : x = \sin.\ \nu : \sin.\ \beta$$
$$D : y = \sin.\ \nu : \sin.\ \alpha\ .$$

Hieraus findet man

$$\sin.\ \alpha = \frac{y.\ \sin.\ \nu}{D}\ ; \quad \sin.\ \beta = \frac{x.\ \sin.\ \nu}{D} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Um cos. α und cos. β zu finden, bemerke man, dass

$$\alpha + \beta = \nu\ ;$$

daher ist $\sin.\ \beta = \sin.\ (\nu - \alpha) = \sin.\ \nu.\ \cos.\ \alpha - \cos.\ \nu.\ \sin.\ \alpha$

$$\text{d. i. } \frac{x.\ \sin.\ \nu}{D} = \sin.\ \nu.\ \cos.\ \alpha - \cos.\ \nu.\left(\frac{y.\ \sin.\ \nu}{D}\right),$$

oder $\cos.\ \alpha = \left(\frac{x + y.\cos.\nu}{D}\right)$;

und eben so $\cos.\ \beta = \left(\frac{y + x.\cos.\nu}{D}\right)$; $\quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$

Projizirt man den Punkt x auf Am; so ist $x.$ cos. α die

orthogonale Projektion von x und y cos. β die orthogonale Projektion von y auf Am; und da

$$D = (x.\ \cos.\ \alpha + y.\ \cos.\ \beta)\ \ .\ .\ .\ .\ .\ (4)$$

so findet man aus dieser Gleichung den Ausdruck (1) wieder.

22. Um ferner den Ort eines Punktes im Raume zu bestimmen, und diess zwar durch Coordinaten, welche unter schiefen Winkeln gegen einander geneigt sind, lege man durch einen zum Anfangspunkt der schiefwinklichten Coordinaten angenommenen Punkt A drei nicht in einer Ebene gelegene gerade Linien, als AX, AY, AZ (Fig. 9.), welche beliebige Winkel mit einander machen. Auch die Ebenen XAY, XAZ, YAZ, welche man die schiefwinklichten coordinirten Ebenen nennen kann, werden dann nicht senkrecht auf einander stehen. Denkt man sich hierauf durch den Punkt m drei Ebenen gelegt, welche den coordinirten Ebenen respektive parallel sind; so schliessen diese sechs Ebenen ein schiefwinklichtes Parallelepiped ein. Sind also $n n' n''$ die Punkte der Ebenen XAY, XAZ, YAZ, in welchen sie von den zu den Achsen AZ, AY, AX Parallelen mn, mn', mn'', getroffen, und sind $pp'p''$ die Punkte auf den Achsen AX, AY, AZ, in welchen sie von den zu den Ebenen XAY, XAZ, YAZ Parallelen geschnitten werden; so sind pn', $p'n'$; $p''n$, pn; $p'n''$, $p''n''$ die Durchschnittslinien dieser durch den Punkt m gelegten Ebenen mit den coordinirten Ebenen; und Ap, Ap', Ap'' sind die schiefwinklichten Coordinaten des Punktes m. Alle diese Linien aber sind die zwölf Kanten des schiefen Parallelepipeds.

23. Wir wollen nun nachstehende Bezeichnungen für die Winkel und Linien, welche hier vorkommen, festsetzen:

Es sey also (Fig. 9.) $mAX = \alpha$; $mAY = \beta$; $mAZ = \gamma$;
ferner $YAZ = \lambda$; $XAZ = \mu$; $XAY = \nu$;
der Winkel, den die Ebene ZAX mit YAX macht, sey $= (\lambda)$;
. ZAY . XAY . . . $= (\mu)$;
. YAZ . XAZ . . . $= (\nu)$;

Endlich setze man $Ap = x$; $Ap' = y$; $Ap'' = z$; $Am = D$.

Um die Funktionen zu finden, durch welche man $D\alpha\beta\gamma$ mittelst der Coordinaten xyz und der Winkel $\lambda\mu\nu$ oder (λ) (μ) (ν) ausdrückt, betrachten wir erstlich die orthogonale Projektion der Achse AZ in der Ebene XAY, und es sey AL (Fig. 10. *a.*) diese Projektion.

Durch den Punkt n, in welchem diese Ebene von der durch m zu AZ Parallelen geschnitten wird; ziehe man np, nq den Achsen AY, AX parallel; so ist $Ap = x$, $Aq = y$. Ferner ziehe man aus demselben Punkte n auf A die Perpendikel nn', pp', qq'; so ist $pn' = Aq'$: folglich

$$An' = (Aq' + Ap').$$

Nun ist, wenn man die $LAn = \delta$ setzt

$$An' = An. \cos. \delta;$$
$$Aq' = y. \cos. (YAL) = y. \cos. \lambda';$$
$$Ap' = x. \cos. (XAL) = y. \cos. \mu';$$

wenn man die Winkel YAL, XAL respektive mit λ' μ' bezeichnet. Folglich ist

$$An. \cos. \delta = (x. \cos. \mu' + y. \cos. \lambda') \quad . \quad . \quad (a)$$

Es sey nun (Fig. 10. *b.*) der Winkel ZAL, d. i. die Neigung der Achse AZ gegen die Ebene XAY gleich ϑ; so wird die mit $\cos. \vartheta$ multiplizirte Gleichung (a) geben:

$$An. \cos. \delta. \cos. \vartheta = x. \cos. \mu'. \cos. \vartheta + y. \cos. \lambda'. \cos. \vartheta,$$

oder, wegen

$\cos. \delta. \cos. \vartheta = \cos. (ZAn)$; $\cos. \mu'. \cos. \vartheta = \cos. \mu$; $\cos. \lambda'. \cos. \vartheta = \cos. \lambda$

ist $$An. \cos. (ZAn) = (x. \cos. \mu + y. \cos. \lambda) \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

Dieses vorausgesetzt, hat man nun im Dreieck Apn wegen $Apn = (180^\circ - \nu)$,

$$\overline{An}^2 = (x^2 + y^2 + 2xy. \cos. \nu)$$

Im Dreieck Anm hat man aus gleichem Grunde

$$\overline{Am}^2 = D^2 = \overline{An}^2 + z^2 + 2z. An. \cos. (ZAn) \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

d. i.

$$D = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2 + 2xy. \cos. \nu + 2xz. \cos. \mu + 2yz. \cos. \lambda)},$$

wenn nemlich in der Gleichung (c) aus (b) der Werth von $An. \cos (ZAn)$ gesetzt wird.

24. Denselben Ausdruck für D findet man noch auf eine andere einfache Art; nennt man nemlich d die Diagonale der Seite xy des Parallelepipedes; so ist, wenn der Winkel, welchen diese Diagonale mit AZ bildet, $\varkappa$ heisst,

$$D^2 = d^2 + z^2 + 2d.z.\ \cos.\ \varkappa \quad \ldots \quad (a)$$

Da ferner $d^2 = x^2 + y^2 + 2xy.\ \cos.\ \nu$; so hat man

$$D^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy.\ \cos.\ \nu + 2d.\ z.\ \cos.\ \varkappa \quad . \quad . \quad (b)$$

Die Diagonale d theilt die Seitenfläche xy des Parallelepipedes in zwei gleiche Dreiecke, deren Seitenlinien dxy sind; projizirt man sie auf die Achse AZ; so ist

die Projektion von $d = d.\ \cos.\ \varkappa$;
$\ldots\ldots\ x = x.\ \cos.\ \mu$;
$\ldots\ldots\ y = y.\ \cos.\ \lambda$;

da die Projektion der Diagonale d der Summe der Projektionen der beiden andern Seiten gleich ist; so hat man

$$d.\ \cos.\ \varkappa = (x.\ \cos.\ \mu + y.\ \cos.\ \lambda) \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

Wird dieser Werth von $d.\ \cos.\ \varkappa$ in die Gleichung (b) gesetzt; so erhält man für D den Ausdruck wie im vorigen Art.

25. Zieht man durch den Punkt m die zu AZ, AY, AX Parallelen, welche die Ebenen xy, xz, yz in den Punkten n, n', n'' treffen, und verbindet sie mit dem Anfangspunkte A; so wird man, wenn

$$An = d,\ An' = d',\ An'' = d''$$

gesetzt wird, nachstehende Ausdrücke erhalten:

$$\left.\begin{aligned} d &= \sqrt{(x^2 + y^2 + 2xy.\ \cos.\ \nu)}; \\ d' &= \sqrt{(x^2 + z^2 + 2xz.\ \cos.\ \mu)}; \\ d'' &= \sqrt{(y^2 + z^2 + 2yz.\ \cos.\ \lambda)}; \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Ferner ist:

$$\left.\begin{aligned} \cos.(ZAn) &= \left(\frac{x.\cos.\mu + y.\cos.\lambda}{d}\right); \\ \cos.(YAn') &= \left(\frac{x.\cos.\nu + z.\cos.\lambda}{d'}\right); \\ \cos.(XAn'') &= \left(\frac{y.\cos.\nu + z.\cos.\mu}{d''}\right); \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Man findet diese Resultate, wenn man von dem Grundsatze Gebrauch macht, dass die Projektionen von $d\,d'd''$ auf den respektiven Achsen AZ, AY, AX den Summen der Projektionen von x, y; x, z; y, z; auf eben diesen Achsen gleich sind. Mittelst desselben Grundsatzes findet man

$$\left.\begin{array}{ll}
\cos.(XAn)=\left(\dfrac{x+y.\cos.\nu}{d}\right); & \cos.(ZAn')=\left(\dfrac{z+x.\cos.\mu}{d'}\right)\\[2ex]
\cos.(YAn)=\left(\dfrac{y+x.\cos.\nu}{d}\right); & \cos.(YAn'')=\left(\dfrac{y+z.\cos.\lambda}{d''}\right)\\[2ex]
\cos.(XAn')=\left(\dfrac{x+z.\cos.\mu}{d'}\right); & \cos.(ZAn'')=\left(\dfrac{z+y.\cos.\lambda}{d''}\right)
\end{array}\right\}\;.\;(3)$$

Ferner hat man in den Dreiecken Apn, $Ap'n''$, $Ap''n'$

$$\left.\begin{array}{ll}
\sin.(XAn)=\left(\dfrac{y.\sin.\nu}{d}\right); & \sin.(YAn)=\left(\dfrac{x.\sin.\nu}{d}\right)\\[2ex]
\sin.(XAn')=\left(\dfrac{z.\sin.\mu}{d'}\right); & \sin.(ZAn')=\left(\dfrac{x.\sin.\mu}{d'}\right)\\[2ex]
\sin.(YAn'')=\left(\dfrac{z.\sin.\lambda}{d''}\right); & \sin.(ZAn'')=\left(\dfrac{y.\sin.\lambda}{d''}\right)
\end{array}\right\}\;.\;.\;(4)$$

Verbindet man die Gleichungen (3) in derselben Ordnung mit den Gleichungen (4) mittelst Division; so findet man

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{tg}.(XAn)=\left(\dfrac{x+y.\cos.\nu}{y.\sin.\nu}\right); & \text{tg}.(ZAn')=\left(\dfrac{z+x.\cos.\mu}{x.\sin\,\mu}\right)\\[2ex]
\text{tg}.(YAn)=\left(\dfrac{y+x.\cos.\nu}{x.\sin.\nu}\right); & \text{tg}.(YAn'')=\left(\dfrac{y+z.\cos.\lambda}{z.\sin\,\varkappa}\right)\\[2ex]
\text{tg}.(XAn')=\left(\dfrac{x+z.\cos\,\mu}{z.\sin.\mu}\right); & \text{tg}.(ZAn'')=\left(\dfrac{z+y.\cos.\lambda}{y.\sin.\lambda}\right)
\end{array}\right\}\;.\;(5)$$

Durch diese Gleichungen (2) (5) erhält man die Winkel, welche $d\,d'd''$ mit den coordinirten Achsen AX, AY, AZ machen, in Funktionen der Coordinaten xyz und der Winkel $\lambda\,\mu\,\nu$.

26. Um die Winkel zu finden, welche $d\,d'd''$ mit D machen, betrachte man die Dreiecke mAn, mAn', mAn''.

Im Dreiecke mAn hat man

$$\cos.(mAn) = \frac{\overline{Am}^2 + \overline{An}^2 - z^2}{2.Am.An}$$

d. i. $$\cos.(mAn) = \frac{D^2 + d^2 - z^2}{2.D.d.}$$

oder $$\cos.(mAn) = \frac{d^2 + z.(x.\cos.\mu + y.\cos.\lambda)}{D.d}$$

Macht man Gebrauch von der ersten der Gleichungen (2) des vorigen Art.; so findet man

$$\left.\begin{aligned} \cos.(mAn) &= \left(\frac{d + z.\cos.(ZAn)}{D}\right) \\ \text{und eben so}\quad \cos.(mAn') &= \left(\frac{d' + y.\cos.(YAn')}{D}\right) \\ \cos.(mAn'') &= \left(\frac{d'' + x.\cos.(XAn'')}{D}\right) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (1)$$

Die Winkel, welche D mit den coordinirten Achsen macht, d. i. $\alpha\beta\gamma$ findet man dadurch, dass man die doppelten Werthe von $\overline{pm}^2$ aus den zwei Gleichungen:

$\overline{pm}^2 = (y^2 + z^2 + 2yz.\cos.\lambda)$; $\overline{pm}^2 = (D^2 + x^2 - 2D.x.\cos.\alpha)$;

einander gleich setzt, und hierin den Werth von D^2, der oben gefunden wurde, substituirt; ferner ein Aehnliches mit $\overline{p'm}^2$ und $\overline{p''m}^2$ macht. Die gehörigen Reduktionen führen auf nachstehende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \cos.\alpha &= \left(\frac{x + y.\cos.\nu + z.\cos.\mu}{D}\right) \\ \cos.\beta &= \left(\frac{y + x.\cos.\nu + z.\cos.\lambda}{D}\right) \\ \cos.\gamma &= \left(\frac{z + x.\cos.\mu + y.\cos.\lambda}{D}\right) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; (2)$$

Bemerkt man, dass $D.\cos.\alpha$, $D.\cos.\beta$, $D.\cos.\gamma$ die orthogonalen Projektionen von D auf den coordinirten Achsen AX, AY, AZ sind; so ergeben sich diese gefundenen Ausdrücke auch aus dem Grundsatze: dass die Projektionen von D auf

den Achsen von xyz gleich sind den Summen der Projektionen der Coordinaten xyz auf eben diesen Achsen.

Diese Gleichungen können indessen noch auf folgende Art gefunden werden. Da nemlich

$$\left.\begin{aligned} mAn'' &= (XAn''-\alpha) \\ mAn' &= (YAn'-\beta) \\ mAn &= (ZAn-\gamma) \end{aligned}\right\}$$

so ist

$$\sin.(mAn'') = \sin.(XAn'').\cos.\alpha - \cos.(XAn'').\sin.\alpha\,;$$
$$\sin.(mAn') = \sin.(YAn').\cos.\beta - \cos.(YAn').\sin.\beta\,;$$
$$\sin.(mAn) = \sin.(ZAn).\cos\gamma - \cos.(ZAn).\sin.\gamma\,.$$

Hieraus findet man:

$$\left.\begin{aligned} \cos.\alpha &= \frac{\sin.(mAn'')}{\sin.(XAn'')} + \frac{\sin.\alpha}{\sin.(XAn'')}.\cos.(XAn'') \\ \cos.\beta &= \frac{\sin.(mAn')}{\sin.(YAn')} + \frac{\sin.\beta}{\sin.(YAn')}.\cos.(YAn') \\ \cos.\gamma &= \frac{\sin.(mAn)}{\sin.(ZAn)} + \frac{\sin.\gamma}{\sin.(ZAn)}.\cos.(ZAn) \end{aligned}\right\} \quad .\ .\ (a)$$

Nun bemerke man, dass

$$\left.\begin{aligned} \frac{\sin.(mAn'')}{\sin.(XAn'')} &= \frac{x}{D}\,; & \frac{\sin.\alpha}{\sin.(XAn'')} &= \frac{d''}{D} \\ \frac{\sin.(mAn')}{\sin.(YAn')} &= \frac{y}{D}\,; & \frac{\sin.\beta}{\sin.(YAn')} &= \frac{d'}{D} \\ \frac{\sin.(mAn)}{\sin.(ZAn)} &= \frac{z}{D}\,; & \frac{\sin.\gamma}{\sin.(ZAn)} &= \frac{d}{D} \end{aligned}\right\} \quad .\ .\ (b)$$

so wird die Substitution dieser Verhältnisse der Sinusse in den Gleichungen (a) nachstehende Gleichungen geben:

$$\left.\begin{aligned} \cos.\alpha &= \left(\frac{x+d''.\cos.(XAn'')}{D}\right) \\ \cos.\beta &= \left(\frac{y+d'.\cos.(YAn')}{D}\right) \\ \cos.\gamma &= \left(\frac{z+d.\cos.(ZAn)}{D}\right) \end{aligned}\right\} \quad .\ .\ .\ .\ .\ (c)$$

Drückt man in den Gleichungen (c) noch die Cosinusse der Winkel XAn'', YAn', ZAn nach den Gleichungen (2) des vorigen Art. aus; so resultiren die Gleichungen (2) des gegenwärtigen.

27. Wir wollen itzt die orthogonalen Projektionen der Achsen AZ, AY, AX in den respektiven Ebenen XAY, XAZ, YAZ betrachten. Die Winkel, welche sie mit den coordinirten Achsen bilden, lassen sich durch $\lambda\mu\nu$ ausdrücken. Nennt man $\lambda'\mu'$ die Winkel, welche die orthogonale Projektion von AZ in der Ebene xy mit den Achsen y und x einschliessen; dann hat man

$$\cos.\vartheta = \frac{\cos.\lambda}{\cos.\lambda'}; \quad \cos.\vartheta = \frac{\cos.\mu}{\cos.\mu'}; \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

und

$$\left.\begin{aligned} \frac{\cos.\lambda}{\cos.\mu} &= \frac{\cos.\lambda'}{\cos.\mu'}; \\ \lambda' + \mu' &= \nu; \end{aligned}\right\}$$

da

so gibt die Verbindung dieser zwei Gleichungen:

$$\text{tg}.\lambda' = \left(\frac{\cos.\mu - \cos.\lambda.\cos.\nu}{\sin.\nu.\cos.\lambda}\right); \quad \text{tg}.\mu' = \left(\frac{\cos.\lambda - \cos.\mu.\cos.\nu}{\sin.\nu.\cos.\mu}\right) (1)$$

Aehnliche Gleichungen erhält man zur Bestimmung der Winkel, welche die Projektion von AY in der Ebene XAZ mit AX und AZ; und endlich, welche die Projektion von AX in der Ebene YAZ mit AY und AZ macht. Setzt man in den Formeln (1), $\alpha\beta$ anstatt $\mu\lambda$; so erhält man die Winkel $\lambda_{,}\mu_{,}$, welche die Projektion von $Am = D$ in der Ebene XAY mit x und y macht; es ist also

$$\text{tg}.\lambda_{,} = \left(\frac{\cos.\alpha - \cos.\beta.\cos.\nu}{\sin.\nu.\cos.\beta}\right); \quad \text{tg}.\mu_{,} = \left(\frac{\cos.\beta - \cos.\alpha.\cos.\nu}{\sin.\nu.\cos.\alpha}\right). (2)$$

Aehnliche Formeln erhält man für die Tangenten der Winkel, welche die Projektionen von D in den Ebenen xz, yz respektive mit den Achsen x, z und y, z einschliessen.

Die Gleichungen (a) führen endlich auf die Ausdrücke der

Neigungen sowohl der Achsen AZ, AY, AX, als auch der Geraden Am gegen die Ebenen XAY, XAZ, YAZ.

Den Ausdrücken (2) kann man noch einige andere Formen ertheilen. So z. B. setze man in die Zähler für $\cos.\alpha$, $\cos.\beta$ die Werthe aus den Gleichungen (2) Art. 26; und mache hiebei Gebrauch von den Gleichungen (1) des gegenwärtigen Art.; so hat man

$$\text{tg}.\lambda_{,} = \left(\frac{x.\sin.\nu + z.\text{tg}.\lambda'}{\cos.\beta}\right);\ \text{tg}.\mu_{,} = \left(\frac{y.\sin.\nu + z.\text{tg}.\mu'}{\cos.\alpha}\right)$$

Ausdrücke für die Abstände eines Punktes von den coordinirten Achsen und Ebenen durch seine schiefwinklichten Coordinaten. Die sphärische Trigonometrie.

28. Wir wollen mit der Betrachtung des besondern Falles anfangen, da der gegebene Punkt m in der Ebene XAY liegt. Es seyen also AX, AY (Fig. 12) die schiefwinklichten coordinirten Achsen, und mp', mp die ihnen parallelen Geraden.

Der Ordinaten - Winkel XAY heisse ν; und es seyen $Ap = x$, $pm = y$ die schiefwinklichten Coordinaten des Punktes m.

Zieht man mr, mr' senkrecht auf die Achsen AX, AY, und setzt $mr = (x)$; $mr' = (y)$; so werden diese Grössen Funktionen von xy und ν seyn. Man findet die Ausdrücke dafür sehr leicht, wenn man bemerkt, dass in den Dreiecken mrp und $mr'p'$ folgende Proportionen statt haben:

$$mr : pm = \sin.\nu : 1$$
$$mr' : p'm = \sin.\nu : 1$$

diese geben alsogleich

$$(x) = y.\sin.\nu;\quad (y) = x.\sin.\nu.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt offenbar

$$x.(x) = y.(y);$$

und da diese Gleichung statt hat, welches auch immer die Werthe von x und y seyn mögen; so folgt, dass ein jedes

Parallelogramm $Apmp'$ die Eigenschaft hat, dass, wenn man von dem Punkte m Perpendikel auf seine Seiten Ap und Ap' herablässt, die Produkte aus den Seiten Ap und Ap' in diese auf ihre Verlängerungen herabgelassenen Perpendikel mr und mr' einander gleich seyen. Weil $pr = y.\cos.\nu$ und $p'r' = x.\cos.\nu$; so ist

$$Ar = (x + y.\cos.\nu); \quad Ar' = (y + x.\cos.\nu).$$

Und da $\overline{Am}^2 = \overline{Ar}^2 + \overline{rm}^2 = \overline{Ar'}^2 + \overline{r'm}^2$;

so hat man $Am = \sqrt{[(x + y.\cos.\nu)^2 + y^2 \sin^2\nu]}$;

oder $Am = \sqrt{[(y + x.\cos.\nu)^2 + x^2 \sin^2\nu]}$;

Ein jeder dieser Ausdrücke reduzirt sich auf nachstehende

$$Am = \sqrt{(x^2 + y^2 + 2xy.\cos.\nu)},$$

wie bekannt ist.

Der Flächeninhalt des Parallelogrammes $Apmp'$ ist =

$$Ap.mr = Ap'.mr'$$

das ist

$$(x.y.\sin.\nu).$$

29. Beziehen wir itzt einen Punkt m im Raume auf ein System dreier schiefwinklichter coordinirter Achsen AX, AY, AZ (Fig. 13.), und es seyen $Ap = x$, $pn = y$, $nm = z$ die drei schiefwinklichten Coordinaten dieses Punktes.

Wird von m auf die Ebene XAY ein Loth gefällt; so treffe dieses jene Ebene im Punkte $n_{,}$. Zieht man vom Punkte $n_{,}$ auf die Achse AX ein Perpendikel $n_{,}p_{,}$ und verbindet man die Punkte m und $p_{,}$; so wird $mp_{,}$ senkrecht auf der Achse AX stehen. Die Linie $mn_{,}$ wird der Abstand des Punktes m von der Ebene xy seyn; wir wollen ihn mit (xy) bezeichnen, die Linie $mp_{,}$ wird der Abstand des Punktes m von der Achse AX seyn, und dieser soll mit (x) bezeichnet werden.

Ferner sey noch $Ap_{,} = x_{,}$ und $p_{,}n_{,} = y_{,}$.

Zieht man Am; so hat man im Dreiecke $Ap_{,}m$

$$Am : Ap_{,} = 1 : \cos.\alpha$$

d. i. $Ap_{,} = D.\cos.\alpha = (x + y.\cos.\nu + z.\cos.\mu) = x_{,}$. . . (A).

Um $y_{,}$ zu finden, hat man zuerst den Winkel $mAY_{,}$ zu

bestimmen, wo $AY_{,}$ senkrecht auf AX steht; denn man hat

$$y_{,} = D.\cos.\, mAY_{,}.$$

Heisst ϑ der Neigungswinkel der Linie Am gegen die Ebene $XAY_{,}$ oder der Winkel $mAn_{,}$; dann ist

$$\cos.(mAY_{,}) = \cos.\vartheta.\cos.(Y_{,}An_{,});$$

$$\cos.(mAY) = \cos.\vartheta.\cos.(YAn_{,});$$

dividirt man beide Gleichungen mit einander, und bemerkt, dass der Winkel $mAY = \beta$; dann hat man

$$\frac{\cos.(mAY_{,})}{\cos.\beta} = \frac{\cos.(n_{,}AY_{,})}{\cos.(n_{,}AY)} \quad \ldots\ldots \quad (a)$$

Nun ist $n_{,}AY_{,} = (90^{0} - n_{,}AX)$;

daher hat man, anstatt der Gleichung (a):

$$\frac{\cos.(mAY_{,})}{\cos.\beta} = \frac{\sin.(n_{,}AX)}{\cos.(n_{,}AY)} \quad \ldots\ldots \quad (b)$$

Und weil $n_{,}AX = (\nu - n_{,}AY)$;

so wird man aus der Gleichung (b) erhalten:

$$\frac{\cos.(mAY_{,})}{\cos.\beta} = [\sin.\nu - \text{tang}.(n_{,}AY).\cos.\nu]$$

Setzt man $n_{,}AY = \lambda_{,}$; dann hat man

$$\cos.(mAY_{,}) = [\sin.\nu.\cos.\beta - \text{tang}.\lambda_{,}.\cos.\nu.\cos.\beta] \quad \ldots \quad (c)$$

Setzt man den Werth von tg. $\lambda_{,}$ aus der Gleichung (2) Art. 27 in diese Gleichung (c); dann hat man

$$\cos.(mAY_{,}) = \left\{\sin.\nu.\cos.\beta - (\cos.\alpha - \cos.\nu.\cos.\beta).\frac{\cos.\nu}{\sin.\nu}\right\}$$

d. i. $$\cos.(mAY_{,}) = \left(\frac{\cos.\beta - \cos.\alpha.\cos.\nu}{\sin.\nu}\right) \quad \ldots \quad (d)$$

oder $$\cos.(mAY_{,}) = [\cos.\alpha.\,\text{tg}.\mu_{,}].$$

Man hat also

$$y_{,} = \left\{\frac{D.\cos.\beta - D.\cos.\alpha.\cos.\nu}{\sin.\nu}\right\}$$

Setzt man für $D.\cos.\alpha$, $D.\cos.\beta$ die obigen Ausdrücke aus den Gleichungen (2) Art. 26; dann findet man nach einiger Reduktion

$$y_{,} = y.\sin.\nu + z.\left(\frac{\cos.\lambda - \cos.\mu.\cos.\nu}{\sin.\nu}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (B)$$

oder

$$y_{,} = (y.\sin.\nu + z.\tang.\mu'.\cos.\mu) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (C)$$

Mit Hilfe der Gleichungen (A) und (B) wird man den Abstand $mn_{,} = (xy)$ sehr leicht berechnen, wenn man diese gefundenen Werthe für $x_{,}y_{,}$ und den Werth für D in die Gleichung

$$(xy) = \sqrt{D^2 - x_{,}^2 - y_{,}^2}$$

setzt. Man findet nach einigen Reduktionen:

$$(xy) = z.\sqrt{\left\{\sin^2\mu - \left(\frac{\cos.\lambda - \cos.\mu.\cos.\nu}{\sin.\nu}\right)^2\right\}}$$

oder $\quad (xy) = z.\dfrac{\sqrt{[\cos.(\mu+\nu) - \cos.\lambda]\,[\cos.\lambda - \cos.(\mu-\nu)]}}{\sin.\nu}$

Löst man die Unterschiede der Cosinusse unter dem Wurzelzeichen in Produkte auf; so findet man endlich

(1) $(xy) =$

$$\frac{2.z}{\sin.\nu}\sqrt{\left\{\sin.\left(\frac{\lambda+\mu+\nu}{2}\right).\sin.\left(\frac{\lambda+\mu-\nu}{2}\right).\sin.\left(\frac{\lambda+\nu-\mu}{2}\right).\sin.\left(\frac{\mu+\nu-\lambda}{2}\right)\right\}}$$

30. Man hätte den Abstand (xy) des Punktes m von der Ebene xy noch berechnen können, wenn man denselben mittelst des Dreieckes $n\,n_{,}m$ gesucht hätte. Da nemlich

$$(xy) = z.\sin.(mAn_{,}) = z.\sin.\vartheta\,,$$

und da

$$\cos.\vartheta = \frac{\cos.\lambda}{\cos.\lambda'}\,;$$

folglich

$$\sin.\vartheta = \sqrt{\left(1 - \frac{\cos^2\lambda}{\cos^2\lambda'}\right)}\,;$$

so hat man

$$(xy) = z.\sqrt{\left(1 - \frac{\cos^2\lambda}{\cos^2\lambda'}\right)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

Nun ist gemäss Gleichungen (1) Art. 27

$$\text{tg.}\lambda' = \left(\frac{\cos.\mu - \cos.\lambda.\cos.\nu}{\sin.\lambda.\cos.\nu}\right)$$

Aus dieser Gleichung findet man sehr leicht

$$\frac{\cos^2\lambda}{\cos^2\lambda'} = \left(\frac{\cos^2\lambda + \cos^2\mu - 2.\cos.\lambda.\cos.\mu.\cos.\nu}{\sin^2\nu}\right) \ldots\ldots (b)$$

Bringt man diesen Ausdruck (*b*) in die Gleichung (*b*); dann hat man

$$\sin.\vartheta = \frac{\sqrt{(1 - \cos^2 - \cos^2\mu - \cos^2\nu + 2.\cos.\lambda.\cos.\mu.\cos.\nu)}}{\sin.\nu} \ldots (c)$$

Die Reduktion der Grösse unter dem Wurzelzeichen im Ausdrucke (*c*) auf die Form

$$\left\{4.\sin.\left(\frac{\lambda+\mu+\nu}{2}\right).\sin.\left(\frac{\lambda+\mu-\nu}{2}\right).\sin.\left(\frac{\lambda+\nu-\mu}{2}\right).\sin.\left(\frac{\mu+\nu-\lambda}{2}\right)\right\}$$

Nennt man diese Grösse N, und bezeichnet die Neigungswinkel der Achsen AY, AX gegen die respektiven Ebenen XAZ, YAZ mit $\vartheta'\vartheta''$; dann hat man

$$\sin.\vartheta = \frac{N}{\sin.\nu}\,;\quad \sin.\vartheta' = \frac{N}{\sin.\mu}\,;\quad \sin.\vartheta'' = \frac{N}{\sin.\lambda} \ldots (2)$$

Bezeichnet man die Abstände des Punktes m von den Ebenen XAZ und YAZ der vorhergehenden analog mit (xz), (yz); dann hat man:

$$(xy) = \frac{N.z}{\sin.\nu}\,;\quad (xz) = \frac{Ny}{\sin.\mu}\,;\quad (yz) = \frac{N.x}{\sin.\lambda} \ldots (2)$$

31. Um noch die Abstände (x) (y) (z) des Punktes m von den coordinirten Achsen AX, AY, AZ in Funktionen der Coordinaten xyz und der Winkel $\lambda\mu\nu$ zu finden, bezeichne man die Projektionen von Am auf diesen schiefen Achsen mit $x_, y_, z_,$; dann hat man

$$\left.\begin{aligned} x_, &= (x + y.\cos.\nu + z.\cos.\mu) \\ y_, &= (y + z.\cos.\lambda + x.\cos.\nu) \\ z_, &= (z + x.\cos.\mu + y.\cos.\lambda) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (a)$$

Da nun

$$(x) = \sqrt{D^2 - x_,^2}\,;\quad (y) = \sqrt{D^2 - y_,^2}\,;\quad (z) = \sqrt{D^2 - z_,^2} \ldots (b)$$

so braucht man nur, um $(x)(y)(z)$ zu finden, den Werth von

D und von $x, y, z,$ aus den Gleichungen (a) in die Gleichungen (b) zu setzen.

Verrichtet man die gehörigen Substitutionen, so erhält man nach einigen einfachen Reduktionen nachstehende Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}(x)=\sqrt{[y^2\sin^2\nu+z^2\sin^2\mu+2yz.(\cos.\lambda-\cos.\mu.\cos.\nu)]}\\(y)=\sqrt{[x^2\cos^2\nu+z^2\cos^2\lambda+2xz.(\cos.\mu-\cos.\lambda.\cos.\nu)]}\\(z)=\sqrt{[x^2\cos^2\mu+y^2\cos^2\lambda+2xy(\cos.\nu-\cos.\lambda\cos.\mu)]}\end{array}\right\}\ldots(1)$$

32. Die Grössen, welche sich uns im 17. 29. und 31. Art. unter den Formen

$$\left.\begin{array}{l}(\cos.\lambda-\cos.\mu.\cos.\nu)\\(\cos.\mu-\cos.\lambda.\cos.\nu)\\(\cos.\nu-\cos.\lambda.\cos.\mu)\end{array}\right\}$$

dargestellt haben, verdienen eine besondere Aufmerksamkeit, indem sie eine merkwürdige Beziehung gegen die Neigungen der coordinirten Ebenen haben. Um diese näher zu bestimmen, wollen wir uns einen Punkt m (Fig. 14.) auf der Achse AZ vorstellen, dessen Projektion in der Ebene xy der Punkt $n,$ sey; ferner sey $n,p,$ ein aus $n,$ auf AX gefälltes Perpendikel, oder $p,$ die Projektion von m auf AX. Dieses vorausgesetzt, wird der Winkel n,p,m die Neigung der Ebene XAZ gegen YAX seyn. Wir haben oben diesen Neigungswinkel mit (λ) bezeichnet. Wendet man die vierte der Gleichungen (1) Art. 19 auf den gegenwärtigen Fall an; wo

$$n,AX = \mu'; \quad XAZ = \mu;$$

dann hat man

$$\cos.(\lambda) = \frac{\text{tg}.\mu'}{\text{tg}.\mu} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (a)$$

Setzt man in der Gleichung (a) den Werth von tg. μ' aus der Gleichung (1) Art. 27; so hat man

$$\cos.(\lambda) = \left(\frac{\cos.\lambda-\cos.\mu.\cos.\nu}{\sin.\mu.\sin.\nu}\right) \quad \ldots (b)$$

Diese Gleichung gibt den Neigungswinkel zweier coordinirter Ebenen gegen einander durch die Neigungen der coordinirten Achsen. Dieser Gleichung (b) analog findet man noch

zwei andere Gleichungen, um cos. (μ) und cos. (ν) zu bestimmen. Unter den Winkeln $\lambda\mu\nu(\lambda)(\mu)(\nu)$ finden demnach folgende Relationen statt:

$$\left.\begin{array}{l}(\cos.\lambda-\cos.\mu.\cos.\nu) = \sin.\mu.\sin.\nu.\cos.(\lambda)\\ (\cos.\mu-\cos.\lambda.\cos.\nu) = \sin.\lambda.\sin.\nu.\cos.(\mu)\\ (\cos.\nu-\cos.\lambda.\cos.\mu) = \sin.\lambda.\sin.\mu.\cos.(\nu)\end{array}\right\} \quad . \; . \; . \quad (1)$$

Diese Ausdrücke lassen sich anwenden, um einige Ausdrücke der vorigen Art. einfacher darzustellen. So z. B. wird die Gleichung (B) Art. 29 werden

$$y_{,} = y.\sin.\nu + z.\sin.\mu.\cos.(\lambda) \,;$$

und nach einigen Reduktionen findet man

$$(xy) = z.\sqrt{[\sin^2\mu - \sin^2\mu.\cos^2(\lambda)]} = z.\sin.\mu.\sin.(\lambda) \,.$$

33. Die Gleichungen (b) des vorigen Art. oder die Gleichungen (1) sind noch wegen des besondern Umstandes merkwürdig, weil sie alle Vorschriften der gesammten sphärischen Trigonometrie in sich enthält.

Um diess einzusehen, suche man aus diesen Gleichungen die Sinusse der Winkel $(\lambda)(\mu)(\nu)$. Hat N die Bedeutung Art. 30; dann findet man

$$\sin.(\lambda) = \frac{N}{\sin.\mu.\sin.\nu}\,;\ \sin.(\mu) = \frac{N}{\sin.\lambda.\sin.\nu}\,;\ \sin.(\nu) = \frac{N}{\sin.\lambda.\sin.\mu}$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Dividirt man je zwei dieser Gleichungen durch einander; dann erhält man sehr leicht nachstehende Relationen:

$$\frac{\sin.(\lambda)}{\sin.(\mu)} = \frac{\sin.\lambda}{\sin.\mu}\,;\quad \frac{\sin.(\lambda)}{\sin.(\nu)} = \frac{\sin.\lambda}{\sin.\nu}\,;\quad \frac{\sin.(\mu)}{\sin.(\nu)} = \frac{\sin.\mu}{\sin.\nu} \quad . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Durch geschickte Verbindungen der Gleichungen (2) des gegenwärtigen mit den Gleichungen (1) des vorhergehenden Art. kann man noch mannigfaltige Relationen zwischen den Winkeln, welche drei gerade Linien im Raume AX, AY, AZ und je zwei der Ebenen XAY, XAZ, YAZ mit einander machen, entwickeln. Der Inbegriff dieser Relationen macht denjenigen Theil der Geometrie aus, den man die sphärische Trigonometrie nennt. Wir wollen hier die vorzüglichsten dieser Relationen, welche sowohl bei Umformung der in den

vorhergehenden Art. gefundenen Ausdrücke, als auch bei der Auflösung mannigfaltiger Aufgaben über die Ortsbestimmungen der Punkte im Raume mittelst schiefwinklichter Coordinaten gute Dienste leisten können.

34. Indem wir uns an die gewöhnlichen Vorstellungen halten wollen, denke man sich um den Anfangspunkt A mit irgend einem nach Belieben angenommenen Halbmesser eine Kugeloberfläche beschrieben, welche von den drei schiefwinklichten coordinirten Achsen AX, AY, AZ in den Punkten X, Y, Z (Fig. 15. a.) getroffen werde. Die Ebenen XAY, XAZ, YAZ werden diese Kugelfläche in den Linien XY, XZ, YZ welche grösste Kreise sind, durchschneiden. Auf diese Art entsteht ein sphärisches oder Kugel-Dreieck auf dieser Oberfläche. Die Kreisbögen XY, XZ, YZ, welche die Winkel XAY, XAZ, YAZ messen, heisst man die Seiten, und die Neigungen ZXY, XYZ, YZX nennt man die Winkel des sphärischen Dreieckes. Diese letztern stellen die Neigungen der coordinirten Ebenen gegen einander vor; so z. B. wird ZXY der Neigungswinkel der zwei Ebenen XAY und XAZ seyn. Diesen Vorstellungen gemäss, welche man sich von einem sphärischen Dreiecke zu machen hat, ist nun

$$YZ = \lambda;\quad XZ = \mu;\quad XY = \nu;$$
$$YXZ = (\lambda);\quad XYZ = (\mu),\quad XZY = (\nu).$$

Anstatt dieser Bezeichnungen wollen wir die schon gebräuchlichen (Fig. 15. b.) wählen, und für

$$\lambda \quad \mu \quad \nu \quad (\lambda) \quad (\mu) \quad (\nu)$$

respektive setzen

$$a \quad b \quad c \quad A \quad B \quad C.$$

Die Gleichungen (2) Art. 33 geben nun zuerst:

$$\left.\begin{array}{l} \sin. a. \sin. B = \sin. b. \sin. A \\ \sin. a. \sin. C = \sin. c. \sin. A \\ \sin. b. \sin. C = \sin. c. \sin. B \end{array}\right\} \quad . \quad , \quad . \quad . \quad (1)$$

Diese drei Gleichungen lassen sich unter Einem durch

$$\sin. a : \sin. b : \sin. c = \sin. A : \sin. B : \sin. C$$

darstellen, und mit Worten folgendermassen ausdrücken:

In einem jeden sphärischen Dreiecke verhalten sich die Sinusse der Seiten wie die Sinusse der gegenüber liegenden Winkel zu einander. Oder die Verhältnisse

$$\left(\frac{\sin. a}{\sin. A}\right); \quad \left(\frac{\sin. b}{\sin. B}\right); \quad \left(\frac{\sin. c}{\sin. C}\right)$$

sind in jedem sphärischen Dreiecke unter einander gleich. Die Gleichungen (1) Art. 31 geben

$$\left.\begin{aligned} \cos. a &= \cos.b.\cos.c + \sin.b.\sin.c.\cos.A \\ \cos. b &= \cos.a.\cos.c + \sin.a.\sin.c.\cos.B \\ \cos. c &= \cos.a.\cos.b + \sin.a.\sin.b.\cos.C \end{aligned}\right\} \ldots (2)$$

Setzt man die Werthe für $\sin. a$ und $\cos. a$ aus den ersten der Gleichungen (1) (2) in die zweite und dritte der Gleichungen (2), und theilt sie durch $\sin. b. \sin. c$; setzt man ferner die Werthe für $\sin. b$ und $\cos. b$ aus den zweiten der Gleichungen (1) (2) in die erste und dritte der Gleichungen (2); und theilt sie durch $\sin.a.\sin.c$; setzt man endlich für $\sin.c$ und $\cos.c$ die Werthe aus den dritten der Gleichungen (1) (2) in die erste und zweite der Gleichungen (2), und dividirt sie mit $\sin.a.\sin.b$ so werden sich nach einigen leichten Reduktionen folgende sechs Gleichungen ergeben:

$$\left.\begin{aligned} \sin.c.\cot.b &= \cos.c.\cos.A + \sin.A.\cot.B \\ \sin.b.\cot.c &= \cos.b.\cos.A + \sin.A.\cot.C \\ \sin.c.\cot.a &= \cos.c.\cos.B + \sin.B.\cot.A \\ \sin.a.\cot.c &= \cos.a.\cos.B + \sin.B.\cot.C \\ \sin.b.\cot.a &= \cot.b.\cos.C + \sin.C.\cot.A \\ \sin.a.\cot.b &= \cot.a.\cos.C + \sin.C.\cot B \end{aligned}\right\} \ldots (3)$$

Man setze noch in den Gleichungen (2) den Werth von $\cos.a$ in die zweite und dritte, den Werth von $\cos.b$ in die erste und dritte, und endlich den Werth von $\cos.c$ in die erste und zweite Gleichung; so erhält man ein System von sechs Gleichungen. Drückt man in der ersten und zweiten derselben $\sin.b$, $\sin.c$; in der dritten und vierten $\sin.a$, $\sin.c$; und endlich in der fünften und sechsten $\sin.a$, $\sin.b$ durch ABC und respektive durch eine der Seiten a, b, c mittelst der Gleichungen (1) aus; so werden diese sechs Gleichungen in folgende übergehen:

$$\left.\begin{aligned} \sin.A.\cos.B + \cos.A.\sin.B.\cos.c &= \cos.b.\sin.C \\ \sin.A.\cos.C + \cos.A.\sin.C.\cos.b &= \cos.c.\sin.B \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \sin.B.\cos.A + \cos.B.\sin.A.\cos.c &= \cos.a.\sin.C \\ \sin.B.\cos.C + \cos.B.\sin.C.\cos.a &= \cos.c.\sin.A \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \sin.C.\cos.A + \cos.C.\sin.A.\cos.b &= \cos.a.\sin.B \\ \sin.C.\cos.B + \cos.C.\sin.B.\cos.a &= \cos.b.\sin.A \end{aligned}\right\}$$

Durch Elimination findet man auf eine sehr einfache Art aus der ersten und zweiten Gleichung $\cos.b$, $\cos.c$; aus der dritten und vierten $\cos.a$, $\cos.c$; aus der fünften und sechsten endlich $\cos.a$, $\cos.b$. Anstatt dieser Gleichungen fände man also sechs andere, die sich aber offenbar auf nachstehende drei reduziren:

$$\left.\begin{aligned} \cos.A + \cos.B.\cos.C &= \sin.B.\sin.C.\cos.a \\ \cos.B + \cos.A.\cos.C &= \sin.A.\sin.B.\cos.b \\ \cos.C + \cos.A.\cos.B &= \sin.A.\sin.B.\cos.c \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (4)$$

Diese vier Systeme der Gleichungen (1) (2) (3) (4) enthalten alle Auflösungen eines sphärischen Dreieckes.

35. Indem man einen Blick auf die hier entwickelten Gleichungen wirft, nimmt man sogleich gewahr, dass

erstens: in keiner dieser 15 Gleichungen mehr als nur vier von den sechs Grössen $a\,b\,c\,A\,B\,C$ vorkommen; diess ist auch nothwendig, wenn man aus dreien der sechs Stücke, (den drei Seiten und den drei Winkeln) in einem sphärischen Dreiecke die drei übrigen unbekannten Stücke finden will. Die Gleichungen (1) versehen uns mit den Relationen, welche zwischen zwei Seiten und zwei Winkeln, so diesen Seiten gegenüber liegen, statt haben. Die Gleichungen (2) sind die Relationen zwischen drei Seiten und einem Winkel; die Gleichungen (3) enthalten die Relationen zwischen zwei Seiten und zwei Winkeln, davon ein Winkel zwischen den zwei Seiten liegt; endlich sind die Gleichungen (4) Relationen zwischen einer Seite und den drei Winkeln des sphärischen Dreieckes. Die-

se 15 Gleichungen reichen also zur Auflösung aller besondern Fälle hin. Man entdeckt ferner,

zweitens: dass unter den gefundenen Gleichungen eine gewisse Analogie statt findet. Setzt man nemlich in allen 15 Gleichungen

$a = 180^\circ - a_,$; $b = 180^\circ - b_,$; $c = 180^\circ - c_,$;

$A = 180^\circ - A_,$; $B = 180^\circ - B_,$; $C = 180^\circ - C_,$;

so gehen sie in andere über, die in Ansehung ihrer Form den ursprünglichen Gleichungen ähnlich sind. Hält man sie an einander, so wird man gewahren, dass an den Stellen, wo in jenen $abcABC$ stehen, sich in diesen respektive die Grössen $A_,B_,C_,a_,b_,c_,$ zeigen.

Wenn also $A_,=a$; $B_,=b$; $C_,=c$; $a_,=A$, $b_,=B$, $c_,=C$ gesetzt wird, so werden dieselben 15 Gleichungen wieder zum Vorschein kommen. Wir schliessen also hieraus die merkwürdige Eigenschaft der sphärischen Dreiecke, indem wir diese Resultate unter eines zusammen fassen, und folgendermassen durch Worte ausdrücken: *Die Relationen zwischen den Seiten und Winkeln eines sphärischen Dreieckes, welche die respektiven Ergänzungen der Winkel und Seiten eines Andern zu zwei Rechten sind, bleiben in diesem wie in jenem Dreiecke dieselben.*

Es liegt ausser den Grenzen dieses Systemes der analytischen Geometrie, sich in grössere Detaills dieses Gegenstandes einzulassen. Anfänger, welche sich mit diesen Lehren näher bekannt zu machen wünschen, verweise ich auf diejenigen Lehrbücher, in denen die sphärische Trigonometrie sehr umständlich, so wie ihre Anwendung sehr weitläufig vorgetragen wird.

36. Wir wollen auch die verschiedenen Ausdrücke kennen lernen, durch welche man den cubischen Inhalt des Parallelepipedes findet, das die drei coordinirten Ebenen mit denjenigen Ebenen einschliessen, welche durch den Punkt m ihnen parallel gelegt werden.

Behält man die Bezeichnungen der Abstände des Punktes m von den coordinirten Ebenen durch (xy) (xz) (yz) bei; so erhält man, wenn man mit J den Inhalt des Parallelepipedes bezeichnet, dessen Kanten xyz sind:

$$\left.\begin{array}{l} J = x.y.(xy).\sin.\nu\,; \\ J = x.z.(xz).\sin.\mu\,; \\ J = y.z.(yz).\sin.\lambda\,. \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (a)$$

Setzt man in diese Ausdrücke (a) anstatt (xy), (xz), (yz) ihre Werthe aus den Gleichungen (2) Art. 30; so erhält man

$$J = [x.y.z.N] \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Die Gleichungen (1) Art. 33 geben die Ausdrücke für N durch die Winkel $\lambda\mu\nu$; es ist also

$$\left.\begin{array}{l} J = x.y.z.\sin.\mu.\sin.\nu.\sin.(\lambda)\,; \\ J = x.y.z.\sin.\lambda.\sin.\nu.\sin.(\mu)\,; \\ J = x.y.z.\sin.\lambda.\sin.\mu.\sin.(\nu)\,; \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (2)$$

37. Wir wollen den Abstand des Punktes m von der Ebene XAY mit $z_{\prime}$ anstatt mit (xy) bezeichnen; ferner sey der Abstand dieses Perpendikels von der Achse AX, $y_{\prime}$; endlich sey der Abstand des Anfangspunktes von der durch m senkrecht auf AX gelegten Ebene $= x_{\prime}$; oder $x_{\prime}y_{\prime}z_{\prime}$ seyen die drei rechtwinklichten Coordinaten des Punktes m, für welche die eine Kante AX die Achse der $x_{\prime}$; die daran liegende Seitenfläche XAY die Ebene der $x_{\prime}y_{\prime}$; und eine durch A gehende und auf dieser Seitenfläche senkrecht stehende Gerade die Achse der $z_{\prime}$ sey. Da nun

$$\left.\begin{array}{l} x_{\prime} = x + y.\cos.\nu + z.\cos.\mu\,; \\ y_{\prime} = y.\sin.\nu + z.\cos(\lambda).\sin.\mu\,; \\ z_{\prime} = z.\sin.\mu.\sin.(\lambda)\,; \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (1)$$

so findet man aus diesen Gleichungen umgekehrt

$$\left.\begin{array}{l} z = \dfrac{z_{\prime}}{\sin.\mu.\ \sin.(\lambda)}\,; \\ y = \left\{\dfrac{y_{\prime}}{\sin.\ \nu} - z_{\prime}.\cot.(\lambda)\right\}\,; \\ x = \left\{x_{\prime} - y_{\prime}.\cot.\nu + z_{\prime}.\left(\dfrac{\cos.(\lambda).\cos.\nu - \cot.\mu}{\sin.\ (\lambda)}\right)\right\}\,; \end{array}\right\} \ldots (2)$$

Setzt man diese Werthe von xyz in die Ausdrücke (2) des vorhergehenden Art.; so findet man die Ausdrücke, welche den cubischen Inhalt des schiefen Parallelepipedes durch diese rechtwinklichten Coordinaten $x, y, z,$ des Punktes m und die Winkel $\lambda \mu \nu$ oder $(\lambda)(\mu)(\nu)$, welche die Kanten oder Seitenflächen des Parallelepipedes mit einander bilden.

Bestimmung des Ortes eines Punktes in einer Ebene und im Raume durch Polar - Coordinaten.

38. Jede der beiden vorhergehenden Bestimmungsarten der Lage eines Punktes sowohl in einer Ebene als im Raume hat den Ort desselben durch gerade Linien angegeben. Man bedient sich aber auch noch, und vorzüglich in der Astronomie, einer dritten Methode, um den Ort eines Punktes zu bestimmen; und diese besteht darin, dass sie ihn durch eine einzige Gerade und einen Winkel, falls der Punkt in einer Ebene, und zwei Winkel, wenn er im Raume liegt, ausdrückt. Um sich hievon eine deutliche Vorstellung zu verschaffen, denken wir uns eine unveränderliche Ebene, in derselben eine gerade Linie $X'X$ von unveränderlicher Lage, und auf derselben einen fixen Punkt A. Wir wollen erstlich annehmen, der Punkt m liege in dieser Ebene von unveränderlicher Lage. Zieht man die Gerade Am, so ist diese die Entfernung des Punktes m vom fixen Punkte A; und der Punkt m wird vollkommen bestimmt seyn, wenn es die Grösse und Lage dieser Entfernung ist; mit andern Worten: *der Ort des Punktes m ist bestimmt, wenn der Winkel, den Am mit der unveränderlichen $X'X$ macht, nebst der Entfernung Am gegeben ist.* Setzt man also $Am = r$; $mAX = \varphi$; so wird durch die beiden Stücke:

$$r \text{ und } \varphi$$

der Ort des Punktes m in dieser Ebene bestimmt. Diese Bestimmungsstücke des Ortes m nennt man die Polar - Coor-

dinaten dieses Punktes; den Punkt A ihren **Pol**, die fixe Gerade $X'X$ **die Achse** der Polar-Coordinaten, endlich die unveränderliche Ebene **die Ebene der Polar-Coordinaten**. Den Abstand Am nennt man noch insbesondere den **Radius Vektor**. Zieht man in der fixen Ebene durch den Pol A (Fig. 16) die auf $X'X$ senkrechte Linie YY', so sind $X'X$, $Y'Y$ ein System zweier rechtwinklichter coordinirter Achsen. Zieht man mp, mp' auf dieselben perpendikulär, und setzt $Ap = x$, $Ap' = y$, dann hat man im Dreieck Apm

$$Ap : pm : Am = x : y : r = \cos.\varphi : \sin.\varphi : 1$$

und hieraus

$$\left.\begin{array}{l} x = r.\cos.\varphi \\ y = r.\sin.\varphi \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Ist AL eine gerade Linie in der Ebene XAY, welche gegen $X'X$ unter dem Winkel $LAX = \nu$ geneigt ist, dann ist der Winkel $LAm = (\nu - \varphi)$. Zieht man ms perpendikulär auf AL dann hat man im Dreieck Asm

$$Am : ms = 1 : \sin.(\nu - \varphi)$$

und hieraus

$$ms = r.\sin.(\nu - \varphi) \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Ist q' der Punkt, in welchem mp' die AL trifft, und zieht man mq zu AL parallel, so werden Aq und Aq', welche man als schiefwinklichte Coordinaten des Punktes m betrachten kann, durch r und φ sehr leicht ausgedrückt werden können. Man hat nemlich im Dreieck Aqm:

$$Aq : qm : Am = \sin.(\nu - \varphi) : \sin.\varphi : \sin.\nu$$

Setzt man also $Aq = x_{,}$, $qm = y_{,}$, dann ist

$$x_{,} = \frac{r.\sin.(\nu - \varphi)}{\sin.\nu}, \quad y_{,} = \frac{r.\sin.\varphi}{\sin.\nu} \quad \ldots \quad (3)$$

Umgekehrt findet man aus den Gleichungen (1) und (3)

$$\left.\begin{array}{c} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \operatorname{tg}.\varphi = \dfrac{y}{x}; \quad \sin.\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \cos.\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (4)$$

und

$$\left.\begin{aligned} r &= \sqrt{x_{,}^{2}+y_{,}^{2}+2x_{,}y_{,}.\cos.v} \\ \sin.\varphi &= \frac{y_{,}.\sin.v}{\sqrt{x_{,}^{2}+y_{,}^{2}+2x_{,}y_{,}\cos.v}} \\ \cos.\varphi &= \frac{x_{,}+y_{,}.\cos.v}{\sqrt{x_{,}^{2}+y_{,}^{2}+2x_{,}y_{,}.\cos.v}} \\ \text{tg}.\varphi &= \frac{y_{,}.\sin.v}{x_{,}+y_{,}.\cos.v} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

39. Wir wollen itzt den Punkt m ausser der unveränderlichen Ebene annehmen, und von ihm auf dieselbe ein Perpendikel mn (Fig. 13.) herablassen, ferner ziehe man np senkrecht auf AX und verbinde m und n mit A. Der Winkel mAn ist die Neigung der Geraden Am gegen die Ebene, welche als unveränderlich angenommen wird, und welche wir die Polar-Ebene nennen wollen, mAX ist die Neigung der Entfernung Am gegen AX, welche wir die Polar-Achse heissen, nAX ist die Neigung der Projektion von Am in der Polar-Ebene gegen die Polar-Achse. Der Ort des Punktes m wird nun durch die Grösse und Lage der Linie Am bestimmt seyn. Ist $Am=r$, $mAn=\psi$, $nAX=\varphi$, so bestimmen r die Grösse, und die Winkel $\psi\varphi$ die Lage der Geraden Am.

Die drei Stücke

$$r,\ \psi,\ \varphi$$

werden daher den Ort des Punktes m im Raume gegen den Polar-Punkt A, gegen die Polar-Achse AX, und gegen die Polar-Ebene bestimmen. Man nennt diese Stücke überhaupt die Polar-Coordinaten des Punktes m, und die Entfernung r insbesondere den Radius Vektor.

Setzt man den Abstand des Punktes A von der durch den Punkt m senkrecht auf die Polar-Achse gelegten Ebene d. i. $Ap=x$, den Abstand des Perpendikels mn von der Achse AX, oder den Abstand des Punktes m von der Ebene, die durch AX senkrecht auf die Polar-Ebene gelegt wird, d. i. $np=y$, endlich den Abstand des Punktes m von der Polar-

Ebene selbst, d. i. $mn = z$; so kann man xyz als die rechtwinklichten Coordinaten des Punktes m betrachten, deren Anfangspunkt der Polar-Punkt A, deren erste Achse die Polar-Achse AX, deren zweite Achse die auf sie in der Polarebene senkrechte Gerade AY, und deren dritte Achse die auf die Polar-Ebene XAY senkrechte Linie AZ ist.

Es ist nicht schwer, die Abstände des Punktes m von diesen drei Ebenen und Achsen in Funktionen von $r\psi\varphi$, und umgekehrt, diese durch jene auszudrücken.

40. In dem Dreiecke Apn hat man

$$Ap : pn : An = x : y : An = \cos.\varphi : \sin.\varphi : 1$$

woraus

$$\left.\begin{array}{l} x = An.\cos.\varphi \\ y = An.\sin.\varphi \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (a)$$

folgt.

Im Dreiecke Amn hat man ferner

$$An : mn : Am = An : z : r = \cos.\psi : \sin.\psi : 1$$

und hieraus

$$\left.\begin{array}{l} An = r.\cos.\psi \\ z = r.\sin.\varphi \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (b)$$

Setzt man den Werth von An aus der ersten der Gleichungen (b) in die Gleichungen (a), und verbindet mit ihnen die zweite der Gleichungen (b); so erhält man folgendes System von Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} x = r.\cos.\psi.\cos.\varphi \\ y = r.\cos.\psi.\sin.\varphi \\ z = r.\sin.\psi \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Diese Gleichungen, welche die Abstände xyz in Funktionen der Polar-Coordinaten $r\psi\varphi$ geben, geben auch umgekehrt diese in Funktionen von jenen. Erhebt man jeden Theil dieser Gleichungen aufs Quadrat, und addirt sie; so wird man erhalten:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \;;$$

man findet nun leicht:

$$\left.\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \sin.\psi &= \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\;;\quad \cos.\psi = \frac{\sqrt{y^2+x^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \mathrm{tg}.\psi &= \frac{z}{\sqrt{y^2+x^2}} \\ \sin.\varphi &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\;;\quad \cos.\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \mathrm{tg}.\varphi &= \frac{y}{x}\;. \end{aligned}\right\}\;.\;.\;(2)$$

41. Bezeichnet man die Winkel mAX, mAY, mAZ mit $\alpha\beta\gamma$; dann hat man offenbar

$$x = r.\cos.\alpha\;;\quad y = r.\cos.\beta\;;\quad z = r.\cos.\gamma\quad .\;.\;(1)$$

Setzt man in diese drei Gleichungen die Werthe für xyz aus dem vorhergehenden Art.; so findet man

$$\cos.\alpha = \cos.\psi.\cos.\varphi\;;\quad \cos.\beta = \cos.\psi.\sin.\varphi\;;\quad \cos.\gamma = \sin.\psi\;.\;(2)$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich die Winkel $\varphi\psi$ durch die Winkel $\alpha\beta\gamma$ ausdrücken; man erhält:

$$\left.\begin{aligned} \sin.\psi &= \cos.\gamma\;;\quad \cos.\psi = \sin.\gamma \\ \sin.\varphi &= \frac{\cos.\beta}{\sin.\gamma}\;;\quad \cos.\varphi = \frac{\cos.\alpha}{\sin.\gamma} \\ \mathrm{tg}.\varphi &= \frac{\cos.\beta}{\cos.\alpha} \end{aligned}\right\}\;.\;.\;.\;.\;.\;(3)$$

Aus den Gleichungen (1) findet man durch Eliminirung der Grösse r nachstehende Relationen:

$$\left.\begin{aligned} (x.\cos.\beta - y.\cos.\alpha) &= o \\ (x.\cos.\gamma - z.\cos.\alpha) &= o \\ (y.\cos.\gamma - z.\cos.\beta) &= o \end{aligned}\right\}\;.\;.\;.\;.\;(4)$$

oder

$$\left.\begin{aligned} (x.\sin.\varphi - y.\cos.\varphi) &= o \\ (x.\,\mathrm{tg}.\psi - z.\cos.\varphi) &= o \\ (y.\,\mathrm{tg}.\psi - z.\sin.\varphi) &= o \end{aligned}\right\}\;.\;.\;.\;.\;(5)$$

Ausdruck des Abstandes zweier Punkte von einander in einer Ebene und im Raume durch rechtwinklichte, schiefwinklichte und Polar-Coordinaten. Winkel dieser Linien mit den coordinirten Achsen, und Winkel der Fläche des entstehenden Dreiecks mit den coordinirten Ebenen. Inhalt des schiefen Parallelepipedes. Projektionen der Polygone auf eine Linie.

42. Nachdem wir uns in den vorhergehenden Abschnitten mit den Hilfsmitteln versehen haben, um die Lage eines Punktes sowohl in einer Ebene als im Raume zu bestimmen; so wird man den Abstand zweier Punkte mittelst diesen ihre Lage bestimmenden Stücken ausdrücken können.

Wir wollen zuerst die Formeln für den einfachern Fall entwickeln, da die gegebenen Punkte in der Ebene zweier coordinirter Achsen liegen.

Wird die Lage eines jeden der zwei Punkte durch rechtwinklichte Coordinaten bestimmt, und sind AX, AY (Fig. 17) die auf einander senkrechten coordinirten Achsen, gegen welche die Lage der zwei in der Ebene XAY liegenden Punkte $m'm''$ bestimmt wird; so wird der Abstand dieser beiden Punkte von einander d. i. die Entfernung $m'm''$ eine Funktion von den die Lage dieser Punkte bestimmenden Stücken seyn. Also wenn $Ap'=x'$, $Ap''=x''$, $p'm'=y'$, $p''m''=y''$ die rechtwinklichten Coordinaten der Punkte m', m'' sind; so wird die Entfernung $m'm''=f$ eine Funktion der vier Grössen $x'y'x''y''$ seyn. Um sie zu finden, ziehe man durch m' eine zur Achse AX parallele Gerade $m'q$, welche die Ordinate von m'' im Punkte q treffe. Dadurch entsteht ein rechtwinklichtes Dreieck $m'qm''$, und weil man in diesem hat:

$$(m'm'')^2 = (m'q)^2+(m''q)^2 \;;$$

so gibt diese Gleichung, wegen

$$m'q=p'p''=(x''-x')$$

$$m''q=m''p''-p''q=m''p''-m'p'=(y''-y') :$$

$$(m'm'')^2 = [(x''-x')^2+(y''-y')^2] = f^2$$

woraus folgt.

$$f = \sqrt{[(x''-x')^2+(y''-y')^2]} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

Nennt man die Winkel, welche f mit den coordinirten Achsen macht, respektive $\zeta\zeta'$ d. i. setzt man

$$m''m'q = \zeta \text{ und } m'm''q = \zeta' ;$$

so hat man im rechtwinklichten Dreiecke $m'qm''$:

$$m'm'' : m''q : m'q = 1 : \cos.\zeta' : \cos.\zeta$$

d. i.

$$f : (y''-y') : (x''-x') = 1 : \cos.\zeta' : \cos.\zeta .$$

Hieraus ist

$$\cos.\,\zeta = \left(\frac{x''-x'}{f}\right) ;\quad \cos.\zeta' = \left(\frac{y''-y'}{f}\right) \quad . . . (2)$$

Diese Winkel $\zeta\zeta'$, oder auch nur einer derselben, indem $\zeta+\zeta'=90^\circ$, und folglich $\cos.\zeta'=\sin.\zeta$ ist, bestimmen die Lage oder Richtung der Geraden $m'm''$.

43. Wir wollen uns itzt vom Anfangspunkte zu den Punkten $m'm''$ gerade Linien gezogen denken, und den Winkel, den diese Abstände $Am'=D'$, $Am''=D''$ einschliessen, d. i. den Winkel $m'Am''$ mit π bezeichnen; man erhält nun für f einen andern Ausdruck; es ist nemlich im $\triangle m'Am''$

$$f^2 = D'^2 + D''^2 - 2.D'.D''.\cos.\pi .$$

Nun ist $D' = \sqrt{x'^2+y'^2}$; $D'' = \sqrt{x''^2+y''^2}$; folglich hat man

$$f^2 = x'^2+y'^2+x''^2+y''^2-2.\sqrt{x'^2+y'^2}\,.\,\sqrt{x''^2+y''^2}\,.\cos.\pi .$$

Vergleicht man den für f im vorigen Art. gefundenen Ausdruck mit diesem hier; so muss, weil die Entwicklung gibt:

$$f^2 = x'^2+y'^2+x''^2+y''^2-2(x'x''+y'y'') ,$$

und weil beide Ausdrücke für f identisch seyn sollen,

$$\cos.\pi = \frac{x'x''+y'y''}{\sqrt{x'^2+y'^2}.\sqrt{x''^2+y''^2}}$$

hieraus folgt:

$$\sin.\,\pi = \frac{x''y'-x'y''}{\sqrt{x'^2+y'^2}.\sqrt{x''^2+y''^2}} \quad . . (1)$$

und

$$\text{tang.}\,\pi = \frac{x''y'-x'y''}{x'x''+y'y''}$$

Diese Formeln ergeben sich auch noch aus den bekannten Ausdrücken der Trigonometrie. Denn bemerkt man, dass

$$\pi = (m'AX - m''AX);$$

so ist

$$\cos.\pi = \cos.m'AX.\cos.m''AX + \cos.m'AY.\cos.m''AY;$$

$$\sin.\pi = \cos.m'AY.\cos.m''AX - \cos.m'AX.\cos.m''AY;$$

$$\operatorname{tang}.\pi = \frac{\operatorname{tang}.m'AX - \operatorname{tang}.m''AX}{1 + \operatorname{tang}.m'AX.\operatorname{tang}.m''AX}.$$

Bemerkt man nun, dass

$$\cos.m'AX = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}};\ \cos.m'AY = \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}};\ \operatorname{tg}.m'AX = \frac{y'}{x'};$$

$$\cos.m''AX = \frac{x''}{\sqrt{x''^2 + y''^2}};\ \cos.m''AY = \frac{y''}{\sqrt{x''^2 + y''^2}};\ \operatorname{tg}.m''AX = \frac{y''}{x''};$$

und setzt sie in jene drei Ausdrücke, so findet man für cos.π, sin.π, tg.π dieselben Werthe, wie in (1).

43. Wir wollen itzt noch ein paar andere Grössen, deren Werthe von der Lage der zwei Punkte $m'm''$ gegen die coordinirten Achsen abhängen, in Betrachtung ziehen, und sie in Funktionen der Coordinaten $x'y'x''y''$ ausdrücken.

Man denke sich also die durch die Punkte m', m'' gelegte Gerade $m''m'$ gehörig verlängert, und vom Anfangspunkte A auf diese Verlängerung ein Perpendikel Ar herabgelassen. Bezeichnet man den Flächeninhalt des Dreieckes $m'Am''$ mit K, so ist bekanntlich:

$$K = \frac{Am'.Am''.\sin.m'Am''}{2} = \tfrac{1}{2}.D'.D''.\sin.\pi$$

d. i.

$$K = \tfrac{1}{2}(x''.y' - x'.y'') \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Bezeichnet man ferner die Länge des Perpendikels Ar mit P, so hat man, von einer andern Seite,

$$K = \tfrac{1}{2}.m'm''.Ar = \tfrac{1}{2}.f.P$$

d. i.

$$x''y' - x'y'' = f.P;$$

und hieraus ist

$$P = \frac{x''y' - x'y''}{\sqrt{[(x''-x')^2 + (y''-y'^2)]}} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Der Ausdruck für den Flächeninhalt des Dreieckes $m'Am''$ lässt sich noch auf folgende Art sehr leicht finden.

Es ist $\triangle m'Am'' = \triangle m'p'A + \triangle m''qm' + m'p'p''q - \triangle Ap''m''$ oder $K = [\frac{1}{2}x'y' + \frac{1}{2}(x''-x')(y''-y') + (x''-x')y' - \frac{1}{2}x''y'']$

Die Reduktion dieses Ausdruckes führt unmittelbar auf den in (1) gefundenen. Diese Gleichung enthält einen merkwürdigen Lehrsatz der Geometrie, den wir hier daraus entwickeln wollen. Man ziehe durch m' und m'' die zu den Achsen AX und AY (Fig. 18.) parallelen Linien qq', $m''q''$ und np', $m''p''$; so ist

$$(x''y' - x'y'') = (Ap''qq' - Ap'nq'') = m'p'' - m'q''$$

Folglich ist

$$\triangle m'Am'' = \tfrac{1}{2}(m'p'' - m'q'')\ ;$$

d. h. der Flächeninhalt des Dreieckes $m'Am''$ ist gleich dem halben Unterschiede der um den Punkt m' entstehenden Rechtecke. Zieht man nq' und qp'; dann ist

$$\triangle m'Am'' = \triangle p'm'q - \triangle q'm'n\ .$$

In der That hat man wieder:

$$K = \triangle m'Am'' = \left\{\frac{(x''-x').y'}{2} - \frac{(y''-y').x'}{2}\right\}$$

Was den Abstand $Ar = P$ betrifft; so wird dieser $= o$ wenn

$$(x''y' - x'y'') = o$$

d. i. wenn

$$x' : y' = x'' : y''\ .$$

In diesem Falle geht $m'm''$ (Fig. 19.) durch den Anfangspunkt, wenn sie gehörig verlängert wird; und jeder in dieser Richtung angenommene Punkt hat die Eigenschaft, *dass sich seine Coordinaten gegen einander verhalten, wie die paar Coordinaten eines zweiten wo immer in eben dieser Richtung angenommenen Punktes.* Wir werden in der Folge diese als die charakteristische Eigenschaft aller derjenigen Punkte anzusehen haben, welche in einer und derselben Richtung liegen, die durch den Anfangspunkt geht.

In diesem Falle wird zugleich das $\triangle\ m'Am'' = o$, und

daher sind die Rechtecke $m'q''$ und $m'p''$ einander gleich; ein Satz, dessen Beweis schon in der Elementargeometrie gegeben wird.

44. Wird die Lage der Punkte m' und m'' (Fig. 20) durch schiefwinklichte Coordinaten $Ap'=x'$, $p'm'=y'$; $Ap''=x''$, $p''m''=y''$ bestimmt und ist der Coordinatenwinkel $XAY=\nu$; so können: die Entfernung $m'm''=f$, die Winkel, welche f mit den coordinirten Achsen macht (d. i. $m''m'q=\zeta$, $m'm''q=\zeta'$, wenn $m'q$ zu AX parallel gezogen wird), der Winkel $m'Am''=\pi$, der Inhalt des Dreieckes $m'Am''=K$ und die Entfernung oder der Abstand des Anfangspunktes A von der verlängerten Geraden $m''m'$, d. i. $Ar=P$, in Funktionen der Grössen $x'y'x''y''$ und ν ausgedrückt werden.

Im Dreiecke $m'qm''$ hat man zuerst

$$(m'm'')^2=f^2=(m'q)^2+(m''q)^2-2.m'q.m''q.\cos.m'qm''.$$

Nun ist $m'q=p'p''=(x''-x')$; $m''q=m''p''-m'p'=(y''-y')$; und der Winkel $m'qm''=(180^\circ-\nu)$; folglich hat man

$$f=\sqrt{[(x''-x')^2+(y''-y')^2+2(x''-x')(y''-y')\cos.\nu]} \quad . \ (1)$$

Ferner ist in eben diesem Dreiecke:

$$m'm'':m''q:m'q=\sin.(m'qm''):\sin.(m''m'q):\sin.(m'm''q);$$

d. i. $\quad f:(y''-y'):(x''-x')=\sin.\nu:\sin.\zeta:\sin.\zeta'$

Hieraus folgt:

$$\left.\begin{aligned}\sin.\zeta&=\frac{(y''-y')\sin.\nu}{f}\,; & \cos.\zeta&=\frac{(x''-x')-(y''-y').\cos.\nu}{f}\\ \sin.\zeta'&=\frac{(x''-x')\sin.\nu}{f}\,; & \cos.\zeta'&=\frac{(y''-y')-(x''-x').\cos.\nu}{f}\\ \mathrm{tg}.\zeta'&=\frac{(y''-y')\sin.\nu}{(x''-x')-(y''-y')\cos.\nu}\,; & \mathrm{tg}.\zeta'&=\frac{(x''-x').\sin.\nu}{(y''-y')-(x''-x').\sin.\nu}\end{aligned}\right\}$$

In eben diesem Dreiecke $m'Am''$ ist noch:

$$f^2=D'^2+D''^2-2.D'.D''.\cos.\pi\,;$$

setzt man in diese Gleichung

$$\left.\begin{aligned}D'^2&=x'^2+y'^2+2x'y'.\cos.\nu\\ D''^2&=x''^2+y''^2+2x''y''.\cos.\nu\end{aligned}\right\}$$

so erhält man:

$$f^2 = x'^2 + y'^2 + x''^2 + y''^2 + 2(x'y' + x''y'')\cos.\nu - 2D'D''.\cos.\pi$$

Vergleicht man diesen Ausdruck von f^2 mit dem in (1) gefundenen; so gibt die gehörige Entwicklung dieser Gleichung:

$$\cos.\pi = \frac{(x'x''+y'y'') + [(x'y'+x''y'') - (x''-x')(y''-y')].\cos.\nu}{\sqrt{[x'^2+y'^2+2x'y'.\cos.\nu]}\,.\,\sqrt{[x''^2+y''^2+2x''y''.\cos.\nu]}}$$

Nach Reduktion des Zählers wird dieser Ausdruck werden:

$$\cos.\pi = \frac{(x'x''+y'y'') + (x''y'+x'y'').\cos.\nu}{\sqrt{(x'^2+y'^2+2x'y'.\cos.\nu)}.\sqrt{(x''^2+y''^2+2x''y''.\cos.\nu)}} \quad (3)$$

Schreibt man für den Nenner kurz $D'.D''$, so stellt sich der Ausdruck für $\cos.\pi$ noch unter der folgenden Gestalt dar:

$$\cos.\pi = \frac{(x'+y'.\cos.\nu)\,(x''+y''.\cos.\nu) + y'y''.\sin^2\nu}{D'.D''}.$$

Dieser Ausdruck lässt sich indessen noch auf folgende Art finden. Es ist

$$\left.\begin{array}{ll} \sin.m'AX = \dfrac{y'.\sin.\nu}{D'}\,; & \cos.m'AX = \left(\dfrac{x'+y'.\cos.\nu}{D'}\right) \\ \sin.m''AX = \dfrac{y''.\sin.\nu}{D''}\,; & \cos.m''AX = \left(\dfrac{x''+y''.\cos.\nu}{D''}\right) \end{array}\right\}$$

Bemerkt man nun, dass

$$\pi = (m'AX - m''AX);$$

und daher $\cos.\pi = \cos.(m'AX - m''AX)$,

oder entwickelt:

$$\cos.\pi = (\cos.m'AX.\cos.m''AX + \sin.m'AX.\sin.m''AX)$$

und setzt in diese Gleichung die obigen Ausdrücke für die Sinusse und Cosinusse der Winkel $m'AX$, $m''AX$, so erhält man genau die Formel (3). Durch eben dieses Verfahren findet man $\sin.\pi$, es ist nemlich:

$$\sin.\pi = (\sin.m'AX.\cos.m''AX - \cos.m'AX.\sin.m''AX);$$

und daher ist:

$$\sin.\pi = \frac{y'.\sin.\nu.(x''+y''.\cos.\nu) - y''.\sin.\nu(x'+y'.\cos.\nu)}{D'.D''}$$

Nach gehöriger Reduktion des Zählers dieses Ausdruckes findet man:

$$\sin.\pi = \frac{(x''y' - x'y'').\sin.\nu}{\sqrt{(x'^2+y'^2+2x'y'\cos.\nu)}.\sqrt{(x''^2+y''^2+2x''y''.\cos.\nu)}} \quad . . (4)$$

Dividirt man die Ausdrücke (4) und (3) durch einander, dann findet man:

$$\text{tg.}\pi = \frac{(x''y'-x'y'').\sin.v}{(x'x''+y'y'')+(x''y'+x'y'').\cos.v} \quad . \; . \; . \; . \; (5)$$

Wir haben itzt noch P und K in Funktionen von $x'y'x''y''v$ zu finden. In der Absicht bemerken wir erstlich, dass

$$K = (\triangle m'Ap' + \triangle m'qm'' + m'p'p''q - \triangle m''Ap'').$$

Nun ist

$$\triangle m'Ap' = \tfrac{1}{2}.x'.y'.\sin.v\,;$$
$$\triangle m''Ap'' = \tfrac{1}{2}.x''.y''.\sin.v\,;$$
$$m'p'p''q = (x''-x').y'.\sin.v\,;$$
$$\triangle m'qm'' = \tfrac{1}{2}.(x''-x').(y''-y').\sin.v,$$

folglich hat man nach verrichteter Substitution dieser Ausdrücke in die vorhergehende Gleichung:

$$K = [\tfrac{1}{2}.x'.y'.\sin.v + \tfrac{1}{2}(x''-x')(y''-y').\sin.v + (x''-x')y'.\sin.v - \tfrac{1}{2}.x''.y''.\sin.v]\,;$$

Reduzirt man diese Formel, so erhält man endlich:

$$K = \tfrac{1}{2}.(x''.y'-x'.y'').\sin.v \quad . \; . \; . \; . \; . \; (6)$$

Diese Gleichung enthält einen ähnlichen Lehrsatz der Geometrie, als im vorigen Art. angeführt wurde; ja dieser hier ist der verallgemeinerte von jenem.

Bemerkt man also, nachdem die zu AX, AY Parallelen durch m' und m'' gezogen worden sind, dass:

$$nq''Ap' = x'.y''.\sin.v \text{ und } qq'Ap'' = x''.y'.\sin.v\,;$$

so folgt

$$K = \tfrac{1}{2}(p'q' - p'q'') \text{ oder}$$
$$K = \tfrac{1}{2}.(m'p'' - m'q'')$$

d. h. der Inhalt des Dreieckes $m'Am''$ ist gleich dem halben Unterschiede der um m' entstehenden Parallelogramme. Geht die Richtung $m''m'$ durch den Anfangspunkt A; so wird $K = o$; und diese beiden Parallelogramme sind einander gleich. Zieht man $p'q$ und $q'n$, dann ist

$$\triangle m'Am'' = \triangle p'm'q - \triangle q'm'n \;.$$

Der Inhalt des Dreieckes $m'Am''$ kann nun ferner auf noch eine andere Art ausgedrückt werden. Es ist nemlich:

$$K = \tfrac{1}{2}.P.f\,.$$

Diese Gleichung werden wir dazu benützen, um das Per-

pendikel P zu finden. Setzt man in dieselbe die in (1) und (6) für f, K gefundenen Ausdrücke, so erhält man:

$$P = \frac{(x''y'-x'y'').\sin.\nu}{\sqrt{[(x''-x')^2+(y''-y')^2+2(x''-x')(y''-y').\cos.\nu]}} \quad .(7)$$

Dieser Ausdruck verschwindet, wenn $x''y'-x'y''=o$ d. i. wenn

$$x':y' = x'':y''.$$

Hieraus folgt, dass die oben erwähnte Eigenschaft der Proportionalität der Coordinaten aller derjenigen Punkte, welche in einerlei Richtung liegen, sich auch auf schiefwinklichte erstrecke.

Uibrigens ist es einleuchtend, dass aus diesen Formeln (1) . . (7) die in den vorhergehenden Art. gefundenen erhalten werden, wenn man in diesen hier $\nu=90^0$ macht, in welchem Falle nemlich die schiefwinklichten Coordinaten in rechtwinklichte übergehen.

45. Wir wollen itzt annehmen, dass die Lage der beiden Punkte $m'm''$ durch ihre Polar-Coordinaten gegeben werde. Es sey also A (Fig. 17.) der Polarpunkt, AX die Polarachse, und $Am'=r'$, $Am''=r''$; $m'AX=\varphi'$, $m''AX=\varphi''$. Setzt man also die Entfernung $m'm''=f$; so hat man:

$$f=\sqrt{[r'^2+r''^2-2.r'.r''.\cos.(\varphi'-\varphi'')]} \quad . \; . \; . \quad (1)$$

Diese Gleichung, auf welche das zweite Prinzip der ebenen Trigonometrie unmittelbar führt, kann auch noch aus der Geichung (1) Art. 42 hergeleitet werden, indem man darin nur $x'=r'.\cos.\varphi'$, $x''=r''.\cos.\varphi''$; $y'=r'.\sin.\varphi'$, $y''=r''.\sin.\varphi''$ setzt; es ist also

$$f=\sqrt{[(r''.\cos.\varphi''-r'.\cos.\varphi')^2+(r''.\sin.\varphi''-r'.\sin.\varphi')^2]}$$

folglich, nachdem man die Grösse unter dem Wurzelzeichen entwickelt:

$$f=\sqrt{[r'^2+r''^2-2.r'.r''.(\cos.\varphi'.\cos.\varphi''+\sin.\varphi'.\sin.\varphi'')]}.$$

Man sieht, dass dieser Ausdruck mit dem Ausdrucke (1) identisch ist, indem man $(\cos.\varphi'.\cos.\varphi''+\sin.\varphi'.\sin.\varphi'')=\cos.(\varphi'-\varphi'')$ hat. Bringt man eben diese Werthe für $x'y'x''$ in die Formeln des folgenden Art. 43; so hat man, wenn $\zeta\zeta'$

die Winkel sind, welche f mit den coordinirten Achsen AX, AY macht,

$$\left.\begin{aligned} \cos.\zeta &= \left(\frac{r''.\cos.\varphi''-r'.\cos.\varphi'}{f}\right) \\ \cos.\zeta' &= \left(\frac{r''.\sin.\varphi''-r'.\sin.\varphi'}{f}\right) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Endlich hat man noch:

$$K=\tfrac{1}{2}.r'.r''.\sin.(\varphi''-\varphi') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$P=\frac{r'.r''.\sin.(\varphi''-\varphi')}{f} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

46. Wir haben itzt zwei Punkte m' und m'' zu betrachten, davon keiner in der Ebene XAY liegt. Wir wollen annehmen, dass die Lagen derselben durch drei rechtwinklichte Coordinaten bestimmt werden.

Es seyen also (Fig. 21.)

$$Ap'=x', \quad p'n'=y', \quad n'm'=z' \;;$$
$$Ap''=x'', \quad p''n''=y'', \quad n''m''=z'',$$

die rechtwinklichten Coordinaten der Punkte m', m'', und ihre Entfernung von einander, $m'm''=f$; so wird der Ausdruck von f eine Funktion von $x'y'z'x''y''z''$ seyn. Man ziehe, um sie zu finden, durch den Punkt n' die zur Achse der x parallele Gerade $n's$, welche die zweite Ordinate $n''p''$ des Punktes m'' in s trifft. Dann hat man

$$(n'n'')^2=(n's)^2+(n''s)^2 .$$

Nun ist $$n's=p'p''=(x''-x') ;$$

$$n''s=(n''p''-n'p')=y''-y' ;$$

folglich hat man

$$(n'n'')^2=[(x''-x')^2+(y''-y')^2]$$

Zieht man in der auf die Ebene xy senkrecht stehenden Ebene $m'n'n''m''$ zu $n'n''$ parallel die Gerade $m'q$, welche die dritte Coordinate $m''n''$ des Punktes m'' in q trifft; so hat man in dem bei q gleichfalls rechtwinklichten Dreiecke $m'qm''$:

$$(m'm'')^2=(m'q)^2+(qm'')^2=(n'n'')^2+(qm'')^2 .$$

Nun ist $qm''=m''n''-m'n'=(z''-z')$; folglich hat man, mit Rücksichtnehmung auf den für $(n'n'')^2$ bereits gefundenen Ausdruck

$$f^2 = (x''-x')^2+(y''-y')^2+(z''-z')^2,$$

und hieraus

$$f = \sqrt{[(x''-x')^2+(y''-y')^2+(z''-z')^2]} \quad . \quad . \quad (1)$$

Da die Punkte n' und n'' die Projektionen der Punkte m', m'' in der Ebene xy; so wie p', p'' die Projektionen von denselben Punkten auf der Achse der x sind, so kann man die Linie $n'n''$ die Projektion der Linie $m'm''$ in der Ebene xy, und die Linie $p'p''$ die Projektion von $m'm''$ auf der Achse der x nennen. Auf ähnliche Art erhält man die Projektionen der Linie $m'm''$ in den Ebenen xz und yz; so wie auf den Achsen der y und z.

Nennt man die erstern respektive $g g' g''$, und die andern $h h' h''$; so hat man in den Dreiecken, welche diese Projektionen von f in den Ebenen xy, xz, yz und den durch ihre Endpunkte zu den Achsen parallel gezogenen Geraden bilden, offenbar:

$$\left.\begin{aligned} g &= \sqrt{[)x''-x')^2+(y''-y')^2]} \\ g' &= \sqrt{[(x''-x')^2+(z''-z')^2]} \\ g'' &= \sqrt{[(y''-y')^2+(z''-z')^2]} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

In den Dreiecken, welche die Projektionen von f auf den Achsen mit f bilden, indem man sich durch den einen Punkt z. B. m' zu den coordinirten Achsen parallel gezogene gerade Linien vorstellt, auf welche vom Punkte m'' Perpendikel herabgelassen werden, (wie diess in der Figur 22. dargestellt wird, in welcher $m'X$, $m'Y$, $m'Z$ diese parallelen Geraden sind, und $m''t$ eines dieser von m'' auf sie herabgelassenen Perpendikel ist), hat man nun die Verhältnisse:

$f : x''-x' = 1 : \cos.\zeta$; $f : y''-y' = 1 : \cos.\zeta'$; $f : z''-z' = 1 : \cos.\zeta$;
da z. B. im Dreiecke $m'tm''$, wo der Winkel $m''m'X = \zeta$,

$$m'm'' : m't = 1 : \cos.(m''m'X),$$

dass nun $m't = (x''-x')$, ist sehr leicht einzusehen, wenn man sich durch die Punkte m', m' Ebenen gelegt denkt, welche zur Ebene YAZ parallel sind, oder auf der Achse AX senkrecht stehen; indem sodann $m''t$ in der durch m'' so gelegten Ebene liegt: zwischen beiden einander parallelen Ebenen liegt

nun ein Stück der Achse AX, das $= x'' - x'$ und zugleich dem Stücke $m't$ gleich ist. Man hat also

$$f : x'' - x' = 1 : \cos.\zeta,$$

und hieraus ist

$$\cos.\ \zeta = \left(\frac{x'' - x'}{f}\right).$$

Auf ähnliche Art finden die andern beiden Proportionen statt. Die Winkel $\zeta\zeta'\zeta''$, welche die Gerade $m'm''$ im Raume mit den coordinirten Achsen AX, AY, YZ macht, werden demnach durch folgende Ausdrücke bestimmt:

$$\cos.\ \zeta = \left(\frac{x'' - x'}{f}\right);\quad \cos.\zeta' = \left(\frac{y'' - y'}{f}\right);\quad \cos.\zeta'' = \left(\frac{z'' - z'}{f}\right) \ldots (3)$$

Da nun $(x'' - x') = h$, $(y'' - y') = h'$; $(z'' - z') = h''$; so hat man

$$h = f.\cos.\zeta;\ h' = f.\cos.\zeta';\ h'' = f.\cos.\zeta'' \quad .\ .\ (4)$$

Und da also $g = \sqrt{h^2 + h'^2}$; $g' = \sqrt{h^2 + h''^2}$; $g'' = \sqrt{h'^2 + h''^2}$ so giebt die Substitution der Werthe für $h\,h'h''$ aus (4) in diese Ausdrücke, mit Berücksichtigung der Gleichung:

$$\cos.^2\zeta + \cos.^2\zeta' + \cos.^2\zeta'' = 1,$$

$$g = f.\sin.\zeta'';\ g' = f.\sin.\zeta';\ g'' = f.\sin.\zeta \quad .\ .\ .\ (5)$$

Man kann bemerken, dass $90° - \zeta''$, $90° - \zeta'$, $90° - \zeta$ respektive die Winkel seyen, unter denen die Gerade $m'm''$ gegen die Ebenen xy, xz, yz geneigt sind; nennt man sie respektive $\vartheta\vartheta'\vartheta''$; so hat man

$$g = f.\cos.\vartheta;\ g' = f'.\cos.\vartheta';\ g'' = f''.\cos.\vartheta'' \quad .\ .\ (6)$$

So wie man g durch h ausgedrückt hat, eben so lässt sich h durch g ausdrücken; man findet so:

$$\left.\begin{aligned} h &= \sqrt{\tfrac{1}{2}.(g^2 + g'^2 - g''^2)} \\ h' &= \sqrt{\tfrac{1}{2}.(g^2 + g''^2 - g'^2)} \\ h'' &= \sqrt{\tfrac{1}{2}.(g'^2 + g''^2 - g^2)} \end{aligned}\right\} \quad .\ .\ .\ .\ (4)$$

Aus diesen Gleichungen folgt die Relation:

$$(g^2 + g'^2 + g''^2)^{\frac{1}{2}} = (h^2 + h'^2 + h''^2)^{\frac{1}{2}}.\sqrt{2} = f.\sqrt{2}$$

und hieraus ferner:

$$(\cos.^2\vartheta + \cos.^2\vartheta' + \cos.^2\vartheta'') = 2.$$

47. Auf ähnliche Art, wie im Art. 43, werden wir nun den Winkel $m'Am''=\pi$ (Fig. 23.) bestimmen, den die Entfernungen $Am'=D'$, $Am''=D''$ der Punkte m', m'' vom Anfangspunkte A daselbst einschliessen. Im Dreiecke $m'Am''$ ist nemlich:

$$J^2=D'^2+D''^2-2.D'.D''.\cos.\pi\ ;$$

nun ist

$$D'=\sqrt{[x'^2+y'^2+z'^2]}\ ,\quad D''=\sqrt{[x''^2+y''^2+z''^2]}$$
$$J=\sqrt{[(x''-x')^2+(y''-y')^2+(z''-z')^2]}$$

Setzt man diese Werthe in jene Gleichung, so erhält man nach gehöriger Entwicklung und Reduktion derselben:

$$\cos.\pi=\frac{x'x''+y'y''+z'z''}{\sqrt{(x'^2+y'^2+z'^2)}.\sqrt{(x''^2+y''^2+z''^2)}}\ .\ .\ .\ .\ .\ (1)$$

Ich mache hier auf eine sehr merkwürdige Relation zwischen dem Winkel π und denjenigen Winkeln aufmerksam, welche die Linien Am', Am'' mit den coordinirten Achsen bilden. Schreibt man nemlich den gefundenen Ausdruck (1) unter der Form:

$$\cos.\pi=\frac{x'}{D'}.\frac{x''}{D''}+\frac{y'}{D'}.\frac{y''}{D''}+\frac{z'}{D'}.\frac{z''}{D''}$$

und bemerkt, dass

$$\frac{x'}{D'}=\cos.\alpha',\quad \frac{y'}{D'}=\cos.\beta',\quad \frac{z'}{D'}=\cos.\gamma'\ ;$$
$$\frac{x''}{D''}=\cos.\alpha'';\quad \frac{y''}{D''}=\cos.\beta'',\quad \frac{z''}{D''}=\cos.\gamma'';$$

wo $\alpha'\beta'\gamma'$ und $\alpha''\beta''\gamma''$ die Winkel sind, welche $D'D''$ respektive mit den coordinirten Achsen xyz machen; so giebt die Substitution:

$$\cos.\pi=(\cos.\alpha'.\cos.\alpha''+\cos.\beta'.\cos.\beta''+\cos.\gamma'.\cos.\gamma'')\ .\ .\ (2)$$

Im Falle, als $\pi=90^0$, d. i. als die Geraden $D'D''$ auf einander senkrecht stehen, ist, wegen $\cos.\pi=o$,

$$x'x''+y'y''+z'z''=o$$

oder

$$\cos.\alpha'.\cos.\alpha''+\cos.\beta'.\cos.\beta''+\cos.\gamma'.\cos.\gamma''=o$$

Wird der in (1) gefundene Werth von $\cos.\pi$ in die Gleichung:

$$\sin.\pi = \sqrt{1-\cos.^2\pi}$$

gesetzt; dann findet man:

$$\sin.\pi = \frac{\sqrt{[(x''y'-x'y'')^2+(x''z'-x'z'')^2+(y'z''-y''z')^2]}}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,.\,\sqrt{x''^2+y''^2+z''^2}} \quad . \; . \; (3)$$

Der Inhalt K des Dreieckes $m'Am''$ ist ferner:

$$K = \tfrac{1}{2}.D'.D''.\sin.\pi$$

das ist

$$K = \tfrac{1}{2}.\sqrt{[(x''y'-x'y'')^2+(x''z'-x'z'')^2+(y'z''-y''z')^2]} \quad . \; (4)$$

Von einer andern Seite findet man den Inhalt dieses Dreieckes, wenn man seine Basis J mit dem vom Anfangspunkte A auf ihre Verlängerung herabgelassenen Perpendikel P multiplizirt, und durch 2 dividirt.

Die Gleichung

$$K = \tfrac{1}{2}.P.f$$

giebt also

$$P = \frac{2K}{f}$$

oder

$$P = \frac{\sqrt{[x''y'-x'y'')^2+(x''z'-x'z'')^2+(y'z''-y''z')^2]}}{\sqrt{[(x''-x')^2+(y''-y')^2+(z''-z'^2]}} \quad . \; . \; (5)$$

Im Falle, als die Verlängerung der Geraden $m''m'$ durch den Anfangspunkt A geht, ist $P = o$ oder

$$(x''y'-x'y'')^2+(x''z'-x'z'')^2+(y'z''-y''z')^2 = o$$

Eine Summe von Quadraten kann nur damals gleich Null seyn, wenn jedes einzelne Quadrat für sich $= 0$ ist. Diese Schlussart, auf die ich hier aufmerksam mache, wird in der Folge oft angewandt werden. Für den gegenwärtigen Fall folgt also hieraus, dass

$$x''y'-x'y'' = o\,; \quad x''z'-x'z'' = o\,; \quad y'z''-y''z' = o\,.$$

Alle diese drei Bedingungsgleichungen kann man unter Einem in nachstehender zusammenfassen:

$$x':y':z' = x'':y'':z''\,.$$

Es folgt hieraus die merkwürdige und charakteristische Eigenschaft aller derjenigen Punkte, die in einer und derselben Richtung liegen, welche durch den Anfangspunkt geht, dass

die drei Coordinaten des einen Punktes sich eben so gegen einander verhalten, wie die gleichnamigen Coordinaten eines jeden andern Punktes dieser Richtung.

Im Art. 43 haben wir gesehen, dass $\frac{1}{2}.(x''y'-x'y'')$ der Ausdruck für den Flächeninhalt desjenigen Dreieckes ist, dessen Ecken zwei Punkte $(x'y')$ und $(x''y'')$, nebst dem Anfangspunkte sind, oder das von Seiten gebildet wird, welche die Projektionen der Seiten des Dreieckes $m'Am''$ in der Ebene xy sind. Dieses Dreieck $n'An''$ heisst die Projektion des Dreieckes $m'Am''$ in der Ebene xy.

Eben so sind die Ausdrücke $\frac{1}{2}.(x''z'-x'z'')$ und $\frac{1}{2}.(y'z''-y'z'')$ die Flächeninhalte der Projektionen desselben Dreieckes $m'Am''$ in den Ebenen xz und yz.

Nennt man sie $k\,k'k''$, d. i. setzt man

$$\left.\begin{aligned} k &= \tfrac{1}{2}.(x''y'-x'y'') \\ k' &= \tfrac{1}{2}.(x''z'-x'z'') \\ k'' &= \tfrac{1}{2}.(y''z'-y'z'') \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (6)$$

dann hat man

$$K = \sqrt{k^2+k'^2+k''^2} \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

d. h. das Quadrat des Dreieckes $m'Am''$ ist gleich der Summe der Quadrate seiner Projektionen, ein Satz, der noch in einer grössern Allgemeinheit ausgesprochen werden kann, wie in der Folge gezeigt werden wird.

Multiplizirt man die drei Gleichungen (6) respektive mit $-z'$, y', x'; und addirt sie hierauf; so findet man:

$$\left.\begin{aligned} &k.z' = k'.y'+k''.x'\ ; \ . \\ &\text{eben so ist} \\ &k.z'' = k'.y''+k''.x''\ ; \ . \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (8)$$

Nennt man $\varepsilon\,\varepsilon'\varepsilon''$ die Winkel, welche die Projektionen von $D'D''$ in den Ebenen xy, xz, yz mit einander machen; dann hat man, vermöge Gleichung (1) Art. 42:

$$\left.\begin{aligned}
\text{cs.}\varepsilon &= \frac{x'x''+y'y''}{\sqrt{x'^2+y'^2}\cdot\sqrt{x''^2+y''^2}}\;;\; \text{sin.}\varepsilon = \frac{x''y'-x'y''}{\sqrt{x'^2+y'^2}\cdot\sqrt{x''^2+y''^2}} \\
\text{cs.}\varepsilon' &= \frac{x'x''+z'z''}{\sqrt{x'^2+z'^2}\cdot\sqrt{x''^2+z''^2}}\;;\; \text{sin.}\varepsilon' = \frac{x''z'-x'z''}{\sqrt{x'^2+z'^2}\cdot\sqrt{x''^2+z''^2}} \\
\text{cs.}\varepsilon'' &= \frac{y'y''+z'z''}{\sqrt{y'^2+z'^2}\cdot\sqrt{y''^2+z''^2}}\;;\; \text{sin.}\varepsilon'' = \frac{y'z''-y''z'}{\sqrt{y'^2+z'^2}\cdot\sqrt{y''^2+z''^2}} \\
\text{tg.}\varepsilon &= \frac{x''y'-x'y''}{x'x''+y'y''}\;;\; \text{tg.}\varepsilon' = \frac{x''z'-x'z''}{x'x''+z'z''}\;;\; \text{tg.}\varepsilon'' = \frac{y'z''-y''z'}{y'y''+z'z''}
\end{aligned}\right\}(9)$$

Denkt man sich auf die Verlängerungen der Projektionen von $m'm''$ in den Ebenen xy, xz, yz vom Anfangspunkte A Perpendikel herabgelassen, deren Längen wir mit $pp'p''$ bezeichnen wollen; so hat man

$$k = \tfrac{1}{2}.p.g;\quad k' = \tfrac{1}{2}.p'.g';\quad k'' = \tfrac{1}{2}.p''.g''.$$

Hieraus ergiebt sich also

$$\left.\begin{aligned}
p &= \frac{x''y'-x'y''}{\sqrt{[(x''-x')^2+(y''-y')^2]}} \\
p' &= \frac{x''z'-x'z''}{\sqrt{[(x''-x')^2+(z''-z')^2]}} \\
p'' &= \frac{y'z''-y''z'}{\sqrt{[(y''-y')^2+(z''-z')^2]}}
\end{aligned}\right\}\;\ldots\;(10)$$

Man ersieht nun hieraus die Art und Weise, um alle Grössen, die aus den Beziehungen zweier Punkte gegen ein rechtwinklichtes Coordinatensystem entspringen, in Funktionen der Coordinaten dieser Punkte auszudrücken.

48. Bisher haben wir das Dreieck $m'Am''$ seiner Grösse nach betrachtet, und wir haben die Funktionen kennen gelernt, durch welche sich die Basis $m'm''=f$, der Scheitelwinkel $m'Am''=\pi$, u. der Flächeninhalt sowohl des Dreieckes $m'Am''$ selbst, als auch seiner Projektionen in den coordinirten Ebenen ausgedrückt werden können. Aber auf seine Lage, oder vielmehr auf die Lage der Ebene, in welcher dieses Dreieck liegt, ist bisher noch keine Rücksicht genommen worden.

Es ist also auch noch nöthig, die Funktionen zu suchen, durch die sich die Winkel ausdrücken lassen, welche die Ebene des Dreieckes mit den coordinirten Ebenen oder Achsen macht. Wir wollen nun zuerst diejenigen Winkel betrachten, welche die Durchschnittslinie der Ebene des Dreieckes in den coordinirten Ebenen mit den Achsen der xyz bilden.

Es sey also AQ (Fig. 24.) der Durchschnitt der Ebene des Dreieckes $m'Am''$ mit der coordinirten Ebene XAZ; und eben so AR die Durchschnittslinie derselben Ebene mit der Ebene YAZ. Ferner seyen Ap', $p'n'$, $n'm'$ die drei Coordinaten des Punktes m'. Man ziehe $n's$ zu AX, und sr zu AZ parallel, bis sie die AR im Punkte r trifft. Eben so ziehe man $p'q$ zu AZ parallel, bis sie die AQ im Punkte q schneidet. Ferner ziehe man qt zu $p'n'$ parallel, und mache $qt = p'n'$. Verbindet man itzt die Punkte r und m', so wie s und t; so sind, wie man leicht einsehen wird, $rm'ts$ und $n'tqp'$ zwei Parallellogramme. Denn die zwei auf XAY senkrecht stehenden, und folglich unter einander parallelen Ebenen $rstm'$ und QAX werden von einer dritten Ebene QAR geschnitten; folglich wird Aq zu rm' parallel seyn; und weil auch st und Aq einander parallel sind, so sind es auch die Linien rm' und st, und folglich ist $rstm'$ ein Parallellogramm.

Man hat also

$$rs = m't \text{ und } p'q = n't;$$

daher ist $$rs + p'q = m't + n't;$$

und da $$\left.\begin{aligned} rs &= y'.\text{tang.}(YAR) \\ p'q &= x'.\text{tang.}(XAQ) \end{aligned}\right\}$$

so ist $$z' = y'.\text{tg.}(YAR) + x'.\text{tg.}(XAQ) \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

Da nun auch m'' ein Punkt dieser Ebene ist; so hat man eben so

$$z'' = y''.\text{tg.}(YAR) + x''.\text{tg.}(XAQ) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

Verbindet man diese beiden Gleichungen mit einander; so kann man aus ihnen die Grössen tg.(XAQ) und tg.(YAR) finden. Die Rechnung gibt

$$\left.\begin{array}{l}\text{tg.}(XAQ) = \dfrac{y'z''-y''z'}{x''y'-x'y''} \\ \text{tg.}(YAR) = \dfrac{x''z'-x'z''}{x''y'-x'y''}\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Setzt man in diese Ausdrücke für die Zähler und Nenner $kk'k''$ (aus den Gl. (6)); dann hat man

$$\left.\begin{array}{l}\text{tg.}(XAQ) = \dfrac{k''}{k} \\ \text{tg.}(YAR) = \dfrac{k'}{k}\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Die Gleichungen (a) und (b) werden durch diese Substitution:

$$\left.\begin{array}{l}k.z' = k'.y'+k''.x' \\ k.z'' = k'.y''+k''.x''\end{array}\right\}$$

Diese zwei Gleichungen stimmen ganz mit den Gleichungen (8) des vorigen Art. überein.

Diese Betrachtungen lehren ferner noch, dass es eine allgemeine und charakteristische Eigenschaft aller derjenigen Punkte ist, die in der Ebene des Dreieckes $m'Am''$ liegen, dass die Werthe ihrer Coordinaten die Gleichung

$$k.z = k'.y+k''.x \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

identisch machen, wenn xyz die Coordinaten eines solchen Punktes dieser Ebene sind.

Wenn nun auf ähnliche Art AS die Durchschnittslinie der Ebene des Dreieckes $m'Am''$ mit der Ebene XAY ist; so ist, den vorhergehenden zwei Formeln (1) analog

$$\text{tang.}(XAS) = \frac{y'z''-y''z'}{x''z'-x'z''} = \frac{k''}{k'} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Nachdem man nun die Winkel kennt, welche die Durchschnittslinien der Ebene des Dreieckes $m'Am''$ in den coordinirten Ebenen xy, xz, yz mit den coordinirten Achsen machen; so wird man hieraus, mit Hilfe der oben gefundenen Formeln der sphärischen Trigonometrie sehr leicht auch die Ausdrücke für die Neigungswinkel dieser Ebene $m'Am''$ gegen die coordinirten Ebenen finden.

Man stelle sich nemlich durch den Anfangspunkt A eine auf die Ebene $m'Am''$ (Fig. 25.) senkrecht stehende gerade Linie AS gelegt vor; die Durchschnittslinie der Ebene des Dreieckes $m'Am''$ mit der Ebene xy sey AN, so sind SAZ, SAY, SAX respektive die Neigungswinkel, unter welchen die Ebenen xy, xz, yz von der Ebene des Dreieckes geschnitten werden; wir wollen diese Winkel nach der Ordnung mit $\delta\,\delta'\,\delta''$ bezeichnen. Denkt man sich nun um den Mittelpunkt A eine Kugelfläche, und sind Y, N, S die Punkte, in welchen diese von den Geraden AY, AN, AS getroffen wird; so entsteht, durch Verbindung der drei Punkte der Kugelfläche mittelst der grössten Kreise YN, YS, NS ein sphärisches Dreieck NYS, in welchem $NS = 90^0$. Man hat nun, nach Gleichung (2) Art. 34,

worin anstatt:	a	b	c	A,
hier zu setzen ist:	SY	YN	90^0	N,

die Gleichung:

$$\cos.(SAY) = \sin.(YAN).\cos.N.$$

Aus gleichem Grunde hat man

$$\cos.(SAX) = \sin.(XAN).\cos.N.$$

Werden diese beiden Gleichungen durch einander dividirt; alsdann erhält man:

$$\frac{\cos.(SAX)}{\cos.(SAY)} = \frac{\sin.(XAN)}{\sin.(YAN)} = \text{tg}.(XAN),$$

d. i. $$\frac{\cos.\delta''}{\cos.\delta'} = \text{tg}.(XAN) = \frac{k''}{k'}$$

Diese Betrachtungen führen nun auf das sehr merkwürdige Resultat, dass

$$\cos.\delta : \cos.\delta' : \cos.\delta'' = k : k' : k'' \quad . \; . \; . \; . \; (5)$$

Wir wollen nun den weitern Folgerungen hieraus nachgehen. Da also $k''.\cos.\delta = k.\cos.\delta''$ und $k''^2\cos.^2\delta = k^2\cos.^2\delta''$;

$$k'.\cos.\delta = k.\cos.\delta' \; . \; . \; . \; k'^2\cos.^2\delta = k^2\cos.^2\delta';$$

$$k.\cos.\delta = k.\cos.\delta \; . \; . \; . \; k^2\cos.^2\delta = k^2\cos.^2\delta;$$

so gibt die Addition dieser drei Gleichungen:

$$(k^2+k'^2+k''^2).\cos.^2\delta = k^2(\cos.^2\delta+\cos.^2\delta'+\cos.^2\delta'').$$

Nun ist

$$\cos^2\delta+\cos^2\delta'+\cos^2\delta''=\cos^2(SAZ)+\cos^2(SAY)+\cos^2(SAX)=1;$$

folglich ist

$$K^2\cos^2\delta = k^2$$

das ist

$$K.\cos.\delta = k \quad \text{und} \quad \cos.\delta = \frac{k}{K}.$$

Aus (5) werden nun auch $\cos.\delta'$ und $\cos.\delta''$ gefunden, so dass man nachstehendes System von drei Gleichungen erhalten wird:

$$\left.\begin{array}{lll} k = K.\cos.\delta; & \text{und} & \cos.\delta = \frac{k}{K} \\ k' = K.\cos.\delta'; & .. & \cos.\delta' = \frac{k'}{K} \\ k'' = K.\cos.\delta'': & .. & \cos.\delta'' = \frac{k''}{K} \end{array}\right\} \quad .\ .\ (6)$$

Vergleicht man diese drei Gleichungen mit den Gleichungen (6) Art. 46; so wird man finden, dass sie etwas Gemeinsames haben. An der Stelle von k, k', k'', K, δ, δ', δ'', stehen dort $g g' g'' f \vartheta \vartheta' \vartheta''$. Der sehr merkwürdige und nützliche Satz, den diese beiden Systeme von Gleichungen enthalten, kann also auf folgende Art ausgesprochen werden:

Die Projektion einer geraden Linie (von bestimmter Länge) oder eines Dreieckes in einer gegebenen Ebene ist gleich der Länge oder dem Flächeninhalte des Dreieckes multiplizirt mit dem Cosinus des Neigungswinkels der geraden Linie oder der Ebene des Dreieckes gegen die Projektions-Ebene.

49. Werden die Orte der Punkte m' und m'' durch schiefwinklichte Coordinaten gegeben, so ist es auch in diesem Falle nicht schwer, die Entfernung dieser beiden Punkte von einander zu bestimmen, d. i. in einer Funktion der gegebenen Coordinaten auszudrücken.

Es seyen nun $\lambda\mu\nu$ (Fig. 26.) die Winkel, welche die Achsen der y, z; der x, z; und der x, y mit einander machen. Es seyen ferner:

$Ap'=x'$, $p'n'=y'$, $m'n'=z'$; $Ap''=x''$, $p''n''=y''$, $m''n''=z''$; die schiefwinklichten Coordinaten, durch welche die Lagen der Punkte m', m'' bestimmt werden.

Man stelle sich nun durch die Punkte m', m'' Ebenen gelegt vor, welche zu den drei coordinirten Ebenen parallel sind. Auf diese Art entsteht um $m'm''$ ein schiefwinklichtes Parallelepiped. Nennt man nun $ss's''$ die drei an einander liegenden und das Eck m' bildenden Seiten dieses Parallellepipedes, welche folglich den drei Achsen AX, AY, AZ parallel sind; so wird $m'm''=f$ seine Diagonale seyn, und man wird haben, (gemäss Art. 23):

$$f=\sqrt{(s^2+s'^2+s''^2+2.s'.s''.\cos.\lambda+2.s.s''.\cos.\mu+2.s.s'.\cos.\nu)};$$

nun ist

$$s=(x''-x');\ s'=(y''-y');\ s''=(z''-z');$$

folglich hat man:

$$f=\sqrt{\left\{\begin{array}{l}(x''-x')^2+(y''-y')^2+(z''-z')^2\\ +2.(y''-y')(z''-z').\cos.\lambda+2.(x''-x')(z''-z')\cos.\mu\\ +2.(x''-x')(y''-y').\cos.\nu\end{array}\right\}}\ ..\ (1)$$

Nennt man $D'D''$ die Entfernungen der Punkte m', m'' vom Anfangspunkte A; so ist;

$$\left.\begin{array}{l}D'=\sqrt{(x'^2+y'^2+z'^2+2y'z'.\cos.\lambda+2x'z'.\cos.\mu+2x'y'.\cos.\nu)}\\ D''=\sqrt{(x''^2+y''^2+z''^2+2y''z''.\cos.\lambda+2x''z''.\cos.\mu+2x''y''.\cos.\nu)}\end{array}\right\}(2)$$

Nachstehende sehr einfache Methode führt unmittelbar auf den Ausdruck für $\cos.\pi$.

Bezeichnet man mit $\alpha'\beta'\gamma'$, $\alpha''\beta''\gamma''$ die Winkel, welche $D'D''$ mit den Achsen xyz machen; so sind die Projektionen der Coordinaten $x'y'z'$ des Punktes m' auf der Geraden D', respektive

$$x'.\cos.\alpha';\ \ y'.\cos.\beta';\ \ z'.\cos.\gamma'.$$

Nun ist, vermöge Gleichung (1) Art. 15:

$$D'=(x'.\cos.\alpha'+y'.\cos.\beta'+z'.\cos.\gamma'),$$

Aber die Projektion von D' auf der Achse der x ist:

$$D'.\cos.\alpha'$$

und die Projektionen von $x'y'z'$ auf der Achse der x sind:

$$x';\ \ y'.\cos.\nu;\ \ z'.\cos.\mu.$$

Man hat also:

$$\left.\begin{aligned} & D'.\cos.\alpha' = (x' + y'.\cos.\nu + z'.\cos.\mu) \\ \text{eben so ist } & D'.\cos.\beta' = (y' + z'.\cos.\lambda + x'.\cos.\nu) \\ & D'.\cos.\gamma' = (z' + x'.\cos.\mu + y'.\cos.\lambda) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

Aehnliche Ausdrücke erhält man für den Punkt m'', es ist nemlich

$$D'' = (x''.\cos.\alpha'' + y''.\cos.\beta'' + z''.\cos.\gamma'')$$

und

$$\left.\begin{aligned} D''.\cos.\alpha'' &= (x'' + y''.\cos.\nu + z''.\cos.\mu) \\ D''.\cos.\beta'' &= (y'' + z''.\cos.\lambda + x''.\cos.\nu) \\ D''.\cos.\gamma'' &= (z'' + x''.\cos.\mu + y''.\cos.\lambda) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (b)$$

Dieses vorausgesetzt, hat man:

$$f^2 = D'^2 + D''^2 - 2.D'.D''.\cos.\pi.$$

Setzt man in diese Gleichung die Werthe aus (1), (*a*), (*b*); so erhält man, nach gehöriger Reduktion derselben die Gleichung:

$$\begin{aligned} D'D''.\cos.\alpha = {} & \left.(x'x'' + y'y'' + z'z'') + (x'y'' + x''y').\cos.\nu \atop + (x'z'' + x''z')\cos.\mu + (y'z'' + y''z')\cos.\lambda\right\} \\ = {} & \left.x''.(x' + y'.\cos.\nu + z'.\mathrm{cs}.\mu) + y''.(y' + x'\cos.\nu + z'.\cos.\lambda) \atop + z''.(z' + x'.\cos.\mu + y'.\cos.\lambda);\right\} \\ = {} & \left.x'.(x'' + y''.\cos.\nu + z''.\mathrm{cs}.\mu) + y'.(y'' + x''.\mathrm{cs}.\nu + z''.\mathrm{cs}.\lambda) \atop + z'.(z' + x''\cos.\mu + y''.\cos.\lambda);\right\} \end{aligned}$$

Diese zwei letzten Gleichungen geben also:

$$\left.\begin{aligned} & \cos.\pi = \left(\frac{x''}{D''}.\cos.\alpha' + \frac{y''}{D''}.\cos.\beta' + \frac{z''}{D''}.\cos.\gamma'\right) \\ \text{oder} \\ & \cos.\pi = \left(\frac{x'}{D'}.\cos.\alpha'' + \frac{y'}{D'}.\cos.\beta'' + \frac{z'}{D'}.\cos.\gamma''\right) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Die Gültigkeit dieser Gleichungen leuchtet auch noch daraus ein, weil $(x''.\cos.\alpha' + y''.\cos.\beta' + z''.\cos.\gamma')$ die Summe der Projektionen der Coordinaten x'', y'', z'' des Endpunktes von D'', so wie $D''.\cos.\pi$ die Projektion der Geraden D'' auf D' ist, und weil $D''.\cos.\pi$ jener Summe gleich ist. Eben so ist die Projektion von D' auf D'' d. i. $D'.\cos.\pi$ gleich der Sum-

me der Projektionen der Coordinaten $x'y'z'$ des Endpunktes von D' auf der Geraden D'' d. i. gleich der Summe:

$$(x'.\cos.\alpha''+y'.\cos.\beta''+z'\cos.\gamma'').$$

50. Bestimmt man endlich die Lagen der Punkte durch Polar-Coordinaten, und sind (Fig. 27.) A der Polarpunkt, XAY die Polar-Ebene, und AX die Polar-Achse; $Am'=r'$, $m'An'=\psi'$, $n'AX=\varphi'$; $Am''=r''$, $m''An''=\psi''$, $n''AX=\varphi''$, die Polar-Coordinaten der Punkte m', m''; so wird man die oben mit $f\pi K$ u. s. w. bezeichneten Stücke in Funktionen dieser Coordinaten ausdrücken können. Um sie zu finden, bedienen wir uns nochmals der Ausdrücke dieser Stücke durch die rechtwinklichten Coordinaten der Punkte $m'm''$. Nimmt man also A, AX, XAY zum Anfangspunkt der rechtwinklichten Coordinaten, zur Achse der x, und zur Ebene der xy an; und sind

$$Ap'=x',\quad p'n'=y',\quad n'm'=z'$$
$$Ap''=x'',\quad p''n''=y'',\quad n''m''=z''$$

die rechtwinklichten Coordinaten der Punkte m', m''; so hat man, nach Gleichung (1) Art. 40:

$$x'=r'.\cos.\varphi'.\cos.\psi';\ x''=r''.\cos.\varphi''.\cos.\psi'';$$
$$y'=r'.\sin.\varphi'\cos.\psi';\ y''=r''.\sin.\varphi''.\cos.\psi'';$$
$$z'=r.\sin.\psi';\qquad z''=r''.\sin.\psi'';$$

bringt man nun diese Werthe der Coordinaten in die Art. 46 und 47 gegebenen Ausdrücke, so findet man

$$\cos.\pi=(\cos.\varphi'.\cos.\varphi''.\cos.\psi'.\cos.\psi''+\sin.\varphi'.\sin.\varphi''.\cos.\psi'.\cos.\psi'' +\sin.\psi'.\sin.\psi'') \quad \ldots\ldots (1)$$

$$f=\sqrt{(r'^2+r''^2-2.r'.r''.\cos.\pi)} \quad \ldots\ldots (2)$$

$$\left.\begin{array}{l} k=\tfrac{1}{2}.r'.r''.\sin.(\varphi'-\varphi'').\cos.\psi'.\cos.\psi'';\\ k'=\tfrac{1}{2}.r'.r''.(\cos.\varphi'.\cos.\psi'.\sin.\psi''-\cos.\varphi'.\sin.\psi'.\cos.\psi'')\\ k''=\tfrac{1}{2}.r'.r''.(\sin.\varphi'.\cos.\psi'.\sin.\psi''-\sin.\varphi''.\cos.\psi''.\sin.\psi') \end{array}\right\} \ldots (3)$$

u. s. w.

51. Wir haben oben Art. 36 und 37 den körperlichen Inhalt eines schiefen Parallelepipedes durch schiefwinklichte Coordinaten ausgedrückt. Hier wollen wir Gelegenheit nehmen, ein paar andere Ausdrücke dafür aus dem Vorherge-

henden noch zu entwickeln. Diesen Untersuchungen werden wir aber einige Betrachtungen über die Lage dreier Punkte gegen einander und gegen das System der coordinirten Achsen voranschicken.

Wir wollen nun zuerst den einfachern Fall betrachten, da alle drei Punkte m', m'', m''' (Fig. 28.) in der Ebene der xy liegen. Es seyen also $x'y'$, $x''y''$, $x'''y'''$ die rechtwinklichten Coordinaten dieser Punkte. Verbindet man diese drei Punkte durch gerade Linien, so entsteht ein Dreieck $m'm''m'''$. Die Seiten, die Winkel und der Flächeninhalt desselben lassen sich in Funktionen der Coordinaten ausdrücken.

Wir wollen:

$$m''m'''=f' \;;\quad m'm'''=f'' \;;\quad m'm''=f''' \;;$$
$$m''m'm'''=\mu' \;;\quad m'm''m'''=\mu'' \;;\quad m'm'''m''=\mu''' \;;$$

und den Flächeninhalt des Dreieckes $m'm''m'''=K$ setzen.

Nun ist

$$\left.\begin{aligned} f'&=\sqrt{[(x''-x''')^2+(y''-y''')^2]} \\ f''&=\sqrt{[(x'''-x')^2+(y'''-y')^2]} \\ f'''&=\sqrt{[(x'-x'')^2+(y'-y'')^2]} \end{aligned}\right\} \quad \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \quad (2)$$

Um die Winkel $\mu'\mu''\mu'''$ zu finden, suche man erstlich diejenigen, welche $f'f''f'''$ mit den Abständen $m'A=D'$, $m''A=D''$, $m'''A=D'''$ machen.

Es ist:

$$\text{tg.}\,(Am'p')=\frac{x'}{y'} \;;$$
$$\text{tg.}\,(Am''p'')=\frac{x''}{y''} \;;$$
$$\text{tg.}\,(Am'''p''')=\frac{x'''}{y'''} \;;$$

$$\text{tg.}\,(p'm'm'')=\left(\frac{x''-x'}{y'-y''}\right) \;;\quad \text{tg.}\,(p'm'm''')=\left(\frac{x'''-x'}{y'-y'''}\right) \;;$$
$$\text{tg.}\,(p''m''m''')=\left(\frac{x''-x'''}{y''-y'''}\right) \;;\quad \text{tg.}\,(p''m''m')=\left(\frac{x''-x'}{y''-y'}\right) \;;$$
$$\text{tg.}\,(p'''m'''m'')=\left(\frac{x''-x''}{y''-y'''}\right) \;;\quad \text{tg.}\,(p'''m'''m')=\left(\frac{x'-x'''}{y'-y'''}\right) \;;$$

Nun ist offenbar:

$(Am'p'+p'm'm''') = Am'm'''$; $(p''m''m'-Am''p'') = Am''m'$;

$(Am'p'+p'm'm'') = Am'm''$; $(p''m''m'''-Am''p'') = Am''m'''$;

$(Am'''p'''+p'''m'''m'') = Am'''m''$; $(p'''m'''m'-Am'''p''') = Am'''m'$;

folglich erhält man weiter:

$$\text{tg.}(Am'm''') = \frac{y'x'''-x'y'''}{(x'^2+y'^2)-(x'x'''+y'y''')};$$

$$\text{tg.}(Am'm'') = \frac{x''y'-x'y''}{(x'^2+y'^2)-(x'x''+y'y'')};$$

$$\text{tg.}(Am'''m'') = \frac{x''y'''-x'''y''}{(x'''^2+y'''^2)-(x''x'''+y''y''')};$$

$$\text{tg.}(Am''m') = \frac{x''y'-x'y''}{(x''^2+y''^2)-(x'x''+y'y'')};$$

$$\text{tg.}(Am''m''') = \frac{x''y'''-x'''y''}{(x''^2+y''^2)-(x''x'''+y''y''')};$$

$$\text{tg.}(Am'''m'') = \frac{y'x'''-x'y'''}{(x'''^2+y'''^2)-(x'x'''+y'y''')};$$

Nachdem aber

$$\mu' = (Am'm''-Am'm''');$$
$$\mu'' = (Am''m'-Am''m''');$$
$$\mu''' = (360^\circ - Am'''m' - Am'''m'');$$

so werden die weitern Entwicklungen geben:

$$\left.\begin{aligned}
\text{tg.}\mu' &= \frac{\text{tg.}(Am'm'')-\text{tg.}(Am'm''')}{1+\text{tg.}(Am'm'').\text{tg.}(Am'm''')} \\
\text{tg.}\mu'' &= \frac{\text{tg.}(Am''m')-\text{tg.}(Am''m''')}{1+\text{tg.}(Am''m').\text{tg.}(Am''m''')} \\
\text{tg.}\mu''' &= \frac{\text{tg.}(Am'''m')+\text{tg.}(Am'''m'')}{1-\text{tg.}(Am'''m').\text{tg.}(Am'''m'')}
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (2)$$

Durch diese Ausdrücke werden die Winkel $\mu'\mu''\mu'''$ in Funktionen von $x'y'x''y''x'''y'''$ bekannt seyn.

Um die Cosinusse dieser Winkel zu finden, welche $D'D''D'''$ mit den Entfernungen $f'f''f'''$ machen; so kann man sich folgender Methode bedienen.

Man hat bekanntlich:

$$D'^2=(x'^2+y'^2);\ D''^2=(x''^2+y''^2);\ D'''=(x'''^2+y'''^2)\ .\ .\ (3)$$

Nun hat man in den Dreiecken $m'Am''$, $m'Am'''$, $m''Am'''$,

$$\cos.(Am'm'')=\frac{D'^2+f'''^2-D''^2}{2.D'.f'''};\ \cos.(Am'm''')=\frac{D'^2+f''^2-D'''^2}{2.D'.f''}$$

$$\cos.(Am''m')=\frac{D''^2+f'''^2-D'^2}{2.D''.f'''};\ \cos.(Am''m''')=\frac{D''^2+f'^2-D'''^2}{2.D''.f'}$$

$$\cos.(Am'''m')=\frac{D'''^2+f''^2-D'^2}{2.D'''.f''};\ \cos.(Am'''m'')=\frac{D'''^2+f'^2-D''^2}{2.D'''.f'}$$

Setzt man in diese Ausdrücke für $f'f''f'''$ und $D'D''D'''$ ihre Werthe aus (1) und (3); so findet man die Funktionen von $x'x''x'''y'y''y'''$, durch welche die Cosinusse der Winkel ausgedrückt werden, welche die Linien $f'f''f'''$ mit den Linien $D'D''D'''$ machen.

Die Winkel $\mu'\mu''\mu'''$ endlich, welche die Linien $f'f''f'''$ gegenseitig mit einander machen, ergeben sich aus den Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\cos.\mu'&=\frac{f''^2+f'''^2-f'^2}{2.f''.f'''}\\ \cos.\mu''&=\frac{f'^2+f'''^2-f''^2}{2.f'.f'''}\\ \cos.\mu'''&=\frac{f'^2+f''^2-f'''^2}{2.f'.f''}\end{aligned}\right\}\ .\ .\ .\ .\ .\ (4)$$

52. Der Satz, dessen wir uns bisher so oft bedient haben, um in einem Dreiecke aus den drei Seiten die drei Winkel zu finden, und der in den Gleichungen (4) des vorigen Art. vollständig enthalten ist; verdient noch auf eine Art erwiesen zu werden, welche wenigere Vorkenntnisse der Geometrie voraussetzt, weil derselbe als ein Prinzip, ja als das einzige der Trigonometrie angesehen werden kann, indem sich aus ihm alle andern Sätze nicht bloss der Trigonometrie, sondern der ganzen Geometrie herleiten lassen.

Denkt man sich vom Punkte m''' auf $m'm''$ ein Perpendikel $m'''t$ herabgelassen, so ist

$$m'm''=m't+m''t$$

Nun ist, vermöge der Erklärung des Cosinuss

$$\cos.\mu' = \frac{m't}{m'm'''}\,;\quad \cos.\mu'' = \frac{m''t}{m''m'''}\,;$$

folglich hat man

$$f''' = (f''.\cos.\mu' + f'.\cos.\mu'')$$

Eben so ist

$$f'' = (f'.\cos.\mu''' + f'''.\cos.\mu') \quad \ldots\ldots (1)$$

und endlich

$$f' = (f''.\cos.\mu''' + f'''.\cos.\mu'')$$

Aus diesen drei Gleichungen folgen für $\cos.\mu'$, $\cos.\mu''$, $\cos.\mu'''$ die im vorigen Art. angeführten Gleichungen (4).

Um sie auf eine sehr einfache Art zu erhalten, multiplizire man diese drei Gleichungen respektive mit f''', f'', f'; so bekömmt man

$$\left.\begin{aligned} f'''^2 &= (f''.f'''.\cos.\mu' + f'.f'''.\cos.\mu'') \\ f''^2 &= (f'.f''.\cos.\mu''' + f''.f'''.\cos.\mu') \\ f'^2 &= (f''.f'.\cos.\mu''' + f'.f'''.\cos.\mu'') \end{aligned}\right\}$$

Zieht man von der Summe je zweier dieser Gleichungen die dritte ab; so wird man nachstehende drei Gleichungen erhalten:

$$\left.\begin{aligned} f''^2 + f'''^2 - f'^2 &= 2.f''.f'''.\cos.\mu' \\ f'^2 + f'''^2 - f''^2 &= 2.f'.f'''.\cos.\mu'' \\ f'^2 + f''^2 - f'''^2 &= 2.f'.f''.\cos.\mu''' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (2)$$

Aus den Werthen von $\cos.\mu'$, $\cos.\mu''$, $\cos.\mu'''$ lassen sich die von $\sin.\mu'$, $\sin.\mu''$, $\sin.\mu'''$ leicht finden. Setzt man, abkürzungsweise:

$$N = [2(f'^2f''^2 + f'^2f'''^2 + f''^2f'''^2) - f'^4 - f''^4 - f'''^4]^{\frac{1}{2}}$$

so findet man nach angestellter Berechnung:

$$\sin.\mu' = \frac{N}{2.f''.f'''}\,;\quad \sin.\mu'' = \frac{N}{2.f'.f'''}\,;\quad \sin.\mu''' = \frac{N}{2.f'.f''} \quad (3)$$

Dividirt man je zwei dieser Gleichungen durch einander, so erhält man nachstehende drei:

$$\left.\begin{aligned} f''.\sin.\mu' &= f'.\sin.\mu'' \\ f'''.\sin.\mu' &= f'.\sin.\mu''' \\ f'''.\sin.\mu'' &= f''.\sin.\mu''' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (4)$$

Es ist überhaupt:

$$\sin.\mu' : \sin.\mu'' : \sin.\mu''' = f' : f'' : f'''$$

d. h. die Seiten eines jeden Dreieckes stehen im Verhältnisse der Sinusse der gegenüberstehenden Winkel.

Aus den Gleichungen (4) kann man noch einige andere merkwürdige Gleichungen ableiten. So z. B. giebt die erste:

$$\sin.\mu'' = \frac{f''}{f'} \cdot \sin.\mu'$$

folglich

$$\cos.\mu'' = \sqrt{\left\{1 - \frac{f''^2}{f'^2} \cdot \sin.^2\mu'\right\}}$$

und endlich

$$\text{tg}.\mu'' = \frac{f''.\sin.\mu'}{\sqrt{f'^2 - f''^2 \sin.^2\mu'}} = \frac{f''.\sin.\mu'}{\sqrt{(f'^2 - f''^2 + f''^2 \cos.^2\mu')}};$$

aber da

$$f'^2 - f''^2 = f'''^2 - 2.f'.f'''.\cos.\mu'$$

so ist

$$\text{tg}.\mu'' = \frac{f''.\sin.\mu'}{\sqrt{(f'''^2 - 2f'f'''.\cos.\mu' + f'^2 \cos.^2\mu')}}$$

oder

$$\text{tg}.\mu'' = \frac{f'.\sin.\mu'}{f''' - f'.\cos.\mu'} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Ausser dieser Relation zwischen zwei Seiten und zwei Winkeln eines Dreieckes giebt es noch fünf ähnliche. Diese sechs möglichen Relationen sind daher:

$$\left.\begin{aligned}
\text{tg}.\mu' &= \frac{f'.\sin.\mu''}{f''' - f'.\cos.\mu''} = \frac{f'.\sin.\mu'''}{f'' - f'.\cos.\mu'''};\\
\text{tg}.\mu'' &= \frac{f''.\sin.\mu'}{f''' - f''.\cos.\mu'} = \frac{f''.\sin.\mu'''}{f' - f''.\cos.\mu'''};\\
\text{tg}.\mu''' &= \frac{f'''.\sin.\mu'}{f'' - f'''.\cos.\mu'} = \frac{f'''.\sin.\mu''}{f' - f'''.\cos.\mu''};
\end{aligned}\right\} \ldots (6)$$

Aus der Gleichung (5) folgt noch

$$f'''.\text{tg}.\mu'' = f''(\sin.\mu' + \cos.\mu'.\text{tg}.\mu'').$$

Aber

$$f''.\sin.\mu''' = f'''.\sin.\mu''.$$

Werden diese zwei Gleichungen mit einander multiplizirt so erhält man:

$$\sin.\mu''' = \sin.\mu'.\cos.\mu'' + \cos.\mu'.\sin.\mu'' = \sin.(\mu' + \mu'').$$

Hieraus folgt also, dass die Summe $(\mu' + \mu'' + \mu''') = 180°$.

Umgekehrt wird man hieraus und aus den Gleichungen (4) auf die Gleichung (6) gelangen können.

53. Der Flächeninhalt des Dreieckes $m'm''m'''$ setzt sich aus den Flächen der Dreiecke $m'Am''$, $m'Am'''$, $m''Am'''$ zusammen. Es ist nemlich

$$\triangle m'm''m''' = (\triangle m'Am'' - \triangle m'Am''' - \triangle m''Am''').$$

Nun ist:

$$\left.\begin{aligned} \triangle m'Am'' &= \tfrac{1}{2}(x''y' - x'y'') \\ \triangle m'Am''' &= \tfrac{1}{2}(x'''y' - x'y''') \\ \triangle m''Am''' &= \tfrac{1}{2}(x''y''' - x'''y'') \end{aligned}\right\}$$

Folglich ist:

$$\triangle m'm''m''' = \tfrac{1}{2}[(x''y' - x'y'') + (x'y''' - x'''y') + (x'''y'' - x''y''')] \quad . (1)$$

Diesen Ausdruck erhält man auch noch, wenn man bemerkt, dass

$$\triangle m'm''m''' = [\text{Trapez } m'p'p''m'' - \text{Tr}.m'p'p'''m''' - \text{Tr}.m'''p'''p''m'']$$

und dass

$$\left.\begin{aligned} \text{Trapez } m'p'p''m'' &= (x'' - x').\left(\frac{y'' + y'}{2}\right) \\ \ldots\ldots\ m'p'p'''m''' &= (x''' - x').\left(\frac{y''' + y'}{2}\right) \\ \ldots\ m''p''p'''m''' &= (x'' - x''').\left(\frac{y'' + y'''}{2}\right) \end{aligned}\right\}$$

die Substitution wird folgenden Ausdruck geben:

$$\triangle m'm''m''' =$$

$$\tfrac{1}{2}.[(x'' - x')(y'' + y') + (x' - x''')(y' + y''') + (x''' - x'')(y''' + y'')] \quad . (2)$$

Die Entwicklung dieses Ausdruckes zeigt, dass er mit (1) identisch ist.

Da sich ein jedes Polygon in Dreiecke zertheilen lässt, so wird sich der Flächeninhalt desselben durch eine ähnliche Funktion der Coordinaten der Eckpunkte ausdrücken lassen.

Wenn man für x, y Polar-Coordinaten einführt, und die Ausdrücke jener durch diese in die Funktionen (1) oder (2) setzt; so wird man den Flächeninhalt des Dreieckes $m'm''m''$ durch die Polar-Coordinaten der Punkte m', m'', m''' ausgedrückt haben.

54. Wir wollen itzt annehmen, dass die drei gegebenen Punkte m', m'', m''' (Fig. 29) ausserhalb der coordinirten Ebenen liegen, und durch die Coordinaten $x'y'z'$, $x''y''z''$, $x'''y'''z'''$ bestimmt sind.

Man denke sich vom Anfangspunkte zu diesen Punkten gerade Linien gezogen, die wir respektive mit $D'D''D'''$ bezeichnen wollen.

Es seyen nun $n'n''n'''$ die Projektionen der Punkte $m'm''m'''$ in der Ebene xy; so ist:

$\frac{1}{2}.(x''y'-x'y'')$ die Fläche des Dreieckes $n'An'' = k_{,,,}$;
$\frac{1}{2}.(x'''y'-x'y''')$ $n'An''' = k_{,,}$;
$\frac{1}{2}.(x''y'''-x'''y'')$ $n''An''' = k_{,}$;

Ferner seyen $p'p''p'''$ die Projektionen der Punkte $m'm''m'''$ in der Ebene xz; so hat man:

$\frac{1}{2}.(x''z'-x'z'')$ die Fläche des Dreieckes $p'Ap'' = k'_{,,,}$;
$\frac{1}{2}.(x'''z'-x'z''')$ $p'Ap''' = k'_{,,}$;
$\frac{1}{2}.(x'''z''-x''z''')$ $p''Ap''' = k'_{,}$;

Sind endlich $q'q''q'''$ die Projektionen der Punkte $m'm''m'''$ in der Ebene yz; so ist:

$\frac{1}{2}.(y'z''-y''z')$ die Fläche des Dreieckes $q'Aq'' = k''_{,,,}$;
$\frac{1}{2}.(y'''z'-y'z''')$ $q'Aq''' = k''_{,,}$;
$\frac{1}{2}.(y'''z''-y''z''')$ $q''Aq''' = k''_{,}$;

Nennt man nun $k'k''k'''$ die Projektionen des Dreieckes $m'm''m'''=K$; so findet man

$$\left.\begin{array}{l} k = (k_{,} + k_{,,} - k_{,,,})\,; \\ k' = (k'_{,,,} + k'_{,} - k'_{,,})\,; \\ k'' = (k''_{,,} + k''_{,,,} - k''_{,})\,; \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ (1)$$

und

$$K = \sqrt{[k^2 + k'^2 + k''^2]} \quad \ldots\ldots\ (2)$$

Nennt man $\vartheta\vartheta'\vartheta''$ die Neigungswinkel der Ebene des Dreieckes $m'm''m'''$ gegen die coordinirten Ebenen xy, xz, yz; dann ist:

$$\cos.\vartheta = \frac{k}{K};\quad \cos.\vartheta' = \frac{k'}{K};\quad \cos.\vartheta'' = \frac{k''}{K} \quad . \quad . \quad (3)$$

55. Wir wollen nun itzt den cubischen Inhalt des Parallelepipedes suchen, dessen Kanten die Geraden $D'D''D'''$ sind. Wenn man also $m'Am''p$ (Fig. 30) (wo der Punkt p der Durchschnittspunkt der Linien $m'p$, $m''p$ ist, welche respektive zu den Geraden Am'', Am' parallel sind) als die Grundfläche des Parallelepipedes ansieht, und $m'''q$ das Perpendikel vorstellt, das man vom dritten Punkte m''' auf diese Grundfläche herablässt; so wird der cubische Inhalt dieses Körpers gefunden, wenn man die Grundfläche mit der Höhe multiplizirt; der Ausdruck dieses Inhaltes ist also

$$J = 2.[\triangle m'Am''.m'''q]$$

Bezeichnet man den Inhalt dieses Dreieckes $m'Am''$ mit K, seine Projektionen in den Ebenen xy, xz, yz respektive mit $k\,k'k''$; die Neigungen der Ebene dieses Dreieckes gegen dieselben coordinirten Ebenen mit $\delta\delta'\delta''$; und die Winkel, welche D''' mit den coordinirten Achsen xyz macht, mit $\alpha'''\beta'''\gamma'''$ so hat man:

$$\cos.Am'''q = (\cos.\alpha'''.\cos.\delta'' + \cos.\beta'''.\cos.\delta' + \cos.\gamma'''.\cos.\delta)$$

und

$$m'''q = D'''.\cos.(Am'''q) =$$
$$[D'''.\cos.\alpha'''.\cos.\delta'' + D'''.\cos.\beta'''.\cos.\delta' + D'''.\cos.\gamma'''.\cos.\delta].$$

Der Ausdruck J wird demnach werden:

$$J = 2.K.[D'''.\cos.\alpha'''.\cos.\delta'' + D'''.\cos.\beta'''.\cos.\delta' + D'''.\cos.\gamma'''\cos.\delta]$$

Nun ist aber

$$D'''.\cos.\alpha''' = x''';\quad D'''.\cos.\beta''' = y''';\quad D'''.\cos.\gamma''' = z''';$$
$$K.\cos.\delta = k;\quad K.\cos.\delta' = k';\quad K.\cos.\delta'' = k'';$$

folglich hat man

$$J = 2.[k''.x''' + k'.y''' + k.z''']$$

Setzt man für $kk'k''$ ihre oben gefundenen Werthe; so hat man:

$$J = [x'''.(y'z''-y''z') + y'''.(x''z'-x'z'') + z'''.(x'y''-x''y')] \;.\;.\; (1)$$

Diesem Ausdrucke kann man, nebst andern Formen, noch folgende ertheilen:

$$J = \{x'.(y''z'''-y'''z'') - x''.(y'z'''-y'''z') + x'''(y'z''-y''z')\} \;.\;.\; (2)$$

Wenn der eine Endpunkt der Diagonale des Parallelepipedes nicht im Anfangspunkte angenommen wird; sondern in irgend einem andern Punkte des Raumes, dessen Coordinaten xyz seyen; so braucht man nur, um in diesem Falle den Ausdruck für den körperlichen Inhalt des schiefen Parallelepipedes zu bekommen, in den gefundenen Formeln (1) oder (2) anstatt x', y', z' u. s. w. zu setzen $(x'-x)$, $(y'-y)$, $(z'-z)$. Hiedurch wird also der Ausdruck (2) werden:

$$\left.\begin{array}{l} J = (x'-x)\{(y''-y)(z'''-z)-(y'''-y)(z''-z)\} \\ -(x''-x)\{(y'-y)(z'''-z)-(y'''-y)(z'-z)\} \\ +(x'''-x)\{(y'-y)(z''-z')-(y''-y)(z'-z)\} \end{array}\right\} \;.\;.\;.\;.\;(3)$$

Dieser Ausdruck lässt sich noch in einen andern verwandeln, wenn man für die rechtwinklichten Coordinaten xyz Polar-Coordinaten einführt.

Es seyen also: $\varphi'\psi'$ die Winkel der Projektion von D' in der Ebene xy mit der Achse der x und mit D': und ähnliche Winkel seyen $\varphi''\psi''$, $\varphi'''\psi'''$; so hat man, vermöge Gleichung (1) Art. 40:

$$\left.\begin{array}{lll} x' = D'.\cos.\varphi'.\cos.\psi'; & y' = D'.\sin.\varphi'.\cos.\psi'; & z' = D'.\sin.\psi''; \\ x'' = D''.\cos.\varphi''.\cos.\psi''; & y'' = D''.\sin.\varphi''.\cos.\psi''; & z'' = D''.\sin.\psi''; \\ x''' = D'''.\cos.\varphi'''.\text{cs}.\psi'''; & y''' = D'''.\sin.\varphi'''.\text{cs}.\psi'''; & z''' = D'''.\sin.\psi'''. \end{array}\right\}$$

Setzt man diese Werthe in den einen oder andern der Ausdrücke (1) und (2); so hat man, nach einigen sehr leichten Reduktionen:

$$J = D'D''D'''.\text{cs}.\psi'\text{cs}.\psi''\text{cs}.\psi'''.\{\sin.(\varphi'-\varphi''').\text{tg}.\psi''+\sin.(\varphi'''-\varphi'')\text{tg}\psi' + \sin.(\varphi''-\varphi').\text{tg}.\psi'''\} \;.\;.\;.\;.\; (4)$$

Setzt man diese Werthe der Coordinaten in den Ausdruck (3); so erhält man, wenn man der Kürze wegen

$$D'.D''.D'''.\text{cs}.\psi'.\text{cs}.\psi''.\text{cs}.\psi''' = \Psi; \quad D.D'.D'''.\text{cs}.\psi.\text{cs}.\psi'.\text{cs}.\psi''' = \Psi''$$

$$D.D''.D'''.\text{cs}.\psi.\text{cs}.\psi''.\text{cs}.\psi''' = \Psi'; \quad D.D'.D''.\text{cs}.\psi.\text{cs}.\psi'.\text{cs}.\psi'' = \Psi'''$$

setzt, den Ausdruck

$$(5) \quad \ldots\ldots\ldots \quad J = $$
$$\begin{aligned} &\Psi.\{\sin.(\varphi'''-\varphi'').\,\mathrm{tg}.\psi'+\sin.(\varphi'-\varphi''').\,\mathrm{tg}.\psi''+\sin.(\varphi''-\varphi')\,\mathrm{tg}.\psi'''\} \\ +&\Psi'.\{\sin.(\varphi''-\varphi''').\,\mathrm{tg}.\psi+\sin.(\varphi'''-\varphi).\,\mathrm{tg}.\psi''+\sin.(\varphi-\varphi'')\,\mathrm{tg}.\psi'''\} \\ +&\Psi''.\{\sin.(\varphi'''-\varphi').\,\mathrm{tg}.\psi+\sin.(\varphi-\varphi''').\,\mathrm{tg}.\psi'+\sin.(\varphi'-\varphi)\,\mathrm{tg}.\psi'''\} \\ +&\Psi'''.\{\sin.(\varphi'-\varphi'').\,\mathrm{tg}.\psi+\sin.(\varphi''-\varphi).\,\mathrm{tg}.\psi'+\sin.(\varphi-\varphi')\,\mathrm{tg}.\psi''\} \end{aligned}$$

Die Gleichungen (1) (2) enthalten mehrere sehr merkwürdige Sätze der Geometrie, welche man aus ihnen sehr leicht entwickeln wird.

56. Von den mannigfaltigen Aufgaben, zu deren Auflösung die bisher entwickelten Prinzipien der analytischen Geometrie angewandt werden können, und davon wir schon einige betrachtet haben, wollen wir noch ein paar mittelst dieser Prinzipien auflösen.

Es sey also eine Reihe an ihren Endpunkten zusammenhängender Linien $f f' f'' f'''\ldots$ gegeben; man sucht nun, wenn überdiess noch die Winkel bekannt sind, welche sie mit einander machen, die Coordinaten ihrer Durchschnittspunkte in Funktionen dieser Linien und Winkel.

Wir wollen annehmen, dass die Seite f im Anfangspunkte A ihren Anfang nehme, und es heisse m der Endpunkt dieser Seite, welcher zugleich der Anfangspunkt der zweiten Seite f' ist.

Der Endpunkt dieser Seite heisse m', und es sey dieser zugleich der Anfang der Linie f''; der folgende Durchschnittspunkt der Linien f'' und f''' sey ferner m'', der der Linien f''' und f^{IV} sey m''', u. s. w., so dass die Linien $f f' f''\ldots$ ein zusammenhängendes Polygon bilden, das seinen Anfang im Punkte A nimmt. Sind nun n solcher Linien gegeben, so wird $m^{(n-1)}$ der Endpunkt des ganzen Polygons seyn; die Coordinaten der Punkte $m m' m''\ldots$ seyen nun xyz, $x'y'z'$, $x''y''z''$, ...; und die Coordinaten des Endpunktes $m^{(n-1)}$ seyen $x_, y_, z_,$.

Ferner seyen $\alpha\,\alpha'\alpha''\ldots$ die Winkel, welche die Achse der x mit f, f mit f', f' mit f'', u. s. w. bildet, wenn $f f' f''\ldots$ in der Ebene xy projizirt werden. Endlich seyen $\beta\,\beta'\beta''\ldots$ die Neigungen dieser Linien gegen die Ebene xy.

Nennt man die Projektionen der Geraden $ff'f''\ldots$ in der Ebene xy respektive $a\,a'a''\ldots$; so sind $\alpha\,\alpha'\alpha''\ldots$ die Winkel, welche a mit x, a mit a', a' mit a'', u. s. w. bilden.

Bezeichnet man endlich mit $\lambda\,\lambda'\lambda''\ldots$ die Winkel, welche $ff'f''\ldots$ mit der Achse der x machen; so hat man:

$$\alpha' + \alpha - \lambda' = 180^\circ;$$
$$\alpha'' + \lambda' - \lambda'' = 180^\circ;$$
$$\alpha''' + \lambda'' - \lambda''' = 180^\circ;$$
$$\alpha^{\mathrm{IV}} + \lambda''' - \lambda^{\mathrm{IV}} = 180^\circ;$$

woraus man findet: $\lambda' = \alpha' + \alpha - 180^\circ$

oder $\lambda' = 180^\circ + \alpha + \alpha'$;

$$\lambda'' = \alpha + \alpha' + \alpha'';$$
$$\lambda''' = 180^\circ + \alpha + \alpha' + \alpha'' + \alpha''';$$
$$\lambda^{\mathrm{IV}} = \alpha + \alpha' + \alpha'' + \alpha''' + \alpha^{\mathrm{IV}};$$
$$\lambda^{\mathrm{V}} = 180^\circ + \alpha + \alpha' + \alpha'' + \alpha''' + \alpha^{\mathrm{IV}} + \alpha^{\mathrm{V}};$$

.

Nun sind die Projektionen der Seiten $ff'f''\ldots$ in der Ebene xy:

$a = f.\cos.\beta$; $a' = f'.\cos.\beta'$; $a'' = f''.\cos.\beta''$; $a''' = f'''.\cos.\beta'''$; etc.

und die Projektionen:

auf der Achse x		auf der Achse der y
von a gleich	$x = a.\cos\,\alpha$;	$y = a.\sin.\alpha$;
.. a' ..	$x' = (x + a'.\cos.\lambda')$;	$y' = (y + a'.\sin.\lambda')$;
.. a'' ..	$x'' = (x' + a''.\cos.\lambda'')$;	$y'' = (y' + a''.\sin.\lambda'')$;
.. a''' ..	$x''' = (x'' + a'''.\cos.\lambda''')$;	$y''' = (y'' + a'''.\sin.\lambda''')$;

Setzt man in diese Ausdrücke die obigen Werthe von $\lambda\lambda'\lambda''\ldots$, und entwickelt sie nach und nach; so findet man folgende Werthe der Coordinaten der Durchschnittspunkte oder Ecken des Polygons:

$x = f.\cos.\alpha.\cos.\beta$;

$x' = f\cos.\alpha.\cos.\beta - f'.\cos.(\alpha' + \alpha).\cos.\beta'$;

$x'' = f.\cos.\alpha.\cos.\beta - f'.\cos.(\alpha' + \alpha).\cos.\beta' + f''.\mathrm{cs}.(\alpha'' + \alpha' + \alpha).\mathrm{cs}.\beta''$

u. s. w.

$$x_{,}=\{f.\cos.\alpha.\cos.\beta-f'\cos.(\alpha'+\alpha).\cos.\beta'+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$\pm f^{(n-1)}\cos.(\alpha^{(n-1)}+..+\alpha)\cos.\beta^{(n-1)}\}$$

$$y=f.\sin.\alpha.\cos.\beta\,;$$
$$y'=f.\sin.\alpha.\cos.\beta-f'.\sin.(\alpha'+\alpha).\cos.\beta'\,;$$
$$y''=f.\sin.\alpha.\cos.\beta-f'.\sin.(\alpha'+\alpha).\mathrm{cs}.\beta'+f''.\sin.(\alpha''+\alpha'+\alpha).\mathrm{cs}.\beta''\,;$$
$$. \quad . \quad .$$
$$y_{,}=\{f.\sin.\alpha.\cos.\beta-f'.\sin.(\alpha'+\alpha)\mathrm{cs}.\beta'+f''.\sin.(\alpha''+\alpha'+\alpha).\mathrm{cs}.\beta''-..$$
$$\pm f^{(n-1)}\sin.(\alpha^{(n-1)}+..+\alpha).\cos.\beta^{(n-1)}\}\,;$$

$$z=f.\sin.\beta\,;$$
$$z'=f.\sin.\beta+f'.\sin.\beta'\,;$$
$$z''=f.\sin.\beta+f'.\sin.\beta'+f''\sin.\beta''\,;$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$z_{,}=f.\sin.\beta+f'.\sin.\beta'+f''.\sin.\beta''+..+f^{(n-1)}\sin.\beta^{(n-1)}\,;$$

Wenn der Endpunkt zugleich in den Anfangspunkt A fällt, oder wenn das Polygon geschlossen ist; dann hat man

$$\left.\begin{array}{l} x_{,}=o\,; \\ y_{,}=o\,; \\ z_{,}=o\,; \end{array}\right\}$$

Lägen die Punkte $mm'm''\ldots$ oder die Linien insgesammt in der Ebene xy; dann werden die Winkel $\beta\beta'\beta''\ldots$ gleich Null; und man hat für jedes geschlossene Polygon:

$$x_{,}=f.\cos.\alpha-f'.\cos(\alpha+\alpha')+f''.\cos.(\alpha+\alpha'+\alpha'')-\text{ u. s. f.}$$
$$y_{,}=f.\sin.\alpha-f'.\sin.(\alpha+\alpha')+f''.\sin.(\alpha+\alpha'+\alpha'')-\text{ u. s. f.}$$

57. Es seyen wieder m', m'' zwei Punkte im Raume, deren Lage gegen ein System dreier rechtwinklichter coordinirter Achsen bestimmt werde, und deren Coordinaten wir wieder mit $x'y'z'$ und $x''y''z''$ bezeichnen wollen. Denkt man sich durch den Punkt m' drei den coordinirten Achsen parallele Linien gezogen, und nennt man die Projektionen der Linie $m'm''=f$ auf diesen Geraden respektive xyz; so kann man diese als die Coordinaten des Punktes m'' gegen den Punkt m' betrachten, und es ist sehr leicht einzusehen, dass:

$$\left.\begin{array}{l} x=(x''-x')\,; \\ y=(y''-y')\,; \\ z=(z''-z')\,; \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Wird daher gegen einen ersten Ort (z. B. gegen den Anfangspunkt der Coordinaten) die Lage eines zweiten und eines dritten Ortes gegeben; so wird man auch die Lage des dritten gegen den zweiten finden können. Führt man Polar - Coordinaten ein, und sind $r'\varphi'\psi'$ und $r''\varphi''\psi''$ die Polar - Coordinaten der Punkte $m'm''$, in Beziehung gegen den ursprünglichen Anfangspunkt, so ist:

$$x' = r'.\cos.\psi'.\cos.\varphi'; \quad \text{und} \quad x'' = r''.\cos.\psi''.\cos.\varphi'';$$
$$y' = r'.\cos.\psi'.\sin.\varphi'; \quad\quad y'' = r''.\cos.\psi''.\sin.\varphi'';$$
$$z' = r'.\sin.\psi'; \quad\quad z'' = r''.\sin.\psi''.$$

Nimmt man itzt m' zum Polarpunkt, die durch m' zur Achse der x parallel gezogene Gerade zur Polar - Achse, und die durch m' zur Ebene xy parallele Ebene zur Polar - Ebene an, und sind auf ähnliche Art $r\psi\varphi$ die Polar - Coordinaten des Punktes m'' gegen m'; so hat man:

$$\left.\begin{array}{l} x = r.\cos.\psi.\cos.\varphi; \\ y = r.\cos.\psi.\sin.\varphi; \\ z = r.\sin.\psi; \end{array}\right\}$$

Bringt man diese Ausdrücke der rechtwinklichten Coordinaten durch Polar - Coordinaten in die Gleichungen (1); so findet man:

$$\left.\begin{array}{l} r.\cos.\psi.\cos.\varphi = x'' - y' = (r''.\cos.\psi''.\cos.\varphi'' - r'.\cos.\psi'.\cos.\varphi') \\ r.\cos.\psi.\sin.\varphi = y'' - y' = (r''.\cos.\psi''.\sin.\varphi'' - r'.\cos.\psi'.\sin.\varphi') \\ r.\sin.\psi \quad\quad = z'' - z' = (r''.\sin.\psi'' - r'.\sin.\psi'); \end{array}\right\} \ldots (2)$$

Aus diesen Gleichungen kann man $r\psi\varphi$ auf mehrere Arten finden. So z. B. ist

$$\left.\begin{array}{l} \text{tg}.\,\varphi = \left(\frac{y''-y'}{x''-x'}\right); \\ \text{tg}.\,\psi = \left(\frac{z''-z'}{x''-x'}\right)\text{cs}.\varphi'' = \left(\frac{z''-z'}{y''-y'}\right)\sin.\varphi''; \\ r = \frac{x''-x'}{\text{cs}.\psi.\text{cs}.\varphi} = \frac{y''-y'}{\text{cs}.\psi.\sin.\varphi} = \frac{z''-z'}{\sin.\psi}; \end{array}\right\} \ldots (3)$$

Sind $R\,R'R''$ die Projektionen der Entfernungen $r\,r'r''$ in der Ebene xy, oder:

$$R = r.\cos.\psi\,;\quad R' = r'.\cos.\psi'\,;\quad R'' = r''.\cos.\psi''\,;$$

dann werden die Gleichungen (2) geben:

$$\left.\begin{array}{l} R.\cos.\varphi = R''.\cos.\varphi'' - R'.\cos.\varphi' : \\ R.\sin.\varphi = R''.\sin.\varphi'' - R'.\sin.\varphi' ; \\ R.\,\mathrm{tg}.\,\psi = R''.\,\mathrm{tg}.\psi'' - R'.\,\mathrm{tg}.\,\psi' ; \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots (4)$$

Aus diesen Gleichungen erhält man:

$$\mathrm{tg}.\varphi = \left(\frac{R''.\sin.\varphi'' - R'.\sin.\varphi'}{R''.\cos.\varphi'' - R'.\cos.\varphi'}\right);$$

$$\mathrm{tg}.\psi = \frac{R''.\mathrm{tg}.\psi'' - R'.\mathrm{tg}.\psi'}{R''.\mathrm{cs}.\varphi'' - R'.\mathrm{cs}.\varphi'}.\cos.\varphi = \frac{R''.\mathrm{tg}.\psi'' - R'.\mathrm{tg}.\psi'}{R''.\sin.\varphi'' - R'.\sin.\varphi'}.\sin.\varphi \text{ und}$$

$$R = \frac{R''.\cos.\varphi'' - R'.\cos.\varphi'}{\cos.\varphi} = \frac{R''.\sin.\varphi'' - R'.\sin.\varphi'}{\sin.\varphi};$$

oder auch

$$R = \sqrt{\{R'^2 + R''^2 - 2R'R''.\cos.(\varphi'' - \varphi')\}}.$$

Multiplizirt man die erste der Gleichungen (4) mit $\cos.\omega$, wo ω irgend ein willkührlicher Winkel ist, und die zweite Gleichung mit $\sin.\omega$; so gibt ihre Summe:

$$R.\cos.(\varphi - \omega) = \{R''.\cos.(\varphi'' - \omega) - R'.\cos.(\varphi' - \omega)\} \quad \ldots (a)$$

Wird die zweite der Gleichungen (4) mit $\cos.\omega$ und die erste mit $\sin.\omega$ multiplizirt, und diese von jener abgezogen; so hat man:

$$R.\sin.(\varphi - \omega) = \{R''.\sin.(\varphi'' - \omega) - R'.\sin.(\varphi' - \omega)\} \quad \ldots (b)$$

Die Verbindung dieser zwei Gl. (a) und (b) mit der dritten der Gl. (4) giebt ein System von drei Gleichungen, in welchen nebst den unbekannten oder zu bestimmenden Grössen $r\psi\varphi$ auch eine willkührliche Grösse ω vorhanden ist. Legt man daher dieser Grösse ω verschiedene Werthe bei; so werden sich daraus verschiedene Auflösungen der Aufgabe ergeben. Ist z. B.

$$\omega = \varphi$$

so hat man folgendes System von Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} R = R''.\cos.(\varphi'' - \varphi) - R'.\cos.(\varphi' - \varphi) ; \\ o = R''.\sin.(\varphi'' - \varphi) - R'.\sin.(\varphi' - \varphi) : \\ R.\mathrm{tg}.\psi = R''.\,\mathrm{tg}.\psi'' - R'.\,\mathrm{tg}.\psi' ; \end{array}\right\} \ldots .(6)$$

Aus der zweiten Gl. findet man $\mathrm{tg}.\varphi = \left(\frac{R''.\sin.\varphi'' - R'.\sin.\varphi'}{R''.\cos.\varphi'' - R'.\cos.\varphi'}\right)$ wie oben; die erste Gleichung giebt hierauf den Werth von R. Ist aber

$$\omega = \varphi';$$

dann werden die Gl. (a) und. (b) werden:

$$\left.\begin{aligned} R.\cos.(\varphi-\varphi') &= R''.\cos.(\varphi''-\varphi')-R'; \\ R.\sin.(\varphi-\varphi') &= R''.\sin.(\varphi''-\varphi'); \end{aligned}\right\} \quad . \quad (6)$$

Hieraus findet man:

$$\mathrm{tg}.(\varphi-\varphi') = \frac{R''.\sin.(\varphi''-\varphi')}{R''.\cos.(\varphi''-\varphi')-R'},$$

und

$$R = \frac{R''.\sin.(\varphi''-\varphi')}{\sin.(\varphi-\varphi')} = \frac{R''.\cos.(\varphi''-\varphi')-R'}{\cos.(\varphi-\varphi')};$$

Eine ähnliche Auflösung erhält man für $\omega=\varphi''$.

Ist noch:

$$\omega = \left(\frac{\varphi'+\varphi''}{2}\right);$$

dann werden die Gleichungen (a) und (b) werden:

$$\left.\begin{aligned} R.\cos.\left(\varphi-\frac{\varphi'+\varphi''}{2}\right) &= R''.\cos.\left(\frac{\varphi''-\varphi'}{2}\right)-R'.\cos.\left(\frac{\varphi'-\varphi''}{2}\right) \\ R.\sin.\left(\varphi-\frac{\varphi'+\varphi''}{2}\right) &= R''.\sin.\left(\frac{\varphi''-\varphi'}{2}\right)-R'.\sin.\left(\frac{\varphi'-\varphi''}{2}\right) \end{aligned}\right\} . (7)$$

Aus diesen Gleichungen erhält man:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{tg}.\left(\varphi-\frac{\varphi'+\varphi''}{2}\right) &= \left(\frac{R''+R'}{R''-R'}\right).\mathrm{tg}.\left(\frac{\varphi''-\varphi'}{2}\right); \\ R = \frac{(R''-R').\cos.\frac{1}{2}(\varphi''-\varphi')}{\cos.\left(\varphi-\frac{\varphi'+\varphi''}{2}\right)} &= \frac{(R''+R').\sin.\frac{1}{2}(\varphi''-\varphi')}{\sin.\left(\varphi-\frac{\varphi'+\varphi''}{2}\right)} \end{aligned}\right\}$$

Der Winkel ψ wird bei jeder solchen Auflösung aus der dritten der Gl. (4) bestimmt.

Von der Transformation der rechtwinklichten, schiefwinklichten und Polar-Coordinaten in einer Ebene und im Raume.

58. Nachdem ich die vorzüglichsten Methoden erklärt habe, wie die Lage eines Punktes sowohl in einer Ebene als im Raume bestimmt werde, und wie diese Bestimmung auf analytische Ausdrücke zurückzubringen sey, so will ich itzt zu den Untersuchungen übergehen, welche die Transformation der Coordinaten betreffen.

Wir haben gesehen, dass die Bestimmung des Ortes oder der Lage eines Punktes immer gewisse als fest, und unveränderlich angenommene Punkte, Linien, oder Ebenen voraussetzt, gegen welche derselbe bezogen wird. Diese Beziehung geschieht immer mittelst gewisser Linien oder Winkel, welche man die Coordinaten dieses Punktes nennt, und jene Punkte, Linien oder Ebenen von unveränderlicher Lage nennt man ein Coordinaten-System. Das wichtigste solcher Systeme ist unstreitig das dreier gerader Linien, die in einem Punkte gegenseitig auf einander senkrecht stehen, und das desswegen ein System dreier rechtwinklichter coordinirter Achsen genannt wird. Während sich nun die Werthe der Coordinaten der Punkte von einem Orte des Raumes zum andern ändern, bleibt die Lage der drei coordinirten Achsen fixe; und wir haben in den vorhergehenden Abschnitten die Grundsätze entwickelt, um die Grössen, welche aus der Beziehung zweier oder mehrerer Punkte gegen einander entspringen (als z. B. ihre Entfernungen von einander, die Winkel, welche diese Entfernungen mit einander machen, u. dgl.) in Funktionen der Coordinaten dieser Punkte auszudrücken. In den folgenden Abschnitten hingegen soll untersucht werden, welche Veränderungen die Coordinaten eines und desselben Punktes erfahren, wenn er gegen zwei verschiedene Systeme der Coordinaten bezogen wird. Indem man also bei den vorhergehenden Untersuchungen nur Ein System der Coordinaten und zwei oder mehrere Punkte des Raumes in Be-

ziehung gegen dasselbe im Auge hatte, hat man sich in den folgenden nur einen einzigen Punkt, aber in Beziehung gegen zwei verschiedene Systeme, vorzustellen. Es ist klar, dass, wenn irgend ein Punkt m gegen irgend ein System dreier rechtwinklichter coordinirter Achsen bestimmt wird, und wenn xyz die Coordinaten dieses Punktes sind, bei Veränderung der Lage der Achsen, d. i. wenn man denselben Punkt m gegen ein zweites System rechtwinklichter coordinirter Achsen bezieht, und wenn $x_, y_, z_,$ die rechtwinklichten Coordinaten sind, durch welche die Lage dieses Punktes m gegen das zweite System bestimmt wird, auch die Coordinaten dieses Punktes m eine Veränderung leiden, d. i. dass die Werthe der Coordinaten $x_, y_, z_,$ von den Werthen der Coordinaten xyz im Allgemeinen verschieden sind. Die Werthe der Coordinaten $x_, y_, z_,$ hängen nun einestheils von den Werthen der Coordinaten xyz ab, d. h. jene können in Funktionen von diesen, und umgekehrt, diese in Funktionen von jenen ausgedrückt werden. Der Gegenstand und Zweck der folgenden Untersuchungen ist es nun, die Art und Weise des Zusammenhanges der erstern Coordinaten mit den zweiten d. i. die in Rede stehenden Funktionen aufzufinden. In diesen Funktionen haben aber auch nothwendig noch jene Stücke zu erscheinen, wodurch die Lage des einen Systems gegen das andere bestimmt werde. Die Aufgabe, deren Auflösung wir uns hier vorsetzen, spricht sich auf folgende Weise aus:

Wenn man die Coordinaten eines Punktes gegen ein gewisses Achsen-System, das wir das e r s t e nennen wollen, kennt, und man bezieht denselben Punkt gegen ein anderes von jenem verschiedenes Achsensystem, das wir das z w e i t e nennen wollen; so wird, wenn die Lage des zweiten Systemes gegen das erste gegeben ist, verlangt, die Lage desselben Punktes gegen das zweite System d. i. seine Coordinaten in diesem zweiten Systeme zu finden.

Man hat also die Coordinaten eines Punktes im zweiten Systeme in Funktionen der Coordinaten im ersten Systeme und

derjenigen Stücke auszudrücken, wodurch die Lage des zweiten Systemes gegen das erste fixirt und bestimmt wird.

Hiedurch wird also das Problem von der Transformation der Coordinaten deutlich ausgesprochen, und die Auflösung desselben muss hier gegeben werden, wenn die Theorie der analytischen Bestimmungen der Lagen eines Punktes, womit sich dieses erste Kapitel ausschliesslich beschäftiget, mit der gehörigen Vollständigkeit entwickelt werden soll.

Die Verschiedenheit der drei in den vorhergehenden Untersuchungen betrachteten Coordinaten-Systeme erfordert drei von einander verschiedene Auflösungen des Problemes. Da es nun rechtwinklichte, schiefwinklichte und Polar-Coordinaten giebt; so werden überhaupt drei Arten der Transformationen der Coordinaten zu betrachten seyn. Wir werden also erstlich diejenigen Formeln entwickeln, welche dazu dienen, um von einem Systeme rechtwinklichter coordinirter Achsen zu einem andern Systeme rechtwinklichter coordinirter Achsen überzugehen. Hierauf wollen wir die Entwicklung derjenigen Formeln vornehmen, wodurch man von einem schiefwinklichten Achsensyst me zu einem andern schiefwinklichten übergehen kann. Endlich sollen die Formeln zur Transformation der Polar-Coordinaten unter einander gegeben werden.

Ein jeder dieser drei verschiedenen Fälle soll übrigens so behandelt werden, dass wir die Transformation der Coordinaten zuerst in einer Ebene und hierauf im Raume betrachten wollen.

59. Um die Lage eines Punktes zu bestimmen, ist es bekanntlich hinreichend, die Lage dieses Punktes gegen zwei senkrecht auf einander stehende gerade Linien, wenn er in einer Ebene, und gegen drei gegenseitig auf einander senkrechte Linien, wenn er im Raume liegt, zu wissen; oder, was einerlei ist, die Abstände dieses Punktes von jenen zwei Geraden im ersten, und von den drei coordinirten Ebenen im andern Falle zu kennen.

Es sey nun, um von dem ersten Falle anzufangen, AX, AY (Fig. 31) ein rechtwinklichtes Achsensystem, gegen welches die Lage des Punktes m in der Ebene XAY bezogen, und sein Ort durch die rechtwinklichten Coordinaten $Ax = x$, $pm = y$ bestimmt werde. Wenn itzt in derselben Ebene, in welcher die Achsen AX, AY liegen, ein anderes Paar coordinirter Achsen $A_{,}X_{,}$ und $A_{,}Y_{,}$ gegeben wird, die sich im neuen Anfangspunkte $A_{,}$ schneiden, und man zieht $mp_{,}$ senkrecht auf die neue Achse $A_{,}X_{,}$; so werden $A_{,}p_{,} = x_{,}$ und $p_{,}m_{,} = y_{,}$ die Coordinaten des Punktes m in Beziehung auf das neue System der Achsen $A_{,}X_{,}$ und $A_{,}Y_{,}$ seyn. Es wird nun erfordert, die Relationen zu finden, welche zwischen jenen und diesen Coordinaten, d. i. zwischen $x_{,}y_{,}xy$ statt finden.

Man ziehe durch den neuen Anfangspunkt $A_{,}$ die zu den Achsen AX, AY parallelen Geraden $A_{,}X$ und $A_{,}Y$. Nennt man nun die Coordinaten des neuen Anfangspunktes $A_{,}$ gegen das erste System $AB = a$, $BA_{,} = b$, und den Winkel $XA_{,}X_{,} = \chi$; so sind die Grössen:

$$a \quad b \quad \chi$$

diejenigen Stücke, welche die Lage des zweiten Systems gegen das erste bestimmen. Sind nun diese Grössen gegeben; so wird man die Coordinaten $x_{,}y_{,}$ in Funktionen derselben und der Grössen xy ausdrücken können.

Denn man ziehe vom Durchschnittspunkte q der Ordinate mp mit $A_{,}X$ auf $A_{,}X_{,}$ und auf die Verlängerung von $mp_{,}$ die Perpendikel qr und qs; so hat man:

$$\left.\begin{array}{l} mp_{,} = y_{,} = ms - p_{,}s = (ms - qr) \\ Ap_{,} = x_{,} = A_{,}r + rp_{,} = (A_{,}r + qs) \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

Alles reduzirt sich also auf die Bestimmung der vier Linien ms, qr, $A_{,}r$, qs.

Da nun $A_{,}q = Bp = (x - a)$, $mq = (y - b)$, und da der Winkel bei m gleich χ ist; so hat man in den Dreiecken $A_{,}qr$ und qsm offenbar:

$$\left.\begin{array}{l} A_{,}r = A_{,}q.\cos.\chi = (x-a).\cos.\chi\ ; \\ qr = A_{,}q.\sin.\chi = (x-a).\sin.\chi\ ; \\ ms = qm.\cos.\chi = (y-b).\cos.\chi\ ; \\ qs = qm.\sin.\chi = (y-b).\sin.\chi\ ; \end{array}\right\} \ .\ .\ (b)$$

Setzt man die Werthe dieser vier Linien aus (b) in die Gleichungen (a); so erhält man:

$$\left.\begin{array}{l} y_{,}=(y-b).\cos.\chi-(x-a).\sin.\chi\ ; \\ x_{,}=(x-a).\cos.\chi+(y-b).\sin.\chi\ ; \end{array}\right\} \ .\ .\ .\ .\ .\ (c)$$

Diese Gleichungen (c) geben, wenn sie reduzirt werden:

$$\left.\begin{array}{l} x_{,}=-(a.\cos.\chi+b.\sin.\chi)+(x.\cos.\chi+y.\sin.\chi)\ ; \\ y_{,}=+(a.\sin.\chi-b.\cos.\chi)+(y.\cos.\chi-x.\sin.\chi)\ ; \end{array}\right\} \ .\ .\ (1)$$

Aus diesen zwei Gleichungen findet man umgekehrt die Coordinaten xy in Funktionen der neuen Coordinaten $x'y'$ und der Grössen $ab\chi$. Man findet:

$$\left.\begin{array}{l} x = (a+x_{,}.\cos.\chi-y_{,}.\sin.\chi) \\ y = (b+x_{,}.\sin.\chi+x_{,}.\cos.\chi) \end{array}\right\} \ .\ .\ .\ .\ .\ (2)$$

Da die Lage des zweiten Achsen - Systemes gegen das erste durch die Stücke $ab\chi$ bestimmt wird; so sieht man, dass die Aenderung eines Systemes von der Aenderung dieser Stücke, d. i. von der Aenderung der Lage des Anfangspunktes A, und der Aenderung der Richtung der Achse AX abhänge. Der einfachste Fall ist offenbar derjenige, wo nur die Lage des Anfangspunktes der Coordinaten geändert wird; diess geschieht, wenn die zwei neuen Achsen zu den zwei erstern parallel sind; oder wenn die neuen Achsen dieselbe Richtung behalten, aber der Anfangspunkt der Coordinaten in einen andern Punkt der Ebene übertragen wird. In diesem Falle ist offenbar

$$\chi = 0\ ;$$

folglich werden die Gleichungen (1) und (2) geben

$$\left.\begin{array}{l} x_{,} = x-a\ ;\ \text{und}\ \ x = x_{,}+a\ ; \\ y_{,} = y-b\ ;\ \ .\ .\ .\ \ y = y_{,}+b\ ; \end{array}\right\} \ .\ .\ .\ (3)$$

Bleibt der Anfangspunkt der Coordinaten ungeändert, und ändert sich bloss die Lage der Achsen AX, AY um ihn, so

dass $A_{,}$ mit A zusammenfällt, und $a=o$, $b=o$; so werden für diesen Fall die Gl. (1) und (2):

$$\left.\begin{array}{l} x_{,} = x.\cos.\chi+y.\sin.\chi\ ; \\ y_{,} = y.\cos.\chi-x.\sin.\chi\ ; \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

und

$$\left.\begin{array}{l} x = x_{,}.\cos.\chi-y_{,}.\sin.\chi\ ; \\ y = x_{,}.\sin.\chi+y_{,}.\cos.\chi\ ; \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Man nimmt leicht gewahr, dass die Gleichungen (2), in denen die alten Coordinaten durch die neuen sich ausgedrückt finden, aus den Gleichungen (3) und (5) zusammen bestehen. Es folgt hieraus, dass von den zwei Veränderungen, der Ortsänderung des Anfangspunktes und der Aenderung der Richtungen der Achsen, die eine von der andern gänzlich unabhängig sey, und dass, wenn beide Stücke sich zugleich ändern, die Aenderung der Coordinaten gefunden wird, wenn man die Aenderung der Coordinaten für die Aenderung eines jeden dieser zwei Stücke insbesondere in eine Summe bringt.

60. Betrachten wir itzt (Fig. 32) einen Punkt m im Raume, und es seyen AX, AY, AZ drei rechtwinklichte coordinirte Achsen, auf welche die Lage dieses Punktes m bezogen, und dessen Ort durch die Coordinaten $Ap=x$, $pm=y$, $nm=z$ bestimmt werde. Neben diesem Systeme sey itzt ein zweites System rechtwinklichter Achsen gegeben, das seinen Anfangspunkt zugleich im Anfangspunkte des ersten Systems habe. Wir wollen zuerst den einfachern Fall betrachten, dass von den neuen Achsen $AX_{,}$, $AY_{,}$ und $AZ_{,}$ eine derselben z. B. $AY_{,}$ in der Ebene XAY liege.

Um itzt zuerst von der Bestimmungsart des zweiten Systems gegen das erste eine deutliche Vorstellung zu gewinnen, denke man sich die neue Achse $AX_{,}$ in die Ebene xy projizirt, so, dass wenn AV diese Projektion vorstellt, die Ebene $X_{,}AV$ senkrecht auf der Ebene xy stehe; auf AV ziehe man die Linie $AY_{,}$ senkrecht, so wird diese, der Voraussetzung gemäss die zweite neue Achse seyn. Endlich stelle man sich eine Gerade $AZ_{,}$ senkrecht auf die Ebene $X_{,}AY_{,}$ gezogen vor; so wird

diese die dritte Achse in neuem Systeme seyn. Der Uibergang des einen Systems AX, AY, AZ zum andern $AX_{,}$, $AY_{,}$, $AZ_{,}$ kann also auf folgende Weise geschehen:

Es drehe sich XAY um AZ, bis AX in die Lage AV komme; die Grösse des Drehungswinkels XAV sey $= \chi$; AY kömmt sodann in die Lage $AY_{,}$; und weil $X_{,}AY_{,} = XAY = 90°$; so wird $YAY_{,} = XAV = \chi$. In dieser neuen Lage drehe sich VAZ um $AY_{,}$, bis AV in die Lage $AX_{,}$ komme; die Grösse des Drehungswinkels $VAX_{,}$ sey $= \omega$; AZ kömmt in die Lage AZ'; und weil $VAZ = X_{,}AZ_{,} = 90°$; so wird der Winkel $ZAZ_{,} = VAX = \omega$. Man sieht nun, wie mittelst der beiden Winkel $\chi\omega$ die Lage der Achsen $AX_{,}$, $AY_{,}$, $AZ_{,}$ gegen die ersten AX, AY, AZ bestimmt werde.

Es seyen nun $Ap_{,} = x_{,}$, $p_{,}n_{,} = y_{,}$, $n_{,}m = z_{,}$ die neuen Coordinaten desselben Punktes m.

Um die alten Coordinaten durch die neuen auszudrücken, d. i. um die Funktionen zu finden, welche xyz durch $x_{,}y_{,}z_{,}\chi\omega$ geben, betrachte man erstlich den Punkt m in Bezug auf die AV, $AY_{,}$, AZ. Sind $x'y'z'$ die Coordinaten des Punktes m in Bezug auf diese letztern Achsen, so hat man, gemäss Gleichungen (5) des vorigen Art.:

$$\left.\begin{aligned} x &= x'.\cos.\chi - y'.\sin.\chi ; \\ y &= x'.\sin.\chi + y'.\cos.\chi ; \\ z &= z' ; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (a)$$

Bezieht man itzt die Lage des Punktes m gegen die Achsen $AX_{,}$, $AY_{,}$, $AZ_{,}$, auf welche man von den coordinirten Achsen AV, $AY_{,}$ und AZ in der Ebene $X_{,}AV$ übergeht: so hat man wieder:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x_{,}.\cos.\omega - z_{,}.\sin.\omega ; \\ y' &= y_{,} ; \\ z' &= x_{,}.\sin.\omega + z_{,}.\cos.\omega ; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (b)$$

Setzt man die Werthe von $x'y'z'$ aus den Gleichungen (b) in die Gleichungen (a); so erhält man endlich:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_{,}.\cos.\chi.\cos.\omega - y_{,}.\sin.\chi - z_{,}.\sin.\omega.\cos.\chi\,; \\ y &= x_{,}.\sin.\chi.\cos.\omega + y_{,}.\cos.\chi - z_{,}.\sin.\omega.\sin.\chi\,; \\ z &= x_{,}.\sin.\omega + z_{,}.\cos.\omega\,; \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (1)$$

Umgekehrt lassen sich $x_, y_, z_,$ durch xyz ausdrücken. Aus den Gleichungen (a) findet man nemlich:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x.\cos.\chi + y.\sin.\chi\,; \\ y' &= y.\cos.\chi - x.\sin.\chi\,; \\ z' &= z\,; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (a')$$

und aus den Gleichungen (b) erhält man:

$$\left.\begin{aligned} x_, &= x'.\cos.\omega + z'.\sin.\omega\,; \\ y_, &= y'\,; \\ z_, &= z'.\cos.\omega - x'.\sin.\omega\,; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (b')$$

Setzt man die Werthe von $x'y'z'$ aus den Gleichungen (a') in die Gl. (b); so werden diese geben:

$$\left.\begin{aligned} x_, &= x.\cos.\chi.\cos.\omega + y.\cos.\omega\sin.\chi + z.\sin.\omega\,; \\ y_, &= y.\cos.\chi - x.\sin.\chi\,; \\ z_, &= z.\cos.\omega - y.\sin.\omega.\sin.\chi - x.\sin.\omega.\cos.\chi\,; \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (2)$$

Wenn das zweite System der rechtwinklichten coordinirten Achsen seinen Anfang in einem Punkte des Raumes hat, dessen Coordinaten abc sind; so hat man, der Bemerkung im vorhergehenden Art. zu Folge, wenn $x_, y_, z_,$ die Coordinaten des Punktes m gegen diesen Anfangspunkt sind,

$$\left.\begin{aligned} x &= a + x_{,}.\cos.\chi.\cos.\omega - y_{,}.\sin.\chi - z_{,}.\sin.\omega.\cos.\chi\,; \\ y &= b + x_{,}.\sin.\chi.\cos.\omega + y_{,}.\cos.\chi - z_{,}.\sin.\omega.\sin.\chi\,; \\ z &= c + x_{,}.\sin.\omega + z_{,}.\cos.\omega\,; \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (3)$$

Hieraus kann man umgekehrt $x_, y_, z_,$ durch xyz ausdrücken; man findet diese Gleichungen auch dadurch, dass man $(x-a)$, $(y-b)$, $(z-c)$ in den Gleichungen (2) anstatt xyz setzet.

Die Gleichungen (1) und (2) enthalten die Relationen der sphärischen Trigonometrie, oder diese können hieraus auf eine einfache Art hergeleitet werden. Man nenne die Entfernung des Punktes m vom Anfangspunkte r; die Projektion von r in der Ebene xy mache mit x den Winkel φ, mit r den Winkel ψ; und eben so seyen $\varphi_, \psi_,$ die Winkel, welche die Projektion von r in der Ebene $x_, y_,$ mit $x_,$ und r macht. Man hat nun:

$x = r.\cos.\varphi.\cos.\psi$; $x_, = r.\cos.\varphi_,.\cos.\psi_,$;
$y = r.\sin.\varphi.\cos.\psi$; $y_, = r.\sin.\varphi_,.\cos.\psi_,$;
$z = r.\sin.\psi$; $z_, = r.\sin.\psi_,$;

Setzt man diese Werthe in die Gleichungen (1); so hat man:

$$cs.\varphi.cs.\psi = cs.\varphi_,.cs.\psi_,.cs.\chi.cs\omega - \sin.\varphi_,.cs.\psi_,.\sin.\chi - \sin\psi_,.\sin\omega.cs.\chi$$
$$\sin\varphi.cs\psi = cs.\varphi_,.cs\psi_,.\sin\chi.cs.\omega + \sin.\varphi_,.cs.\psi_,.cs.\chi - \sin.\psi_,.\sin\omega.\sin.\chi$$
$$\sin.\psi = cs\,\varphi_,\,cs.\psi_,.\sin.\omega + \sin.\psi_,.cs.\omega.$$

Setzt man in diesen Gleichungen:

$$\chi = o;$$

so erhält man:

$$\cos.\varphi.\cos.\psi = \cos.\varphi_,.\cos.\psi_,.\cos.\omega - \sin.\psi_,.\sin.\omega;$$
$$\sin.\varphi.\cos.\psi = \sin.\varphi_,.\cos.\psi_,;$$
$$\sin.\psi = \cos.\varphi_,.\cos.\psi_,.\sin.\omega + \sin.\psi_,.\cos.\omega.$$

Bezeichnet man mit $\gamma\gamma_,$ die Winkel, welche r mit z und $z_,$ macht; so ist $\gamma = 90^0 - \psi$; $\gamma_, = 90^0 - \psi_,$; die gefundenen Gleichungen werden dann geben:

$$\left.\begin{array}{l}\cos.\varphi.\sin.\gamma = \cos.\varphi_,.\sin.\gamma_,.\cos.\omega - \cos.\gamma_,.\sin.\omega; \\ \sin.\varphi.\sin.\gamma = \sin.\varphi_,.\sin.\gamma_,; \\ \cos.\gamma = \cos.\varphi_,.\sin.\gamma.\sin.\omega + \cos.\gamma_,.\cos.\omega;\end{array}\right\}$$

Dividirt man die erste durch die zweite; so erhält man

$$\cot.\varphi = \cot.\varphi_,.\cos.\omega - \frac{\cot.\gamma_,.\sin.\omega}{\sin.\varphi_,}$$

oder $$\cot.\varphi.\sin.\varphi_, = \cos.\varphi_,.\cos.\omega - \cot.\gamma_,.\sin.\omega.$$

Man wird leicht einsehen, dass diese Relationen zwischen den Winkeln $\varphi\varphi_,\gamma\gamma_,\omega$ nichts anders sind, als Gleichungen der sphärischen Trigonometrie, welche die Beziehungen zwischen den Seiten und Winkeln eines sphärischen Dreiecks enthalten.

61. Diese so eben betrachtete Transformation der Coordinaten wollen wir dadurch noch allgemeiner machen, dass wir annehmen, die Achse $AY_,$ liege nicht in der Ebene XAY, sondern, wie $AX_,$, ausserhalb der coordinirten Ebenen des ursprünglichen Systemes.

Es seyen nun $AX_,$, $AY_,$, $AZ_,$ (Fig. 33) die drei neuen rechtwinklichten coordinirten Achsen, und $Ap_, = x_,$; $p_,n_, = y_,$; $n_,m_, = z_,$ die drei neuen Coordinaten des Punktes m.

Wenn beide Systeme der coordinirten Achsen denselben Anfangspunkt der Coordinaten haben; so wird die Lage des zweiten Systemes gegen das erste bloss durch Winkel bestimmt.

Diejenigen Winkel, welche die drei neuen Achsen $AX_{\prime}$, $AY_{\prime}$, $AZ_{\prime}$ mit der Achse AX einschliessen, wollen wir respektive auf folgende Art bezeichnen: $(x_{\prime}.x)$, $(y_{\prime}.x)$, $(z_{\prime}.x)$. Auf ähnliche Art sind $(x_{\prime}.y)$, $(y_{\prime}.y)$, $(z_{\prime}.y)$ die Bezeichnungen der Winkel, welche die drei neuen Achsen der $x_{\prime}y_{\prime}z_{\prime}$ mit der Achse y machen. Endlich bezeichnen $(x_{\prime}.z)$, $(y_{\prime}.z)$, $(z_{\prime}.z)$ die Winkel derselben Achsen $x_{\prime}y_{\prime}z_{\prime}$ mit der Achse der z.

Diese Bezeichnungsart der Winkel, welche gerade Linien mit einander einschliessen, ist bequem und vortheilhaft, und wir werden sie auch in der Folge grösstentheils beibehalten.

Projizirt man $Ap_{\prime}$, $p_{\prime}n_{\prime}$ und $n_{\prime}m$ auf die Achse AX, und man denkt sich durch die Punkte $p_{\prime}n_{\prime}m$ Ebenen gelegt, welche senkrecht auf AX stehen; so werden, wie man leicht einsieht, die zwischen diesen parallelen Ebenen enthaltenen Stücke Ar, rs, sp nichts anders seyn, als die Projektionen der neuen Coordinaten $x_{\prime}y_{\prime}z_{\prime}$ auf der Achse AX. Es besteht also $Ap = x$ aus den drei Theilen: $(Ar + rs + sp)$. Da nun

$$Ar = x_{\prime}.\cos.(x_{\prime}.x)\,;\quad rs = y_{\prime}.\cos.(y_{\prime}.x)\,;\quad sp = z_{\prime}.\cos.(z_{\prime}.x)$$

so hat man:

$$x = \{x_{\prime}.\cos.(x_{\prime}.x) + y_{\prime}.\cos.(y_{\prime}.x) + z_{\prime}.\cos.(z_{\prime}.x)\}\ \ldots\ (a)$$

Auf diese Gleichung kann man auch noch gelangen, wenn man die Projektionen von x auf den Achsen der $x_{\prime}y_{\prime}z_{\prime}$ betrachtet. Es ist nemlich die Projektion von x

auf der Achse $AX_{\prime}$ gleich $x_{\prime} = x.\cos.(x_{\prime}.x)$;

. $AY_{\prime}$. . . $y_{\prime} = x.\cos.(y_{\prime}.x)$;

. $AZ_{\prime}$. . . $z_{\prime} = x.\cos.(z_{\prime}.x)$;

Multiplizirt man nun diese drei Gleichungen nach der Reihe respektive mit $\cos.(x_{\prime}.x)$, $\cos.(y_{\prime}.x)$, $\cos.(z_{\prime}.x)$; und addirt sie hierauf; so erhält man:

$$\{x_{\prime}.\cos.(x_{\prime}.x) + y_{\prime}.\cos.(y_{\prime}.x) + z_{\prime}.\cos.(z_{\prime}.x)\} =$$
$$x.\{\cos.^2(x_{\prime}.x) + \cos.^2(y_{\prime}.x) + \cos.^2(z_{\prime}.x)\}\,;$$

Da nun die drei neuen Achsen $x_, y_, z_,$ auf einander senkrecht stehen, so wird der Faktor von x in dieser Gleichung die Einheit seyn; man sieht, dass die so erhaltene Gleichung mit der Gl. (a) übereinkömmt.

Ausser der Gl. (a) giebt es noch zwei ähnliche, welche man auf dieselbe Art findet, wenn man y und z auf die Achsen $x_, y_, z_,$ projizirt. Zwischen den alten Coordinaten xyz und den neuen $x_, y_, z_,$ und zwischen den 9 Winkeln, welche diese mit jenen bilden, werden demnach folgende Relationen statt finden:

$$\left.\begin{aligned} x &= [x_,.\cos.(x_,.x)+y_,.\cos(y_,.x)+z_,.\cos.(z_,.x)] \\ y &= [x_,.\cos.(x_,.y)+y_,.\cos.(y_,.y)+z_,.\cos.(z_,.y)] \\ z &= [x_,.\cos.(x_,.z)+y_,.\cos.(y_,.z)+z_,.\cos.(z_,.z)] \end{aligned}\right\} \ldots (1)$$

Projizirt man hingegen $x_,$ auf die Achsen xyz; so hat man eben so

$$x_, = \{x.\cos.(x_,.x)+y.\cos.(x_,.y)+z.\cos.(x_,.z)\} \quad . \quad . \quad (b)$$

Nebst dieser giebt es noch für $y_,$ und $z_,$ zwei ähnliche Ausdrücke; so dass zwischen xyz; $x_, y_, z_,$ und zwischen den 9 Winkeln, welche sie mit einander machen, noch folgende Relationen bestehen:

$$\left.\begin{aligned} x_, &= [x.\cos.(x_,.x)+y.\cos.(x_,.y)+z.\cos.(x_,.z)] \\ y_, &= [x.\cos.(y_,.x)+y.\cos.(y_,.y)+z.\cos.(y_,.z)] \\ z_, &= [x.\cos.(z_,.x)+y.\cos.(z_,.y)+z.\cos.(z_,.z)] \end{aligned}\right\} \ldots (2)$$

Wenn man die Werthe von $x_, y_, z_,$ aus den Gleichungen (2) in die Gleichungen (1) bringt; so müssen diese identisch werden. Dasselbe muss der Fall seyn, wenn die Werthe von xyz aus den Gl. (1) in die Gl. (2) substituirt werden. Diese Bedingung giebt nachstehende Relationen, welche zwischen den Winkeln, so die Achsen xyz mit den neuen Achsen $x_, y_, z_,$ einschliessen, nothwendigerweise vorhanden sind:

$$\left.\begin{aligned} \cos.^2(x_,.x)+\cos.^2(x_,.y)+\cos.^2(x_,.z) &= 1; \\ \cos.^2(y_,.x)+\cos.^2(y_,.y)+\cos.^2(y_,.z) &= 1; \\ \cos.^2(z_,.x)+\cos.^2(z_,.y)+\cos.^2(z_,.z) &= 1; \end{aligned}\right\} \ldots (3)$$

$$\left.\begin{aligned} cs.(x_,.x).cs.(x_,.y)+cs.(y_,.x).cs.(y_,.y)+cs.(z_,.x).cs.(z_,.y) &= o \\ cs.(x_,.x).cs.(x_,.z)+cs.(y_,.x).cs.(y_,.z)+cs.(z_,.x).cs.(z_,.z) &= o \\ cs.(x_,.y).cs.(x_,.z)+cs.(y_,.y).cs.(y_,.z)+cs.(z_,.y).cs.(z_,.z) &= o \end{aligned}\right\} . (4)$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos^2(x_{,}.x)+\cos^2(y_{,}.x)+\cos^2(z_{,}.x)=1;\\ \cos^2(x_{,}.y)+\cos^2(y_{,}.y)+\cos^2(z_{,}.y)=1;\\ \cos^2(x_{,}.z)+\cos^2(y_{,}.z)+\cos^2(z_{,}.z)=1;\end{array}\right\}\ldots.(5)$$

$$\left.\begin{array}{l}cs.(x_{,}.x).cs.(y_{,}.x)+cs.(x_{,}.y).cs.(y_{,}.y)+cs.(x_{,}.z).cs.(y_{,}.z)=o\\ cs.(x_{,}.x).cs.(z_{,}.x)+cs.(x_{,}.y).cs.(z_{,}.y)+cs.(x_{,}.z).cs.(z_{,}.z)=o\\ cs.(y_{,}.x).cs.(z_{,}.x)+cs.(y_{,}.y).cs.(z_{,}.y)+cs.(y_{,}.z).cs.(z_{,}.z)=o\end{array}\right\}.(6)$$

Diese Relationen findet man auch mittelst des doppelten Ausdruckes der Entfernung des Punktes m vom Anfangspunkte der Coordinaten. Da nemlich dieser Anfangspunkt in beiden Systemen der coordinirten Achsen derselbe ist, so hat man, weil $Am=\sqrt{\{x^2+y^2+z^2\}}$, wenn man m gegen das erste, und weil $Am=\sqrt{\{x_{,}^2+y_{,}^2+z_{,}^2\}}$, wenn man m gegen das zweite System bezieht, die Gleichung:

$$x^2+y^2+z^2=x_{,}^2+y_{,}^2+z_{,}^2 \quad \ldots . (c)$$

Setzt man nun in diese Gleichung die Werthe der Coordinaten xyz aus den Gleichungen (1); so giebt die Vergleichung der einzelnen Glieder (d. i. der Coëffizienten von $x_{,}^2, y_{,}^2, z_{,}^2$ und $x_{,}.y_{,}$, $x_{,}.z_{,}$, $y_{,}.z_{,}$) die Relationen (3) und (6).

Setzt man hingegen in dieselbe Gleichung (c) die Werthe der Coordinaten $x_{,}y_{,}z_{,}$ aus den Gleichungen (2); so giebt eine ähnliche Vergleichung der Glieder die Relationen (5) und (4).

Die Gleichungen (3) drücken nichts anders aus, als die Bedingungen, dass xyz gegenseitig auf einander senkrecht stehen. Und eben so enthalten die Gl. (5) die Bedingungen der gegenseitigen Perpendikularität der Linien $x_{,}y_{,}z_{,}$. Die Gleichungen (4) oder (6) drücken beide Bedingungen zugleich aus.

Da es nun unter den Cosinussen der 9 Winkel, welche die neuen Achsen $x_{,}y_{,}z_{,}$ mit den alten xyz machen, sechs verschiedene Bedingungsgleichungen giebt; so folgt, dass von diesen neun Winkeln nur drei willkührlich seyn können, und dass die andern sechs Winkel schon bestimmt sind, und aus jenen sechs Bedingungsgleichungen gefunden werden können.

Wird die Lage der neuen Achsen $x_{,}y_{,}z_{,}$ gegen die des ersten Systems z. B. durch diejenigen Winkel gegeben, welche

die zwei gleichnamigen Achsen im ersten und zweiten Systeme bilden, d. i. durch die Winkel

$$(x_{\prime}.x)\ ,\quad (y_{\prime}.y)\ ,\quad (z_{\prime}.z)\ ;$$

so lassen sich die andern sechs Winkel aus den Relationen (3) und (4) finden, und in Funktionen der drei gegebenen ausdrücken. Setzt man der Kürze wegen:

$$\left.\begin{array}{l} 1+\cos.(x_{\prime}.x)+\cos.(y_{\prime}.y)+\cos.(z_{\prime}.z)=A;\\ 1+\cos.(x_{\prime}.x)+\cos.(y_{\prime}.y)-\cos.(z_{\prime}.z)=B\ ;\\ 1-\cos.(x_{\prime}.x)+\cos.(y_{\prime}.y)-\cos.(z_{\prime}.z)=C\ ;\\ 1-\cos.(x_{\prime}.x)-\cos.(y_{\prime}.y)+\cos.(z_{\prime}.z)=D\ ; \end{array}\right\}$$

so findet man:

$$\left.\begin{array}{l} \text{cs.}(x_{\prime}.y)=\tfrac{1}{2}.\{\sqrt{B.C}+\sqrt{A.D}\}\ ;\ \text{cs.}(y_{\prime}.x)=\tfrac{1}{2}.\{\sqrt{B.C}-\sqrt{A.D}\}\\ \text{cs.}(z_{\prime}.x)=\tfrac{1}{2}.\{\sqrt{B.D}+\sqrt{A.C}\}\ ;\ \text{cs.}(x_{\prime}.z)=\tfrac{1}{2}.\{\sqrt{B.D}-\sqrt{A.C}\}\\ \text{cs.}(y_{\prime}.z)=\tfrac{1}{2}.\{\sqrt{C.D}+\sqrt{A.B}\}\ ;\ \text{cs.}(z_{\prime}.y)=\tfrac{1}{2}.\{\sqrt{C.D}-\sqrt{A.B}\} \end{array}\right\}(7)$$

Die Gleichungen (3) (4) (5) (6) findet man auch schon in dem Falle bestättiget, den wir im vorigen Art. betrachtet haben. Vergleicht man die daselbst für xyz in den Gl. (1) gefundenen Ausdrücke mit den Ausdrücken des gegenwärtigen Art.; so zeigt es sich, dass:

$$\begin{array}{lll} \cos.(x_{\prime}.x)=\cos.\chi.\cos.\omega; & \cos.(x_{\prime}.y)=\sin.\chi.\cos.\omega; & \cos.(x_{\prime}.z)=\sin.\omega\\ \cos.(y_{\prime}.x)=-\sin.\chi\ ; & \cos.(y_{\prime}.y)=+\cos.\chi\ ; & \cos.(y_{\prime}.z)=o\ ;\\ \cos.(z_{\prime}.x)=-\sin.\omega.\cos.\chi\ ; & \cos.(z_{\prime}.y)=-\sin.\omega.\sin.\chi; & \cos.(z_{\prime}.z)=+\text{cs}.\omega. \end{array}$$

Die Gleichungen (3)..(5) werden identisch, wenn in sie diese Werthe substituirt werden. Die Gleichungen (7) geben noch einige sehr merkwürdige Beziehungen zwischen den Winkeln χ und ω.

62. Nach der Verschiedenheit der Winkel, durch welche die Lage der neuen Achsen gegen die alten bestimmt wird, kann es nun verschiedene Auflösungen des Problems der Transformation der rechtwinklichten coordinirten Achsen geben, und alle nothwendigen Formeln werden sich aus den im vorigen Art. gegebenen Gleichungen und mittelst der Ausdrücke der sphärischen Trigonometrie entwickeln lassen. So z. B. wird,

wie man leicht einsieht, die Lage der drei neuen Achsen gegen die ursprünglichen durch folgende drei Winkel fixirt:

erstens durch den Winkel, den die Projektion der Achse $AX_{\prime}$ in der Ebene xy mit der Achse der x macht;

zweitens durch die Neigung der Achse $AX_{\prime}$ gegen die Ebene xy.

drittens durch die Neigung der Achse $AY_{\prime}$ gegen die Ebene xy.

Oder die Lage des zweiten Systems gegen das erste wird auch noch bestimmt durch folgende drei Winkel:

erstens durch den Winkel, den die Durchschnittslinie der Ebenen xy und $x_{\prime}y_{\prime}$ mit der Achse der x macht;

zweitens durch die Neigung der beiden Ebenen xy und $x_{\prime}y_{\prime}$ gegen einander, oder was dasselbe ist, durch den Winkel, den die Coordinaten z und $z_{\prime}$ mit einander machen;

drittens durch den Winkel, den $AX_{\prime}$ mit der Durchschnittslinie der Ebenen $x_{\prime}y_{\prime}$ und xy bildet.

Beispielshalber wollen wir den Fall betrachten, da die Lagen der Achsen $x_{\prime}y_{\prime}z_{\prime}$ gegen die Achsen xyz durch diese drei zuletzt genannten Winkel bestimmt werden.

Es sey nun der Winkel, welchen die Durchschnittslinie der Ebenen xy und $x_{\prime}y_{\prime}$ mit der Achse AX macht, $=\psi$; der Neigungswinkel dieser beiden Ebenen xy und $x_{\prime}y_{\prime}$ sey $=\vartheta$; und endlich sey der Winkel, den die Achse $AX_{\prime}$ mit der Durchschnittslinie der Ebenen xy und $x_{\prime}y_{\prime}$ macht, $=\varphi$. Es ist einleuchtend, dass durch diese drei Winkel

$$\psi \quad \vartheta \quad \varphi$$

die Lagen der drei Achsen $AX_{\prime}$, $AY_{\prime}$ und $AZ_{\prime}$ gegen die Achsen AX, AY und AZ bestimmt seyen. Zur Auflösung des Problems ist in diesem Falle nichts anders erforderlich, als die Cosinusse der neun Winkel, welche in den Formeln (1) (2) Art. 61 vorkommen, in Funktionen dieser drei Winkel $\psi\vartheta\varphi$ auszudrücken. Diese Ausdrücke ergeben sich aber unmittelbar aus den Relationen der sphärischen Trigonometrie.

Man findet auf diese Art:

$$\left.\begin{array}{l}
\cos.(x_{,}.x)=(\sin.\varphi.\sin.\psi.\cos.\vartheta+\cos.\varphi.\cos.\psi)\\
\cos.(y_{,}.x)=(\cos.\varphi.\sin.\psi.\cos.\vartheta-\sin.\varphi.\cos.\psi)\\
\cos.(z_{,}.x)=\sin.\psi.\sin.\vartheta;\\
\cos.(x_{,}.y)=(\sin.\varphi.\cos.\psi.\cos.\vartheta-\cos.\varphi.\sin.\psi)\\
\cos.(y_{,}.y)=(\cos.\varphi.\cos.\psi.\cos.\vartheta+\sin.\varphi.\sin.\psi)\\
\cos.(z_{,}.y)=\cos.\psi.\sin.\vartheta;\\
\cos.(x_{,}.z)=-\sin.\varphi.\sin.\vartheta;\\
\cos.(y_{,}.z)=-\cos.\varphi.\sin.\vartheta;\\
\cos.(z_{,}.z)=+\cos.\vartheta.
\end{array}\right\}\quad\ldots(1)$$

Werden diese Ausdrücke in die allgemeinen Gleichungen (1) (2) des Art. 61 substituirt: so entstehen nachfolgende Gl.:

$$\left.\begin{array}{l}
x=x_{,}.\{\sin.\varphi.\sin.\psi.\cos.\vartheta+\cos.\varphi.\cos.\psi\}\\
\quad+y_{,}.\{\cos.\varphi.\sin.\psi.\cos.\vartheta-\sin.\varphi.\cos.\psi\}\\
\quad+z_{,}.\sin.\psi.\sin.\vartheta;\\
y=x_{,}.\{\sin.\varphi.\cos.\psi.\cos.\vartheta-\cos.\varphi.\sin.\psi\}\\
\quad+y_{,}.\{\cos.\varphi.\cos.\psi.\cos.\vartheta+\sin.\varphi.\sin.\psi\}\\
\quad+z_{,}.\sin.\vartheta.\cos.\psi;\\
z=-x_{,}.\sin.\vartheta.\sin.\varphi-y_{,}.\sin.\vartheta.\cos.\varphi+z_{,}.\cos.\vartheta.
\end{array}\right\}\quad\ldots(2)$$

Und umgekehrt:

$$\left.\begin{array}{l}
x_{,}=x.\{\sin.\varphi.\sin.\psi.\cos.\vartheta+\cos.\varphi.\cos.\psi\}\\
\quad+y.\{\sin.\varphi.\cos.\psi.\cos.\vartheta-\cos.\varphi.\sin.\psi\}\\
\quad-z.\sin.\varphi.\sin.\vartheta;\\
y_{,}=x.\{\cos.\varphi.\sin.\psi.\cos.\vartheta-\sin.\varphi.\cos.\psi\}\\
\quad+y.\{\cos.\varphi.\cos.\psi.\cos.\vartheta+\sin.\varphi.\sin.\psi\}\\
\quad-z.\sin.\vartheta.\cos.\varphi;\\
z_{,}=-x.\sin.\vartheta.\sin.\psi+y.\cos.\psi.\sin.\vartheta+z.\cos.\vartheta.
\end{array}\right\}\quad\ldots(3)$$

63. Ohne der Gleichungen der sphärischen Trigonometrie zu bedürfen, und durch ein ähnliches im Art. 60 gebrauchtes Verfahren kann man auf die Gleichungen des vorigen Art. gelangen. Zieht man nemlich durch den Anfangspunkt der Coordinaten in der Ebene xy eine Gerade, welche mit der Achse der x den Winkel ψ bildet, oder lässt man die Achsen AX, AY in der Ebene xy um die unbewegliche Achse AZ zu gleicher Zeit um einen Winkel $=\psi$ fortrücken; und sieht man

diese Gerade, die wir AX' nennen wollen, als eine neue Achse an; bezeichnet man ferner mit AY', welche in der Ebene xy auf AX senkrecht steht, die zweite, und mit AZ', welche auf der Ebene $X'AY'$ senkrecht steht, und folglich, weil diese letzte Ebene die der xy ist, mit AZ zusammenfällt, die dritte Achse; d. h. sieht man die Linien AX', AY', AZ', welche die neuen Lagen der ursprünglichen Achsen AX, AY, AZ nach dieser Drehung der Ebene XAY um die Achse AZ sind, als drei neue Achsen an; so wird man für die Coordinaten des Punktes m in Bezug auf diese Achsen AX', AY', AZ', welche wir mit $x'y'z'$ bezeichnen, nachstehende Gleichungen haben:

$$\left.\begin{array}{l} x = x'.\text{cs}.\psi + y'.\sin.\psi \\ y = y'.\text{cs}.\psi - x'.\sin.\psi \\ z = z'; \end{array}\right\} \ldots (a) \quad \text{und umgekehrt} \quad \left.\begin{array}{l} x' = x.\text{cs}.\psi - y.\sin.\psi \\ y' = x.\sin.\psi + y.\text{cs}.\psi \\ z' = z; \end{array}\right\} (a')$$

Wenn man sich durch die Achse AX' eine Ebene gelegt denkt, welche gegen die Ebene xy unter dem Winkel ϑ geneigt ist; oder, was einerlei ist, wenn man die Ebene $Y'AZ'$ um die unbewegliche Linie AX' um einen Winkel $= \vartheta$ fortrücken lässt; so komme dadurch AY' in die Lage AY'', und AZ' in die Lage AZ''. Bezeichnet man die Achse AX' jenen analog mit AX''; so kann man sagen, dass die Achsen AX', AY', AZ' itzt in die Lage AX'', AY'' und AZ'' übergehen. Bezeichnet man in diesem letzten Systeme coordinirter Achsen die Coordinaten des Punktes m mit $x''y''z''$; so hat man wieder:

$$\left.\begin{array}{l} x' = x''; \\ y' = y''.\text{cs}.\vartheta + z''.\sin.\vartheta \\ z' = z''.\text{cs}.\vartheta - y''.\sin.\vartheta \end{array}\right\} . (b) \quad \text{und umgekehrt} \quad \left.\begin{array}{l} x'' = x'; \\ y'' = y'.\text{cs}.\vartheta - z'\sin.\vartheta \\ z'' = z'.\text{cs}.\vartheta + y'.\sin.\vartheta \end{array}\right\} (b')$$

Zieht man endlich in der Ebene $X''AY''$ durch den Anfangspunkt der Coordinaten eine Gerade AX', welche mit AX'' oder AX' (indem diese beiden Achsen einerlei sind) den Winkel φ macht; d. i. lässt man die Achsen AX'' und AY'' um die unbewegliche Achse AZ'' sich um einen Winkel $= \varphi$ fortbewegen; so komme dadurch AX'' in die Lage $AX_,$; und AY'' in die Lage $AY_,$. Diesen Bezeichnungen der zwei

Achsen $AX_{,}$ und $AY_{,}$ analog sey die dritte coordinirte Achse in diesem Systeme, welche mit AZ'' einerlei ist, $AZ_{,}$, und die Coordinaten des Punktes m in Bezug auf diese letztern Achsen seyen $x_{,}y_{,}z_{,}$. Man hat dann wieder:

$$\left.\begin{array}{l} x''=x_{,}.\text{cs}.\varphi-y_{,}.\sin.\varphi \\ y''=y_{,}.\text{cs}.\varphi+x_{,}.\sin.\varphi \\ z''=z_{,}; \end{array}\right\} .\ (c) \quad \text{u. umgekehrt} \quad \left.\begin{array}{l} x_{,}=y''.\sin.\varphi+x''.\text{cs}.\varphi \\ y_{,}=y''.\text{cs}.\varphi-x''.\sin.\varphi \\ z_{,}=z''. \end{array}\right\} (c')$$

Diese Betrachtungen geben den allmähligen Uibergang des ursprünglichen Systems AX, AY und AZ in das System der Achsen $AX_{,}$, $AY_{,}$ und $AZ_{,}$ deutlich zu erkennen.

Setzt man nun die Werthe der Coordinaten $x''y''z''$ und $x'y'z'$ aus den Gleichungen (c) (b) in die Gleichungen (a); so ergeben sich von selbst die Gl. (2); und setzt man die Werthe von $x'y'z'$ und $x''y''z''$ aus den Gl. $(a')(b')$ in die Gl. (c'); so kommen die Gleichungen (3) des vorhergehenden Art. zum Vorschein.

64. Wir wollen itzt annehmen, dass die Lage eines Punktes durch schiefwinklichte Coordinaten bestimmt werde, und wir wollen nun die allgemeinen Formeln entwickeln, um von einem schiefwinklichten Coordinatensysteme zu einem andern überzugehen.

Zuerst soll der Fall betrachtet werden, da der Punkt zugleich in einer der coordinirten Ebenen, z. B. in der Ebene xy (Fig. 34) liege. Es seyen nun AX und AY die schiefwinklichten coordinirten Achsen, gegen welche ein Punkt m bezogen und durch die Coordinaten $Ap = x$, $pm = y$ bestimmt werde. Ferner seyen $A_{,}X_{,}$ und $A_{,}Y_{,}$ ein zweites schiefwinklichtes Coordinatensystem, und es seyen in Beziehung auf dasselbe $A_{,}p = x_{,}$ und $p_{,}m = y_{,}$ die Coordinaten desselben Punktes m. Wir haben hier angenommen, dass der Anfangspunkt der Coordinaten in dem einem Systeme von dem des andern Systemes verschieden sey. Zur Bestimmung der Lage des zweiten Systemes gegen das erste setze man, nachdem man $A_{,}X'$ zu AX parallel gezogen hat, den Winkel $X_{,}AX' = \chi$, und $AB = a$, $BA_{,} = b$ seyen die Coordinaten des Anfangspunktes

$A_,$ des zweiten Systemes in Beziehung auf das erste. Diese werden nun die Lage des Punktes $A_,$, und der Winkel χ wird die Lage der Achse $A_,X_,$ fixiren. Es sey ferner $XAY = \nu$ der Coordinatenwinkel des ersten, und $X_,AY_, = \nu_,$ der Coordinatenwinkel des zweiten Systemes.

Um die alten Coordinaten durch die neuen auszudrücken, ziehe man durch den Punkt $p_,$ die zu AX und AY parallelen Linien $p_,s$ und $p_,r$, welche die Coordinate pm in s, und die Linie $A_,X'$ in r treffen. Endlich schneide $A_,X'$ die Ordinate pm im Punkte q.

Man hat nun offenbar:

$$\left.\begin{array}{l} Ap = x = AB + Bp = a + A_,r + p_,s \\ mp = y = A_,B + mq = b + p_,r + ms \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

Alles reduzirt sich darauf, die vier Linien $A_,r$, $p_,s$, $p_,r$ und ms zu bestimmen. In den Dreiecken $A_,rp_,$ und $p_,sm$ hat man nun:

$$A_,r : p_,r : A_,p_, = \sin.(\nu - \chi) : \sin.\chi : \sin.\nu;$$

$$p_,s : ms : mp_, = \sin.(\nu - \nu_, - \chi) : \sin.(\nu_, + \chi) : \sin.\nu;$$

folglich erhält man hieraus:

$$\left.\begin{array}{l} A_,r = \dfrac{x_,.\sin.(\nu - \chi)}{\sin.\nu}; \quad p_,r = \dfrac{x_,.\sin.\chi}{\sin.\nu} \\ p_,s = \dfrac{y_,.\sin.(\nu - \nu_, - \chi)}{\sin.\nu}; \quad ms = \dfrac{y_,.\sin.(\nu_, + \chi)}{\sin.\nu} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (b)$$

Setzt man diese Werthe (b) in die Gleichungen (a); so erhält man:

$$\left.\begin{array}{l} x = a + x_,.\dfrac{\sin.(\nu - \chi)}{\sin.\nu} + y_,.\dfrac{\sin.(\nu - \nu_, - \gamma)}{\sin.\nu} \\ y = b + x_,.\dfrac{\sin.\chi}{\sin.\nu} + y_,\dfrac{\sin.(\nu_, + \chi)}{\sin.\nu}; \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (1)$$

Diese sind die allgemeinsten Formeln der Transformation der Coordinaten in einer Ebene; es ist nun leicht, noch einige besondere Formeln aus ihnen herzuleiten.

Wenn der Coordinatenwinkel in beiden Systemen derselbe ist, d. i. $\nu = \nu_,$; dann hat man:

$$\left.\begin{aligned} x &= a + x_{,}.\frac{\sin.(\nu-\chi)}{\sin.\nu} - y_{,}.\frac{\sin.\chi}{\sin.\nu}\,; \\ y &= b + x_{,}.\frac{\sin.\chi}{\sin.\nu} + y_{,}.\frac{\sin.(\nu+\chi)}{\sin.\nu}\,; \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (2)$$

Wenn noch überdiess $\chi = 0$, d. i. wenn sich bloss der Anfangspunkt der Coordinaten ändert, aber die Richtungen der Achsen unveränderlich dieselben verbleiben; dann hat man, wie bekannt:

$$\left.\begin{aligned} x &= a + x_{,}\,; \\ y &= b + y_{,}\,; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Will man von einem rechtwinklichten Systeme zu einem Systeme schiefwinklichter Achsen übergehen; so braucht man in den Formeln (1) nur $\nu = 90^0$ zu setzen; man hat dann

$$\left.\begin{aligned} x &= a + x_{,}.\cos.\chi + y_{,}.\cos.(\nu_{,}+\chi)\,; \\ y &= b + x_{,}.\sin.\chi + y_{,}.\sin.(\nu_{,}+\chi)\,; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Ist das zweite System auch ein rechtwinklichtes; so ist auch $\nu_{,} = 90^0$, und man hat wegen:

$$\cos.(90^0+\chi) = -\sin.\chi\,; \quad \sin.(90^0+\chi) = +\cos.\chi\,;$$

die Formeln:

$$\left.\begin{aligned} x &= a + x_{,}.\cos.\chi - y_{,}.\sin.\chi\,; \\ y &= b + x_{,}.\sin.\chi + y_{,}.\cos.\chi\,; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

welche mit den Gleichungen (2) Art. 59 übereinkommen.

Will man von einem schiefwinklichten Systeme zu einem rechtwinklichten übergehen, so setze man in den Gleichungen (1) $\nu_{,} = 90^0$; man erhält:

$$\left.\begin{aligned} x &= a + x_{,}.\frac{\sin.(\nu-\chi)}{\sin.\nu} - y_{,}.\frac{\cos.(\nu-\chi)}{\sin.\nu}\,; \\ y &= b + x_{,}.\frac{\sin.\chi}{\sin.\nu} + y_{,}.\frac{\cos.\chi}{\sin.\nu}\,. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (6)$$

Wenn der Anfangspunkt der Coordinaten ungeändert bleibt, dann braucht man in diesen Gleichungen nur $a = 0$, $b = 0$ zu setzen.

Will man $x_{,}y_{,}$ durch xy ausdrücken, so braucht man nur die Gl. (1) in Bezug auf $x_{,}y_{,}$ aufzulösen, und man bekömmt:

$$\left.\begin{aligned} x_{,} &= \frac{[(x-a).\sin.(\nu_{,}+\chi)-(y-b).\sin.(\nu-\nu_{,}-\chi)]\,.\sin.\nu}{\sin.(\nu-\chi)\sin.(\nu_{,}+\chi)-\sin.\chi.\sin.(\nu-\nu_{,}-\chi)}\,; \\ x_{,} &= \frac{[(y-b).\sin.(\nu-\chi)-(x-a).\sin.\nu.\sin\chi]\,.\sin.\nu}{\sin.(\nu-\chi).\sin.(\nu_{,}+\chi)-\sin.\chi.\sin.(\nu-\nu_{,}-\chi)}\,; \end{aligned}\right\}\quad(7)$$

65. Wird die Lage eines Punktes durch drei schiefwinklichte Coordinaten gegeben, und man will von diesem Systeme zu einem andern Systeme schiefwinklichter Coordinaten übergehen; so ist es vortheilhaft, die Lage eines jeden dieser zwei Systeme gegen ein System rechtwinklichter coordinirter Achsen zu betrachten.

Es seyen also die schiefen Coordinaten eines Punktes m gegen einander unter den Winkeln $\lambda\mu\nu$ geneigt, und es seyen xyz die schiefwinklichten Coordinaten dieses Punktes m. Aehnliche Stücke bedeuten $\lambda_{,}\mu_{,}\nu_{,}x_{,}y_{,}z_{,}$ im andern Systeme der schiefwinklichten Coordinaten. Zugleich wird vorausgesetzt, dass beide Systeme, so wie das der rechtwinklichten Coordinaten, welche mit $x'y'z'$ bezeichnet werden sollen, einen und denselben Anfangspunkt haben. Die Winkel, welche die Achse der x mit den Achsen der $x'y'z'$ bilden, sollen wieder, wie oben, mit $(x.x')$, $(x.y')$, $(x.z')$, und so alle übrigen bezeichnet werden.

Projizirt man die Coordinaten xyz auf die rechtwinklichten Achsen $x'y'z'$, und bemerkt, dass die Summe ihrer Projektionen, d. i.

$$\{\, x.\cos.(x'.x)+y.\cos.(x'.y)+z.\cos.(x'.z) \,\}$$

so gross sey, als x'; und so von den andern; so erhält man folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x.\cos.(x'.x)+y.\cos.(x'.y)+z.\cos.(x'.z)\,; \\ y' &= x.\cos.(y'.x)+y.\cos.(y'.y)+z.\cos.(y'.z)\,; \\ z' &= x.\cos.(z'.x)+y.\cos.(z'.y)+z.\cos.(z'.z)\,; \end{aligned}\right\}\quad\ldots (a)$$

Aber die neun Coëffizienten der Coordinaten xyz in diesen drei Gleichungen sind durch folgende Bedingungsgleichungen mit einander verbunden:

$$\left.\begin{array}{l}\cos^2(x'.x)+\cos^2(x'.y)+\cos^2(x'.z)=1;\\ \cos^2(y'.x)+\cos^2(y'.y)+\cos^2(y'.z)=1;\\ \cos^2(z'.x)+\cos^2(z'.y)+\cos^2(z'.z)=1;\end{array}\right\}\quad .\ .\ (\alpha)$$

$$\left.\begin{array}{l}cs.(x'.x)cs.(x'.y)+cs.(y'.x).cs.(y'.y)+cs.(z'.x).cs.(z'.y)=cs.\nu\\ cs.(x'.x)cs(x.'z)+cs.(y'.x).cs.(y'.z)+cs.(z'.x).cs.(z'.z)=cs.\mu\\ cs.(x'.y).cs.(x'.z)+cs.(y'.y).cs.(y'.z)+cs.(z'.y).cs.(z'.z)=cs.\lambda\end{array}\right\}(\alpha')$$

Bezieht man die Coordinaten $x_{,}y_{,}z_{,}$ des andern schiefwinklichten Systems gegen die rechtwinklichten coordinirten Achsen; so hat man eben so:

$$\left.\begin{array}{l}x'=x_{,}.\cos.(x'.x_{,})+y_{,}.\cos.(x'.y_{,})+z_{,}.\cos.(x'.z_{,});\\ y'=x_{,}.\cos.(y'.x_{,})+y_{,}.\cos.(y'.y_{,})+z_{,}.\cos.(y'.z_{,});\\ z'=x_{,}.\cos.(z'.x_{,})+y_{,}.\cos.(z'.y_{,})+z_{,}.\cos.(z'.z_{,});\end{array}\right\}\quad (b)$$

und die Bedingungsgleichungen sind:

$$\left.\begin{array}{l}\cos^2(x'x_{,})+\cos^2(x'.y_{,})+\cos^2(x'.z_{,})=1;\\ \cos^2(y'.x_{,})+\cos^2(y'.y_{,})+\cos^2(y'.z_{,})=1;\\ \cos^2(z'.x_{,})+\cos^2(z'.y_{,})+\cos^2(z'.z_{,})=1;\end{array}\right\}\quad .\ (\beta)$$

$$\left.\begin{array}{l}cs(x'.x_{,}).cs(x'.y_{,})+cs(y'.x_{,}).cs(y'.y_{,})+cs(z'.x_{,}).cs(z'.y_{,})=cs\,\nu_{,}\\ cs(x'.x_{,}).cs(x'.z_{,})+cs(y'.x_{,}).cs(y'.z_{,})+cs(z'.x_{,}).cs(z'.z_{,})=cs\mu_{,}\\ cs(x'.y_{,}).cs(x'.z_{,})+cs(y'.y_{,}).cs(y'.z_{,})+cs(z'.y_{,}).cs(z'.z_{,})=cs\lambda_{,}\end{array}\right\}\quad (\beta')$$

Setzt man nun die Werthe von $x'y'z'$ in den Gleichungen (a) und (b) einander gleich; so erhält man die Relationen zwischen den Coordinaten xyz des ersten und den Coordinaten $x_{,}y_{,}z_{,}$ des zweiten Systems schiefwinklichter Coordinaten. Ihre Auflösung führt auf linearische Gleichungen von folgender Form:

$$\left.\begin{array}{l}x=a'.x_{,}+b'.y_{,}+c'.z_{,};\\ y=a''.x_{,}+b''.y_{,}+c''.z_{,};\\ z=a'''x_{,}+b'''.y_{,}+c'''.z_{,};\end{array}\right\}\quad .\ .\ .\ (1)$$

Und umgekehrt:

$$\left.\begin{array}{l}x_{,}=a_{,}.x+b_{,}.y+c_{,}.z;\\ y_{,}=a_{,,}.x+b_{,,}.y+c_{,,}.z;\\ z_{,}=a_{,,,}.x+b_{,,,}y+c_{,,,}z;\end{array}\right\}\quad .\ .\ .\ (2)$$

Die Coëffizienten $a'b'c'$ u. s. w. in diesen Gleichungen sind insgesammt Funktionen der Cosinusse der Winkel, welche die Achsen $x\,y\,z\,x_{,}y_{,}z_{,}$ mit den Achsen $x'y'z'$ machen, und

der Winkel $\lambda\mu\nu\lambda_,\mu_,\nu_,$. Mittelst der Gleichungen (α) (α') (β) (β') lassen sich aber zwölf jener Winkel eliminiren; und man kann also die in Rede stehenden Coëffizienten als Funktionen der sechs Winkel $\lambda\mu\nu\lambda_,\mu_,\nu_,$ und sechs anderer Winkel, durch welche die Lage sowohl des einen als des andern Systemes gegen das rechtwinklichte Coordinatensystem bestimmt wird, z. B. der Winkel $(x.x')$, $(x_,.x')$; $(y.y')$, $(y_,.y')$; $(z.z')$ und $(z_,.z')$ betrachten. Sind aber die Winkel gegeben, welche die Lage des zweiten Systemes schiefwinklichter Coordinaten gegen das erste bestimmen, so wird man, mit Hilfe der Relationen der sphärischen Trigonometrie durch diese gegebenen Winkel jene sechs Winkel ausdrücken können, so dass in den Funktionen $a'b'c'$ keine andere Winkel erscheinen werden, als diejenigen, welche die Lage des zweiten Systems gegen das erste fixiren, und die Winkel $\lambda\mu\nu\lambda_,\mu_,\nu_,$.

66. Bemerkt man, dass die Entfernung des Punktes m vom Anfangspunkte der Coordinaten auf eine doppelte Weise ausgedrückt werden kann, nemlich durch die Coordinaten xyz sowohl, als auch durch die Coordinaten $x_,y_,z_,$; so wird man haben, vermöge Gl. Art. 23:

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2+2xy.\cos.\nu+2xz.\cos.\mu+2yz.\cos.\nu= \\ x_,^2+y_,^2+z_,^2+2x_,y_,.\cos.\nu_,+2x_,z_,.\cos.\mu_,+2y_,z_,.\cos.\nu_,\,; \end{array}\right\}$$

Setzt man in diese Gleichung die Werthe von $x_,y_,z_,$ aus den Gl. (2) so erhält man durch Vergleichung:

$$\left.\begin{array}{l} 1=a^2_,+a^2_{,,}+a^2_{,,,}+2.[a_,.a_{,,}.\mathrm{cs}.\nu_,+a_,a_{,,,}\,\mathrm{cs}.\mu_,+a_{,,}.a_{,,,}.\mathrm{cs}.\lambda_,] \\ 1=b^2_,+b^2_{,,}+b^2_{,,,}+2.[b_,.b_{,,}.\mathrm{cs}.\nu_,+b_,.b_{,,,}.\mathrm{cs}.\mu_,+b_{,,}.b_{,,,}.\mathrm{cs}.\lambda_,] \\ 1=c^2_,+c^2_{,,}+c^2_{,,,}+2.[c_,.c_{,,}.\mathrm{cs}.\nu_,+c_,.c_{,,,}.\mathrm{cs}.\mu_,+c_{,,}.c_{,,,}.\mathrm{cs}.\lambda_,] \end{array}\right\}(a_,)$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{cs}.\nu=a_,.b_,+a_{,,}.b_{,,}+a_{,,,}.b_{,,,}+2.[C_{,,,}.\mathrm{cs}.\nu_,+C_{,,}.\mathrm{cs}.\mu_,+C_,.\mathrm{cs}.\lambda_,] \\ \mathrm{cs}.\mu=a_,.c_,+a_{,,}.c_{,,}+a_{,,,}.c_{,,,}+2.[B_{,,,}.\mathrm{cs}.\nu_,+B_{,,}.\mathrm{cs}.\mu_,+B_,.\mathrm{cs}.\lambda_,] \\ \mathrm{cs}.\lambda=b_,.c_,+b_{,,}.c_{,,}+b_{,,,}.c_{,,,}+2.[A_{,,,}.\mathrm{cs}.\nu_,+A_{,,}.\mathrm{cs}.\mu_,+A_,.\mathrm{cs}.\lambda_,] \end{array}\right\}(b_,)$$

Setzt man hingegen xyz aus der Gl. (1) des vorig. Art. in die obige Gl.; so hat man:

$$\left.\begin{array}{l} 1=a'^2+a''^2+a'''^2+2.[a'a''.\cos.\nu+a'a'''.\cos.\mu+a''a'''.\cos.\lambda] \\ 1=b'^2+b''^2+b'''^2+2.[b'b''.\cos.\nu+b'b'''.\cos.\mu+b''b'''.\cos.\lambda] \\ 1=c'^2+c''^2+c'''^2+2.[c'c''.\cos.\nu+c'c'''.\cos.\mu+c''c'''.\cos.\lambda] \end{array}\right\}(a')$$

$$\left.\begin{array}{l} cs.\nu_{,} = a'b'+a''b''+a'''b'''+2.[C'''.\,cs.\nu+C''.\,cs.\mu+C'.cs.\lambda] \\ cs.\mu_{,} = a'c'+a''c''+a'''c'''+2.[B'''.\,cs.\nu+B''.\,cs.\mu+B'.cs.\lambda] \\ cs.\lambda_{,} = b'c'+b''c''+b'''c'''+2.[A'''.cs.\nu+A''.cs.\mu+A'.cs.\lambda] \end{array}\right\} (b')$$

in welchen Gleichungen der Kürze wegen gesetzt worden ist:

$$\left.\begin{array}{l} (a_{,}b_{,,}+a_{,,}b_{,}) = C_{,,,};\ (a_{,}c_{,,}+a_{,,}c_{,}) = B_{,,,};\ (b_{,}c_{,,}+b_{,,}c_{,}) = A_{,,,}; \\ (a_{,}b_{,,,}+a_{,,,}b_{,}) = C_{,,};\ (a_{,}c_{,,,}+a_{,,,}c_{,}) = B_{,,};\ (b_{,}c_{,,,}+b_{,,,}c_{,}) = A_{,,}; \\ (a_{,,}b_{,,,}+a_{,,,}b_{,,} = C_{,};\ (a_{,,}c_{,,,}+a_{,,,}c_{,,}) = B_{,};\ (b_{,,}c_{,,,}+b_{,,,}c_{,,}) = A_{,}; \end{array}\right\}$$

Wenn $\lambda\mu\nu$ und $\lambda_{,}\mu_{,}\nu_{,}$ rechte Winkel sind; so werden die Cosinusse derselben $=0$, und die Gleichungen $(a_{,})$ $(b_{,})$ (a') (b') gehen in folgende über:

$$\left.\begin{array}{l} 1 = a^2_{,}+a^2_{,,}+a^2_{,,,}; \\ 1 = b^2_{,}+b^2_{,,}+b^2_{,,,}; \\ 1 = c^2_{,}+c^2_{,,}+c^2_{,,,}; \end{array}\right\} \ldots\ldots (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} 0 = a_{,}.b_{,}+a_{,,}.b_{,,}+a_{,,,}.b_{,,,}; \\ 0 = a_{,}.c_{,}=a_{,,}.c_{,,}+a_{,,,}.c_{,,,}; \\ 0 = b_{,}.c_{,}+b_{,,}.c_{,,}+b_{,,,}.c_{,,,}; \end{array}\right\} \ldots\ldots (2)$$

Denn in diesem Falle ist:

$a'=a_{,}$, $a''=b_{,}$, $a'''=c_{,}$
$b'=a_{,,}$, $b''=b_{,,}$; $b'''=c_{,,}$
$c'=a_{,,,}$, $c''=b_{,,,}$, $c'''=c'''$

weil die Gl. (1) (2) des vorigen Art. mit den Gl. (1) (2) einerlei sind.

$$\left.\begin{array}{l} 1 = a^2_{,}+b^2_{,}+c^2_{,} \\ 1 = a^2_{,,}+b^2_{,,}+c^2_{,,} \\ 1 = a^2_{,,,}+b^2_{,,,}+c^2_{,,,} \end{array}\right\} \ldots (3)$$

$$\left.\begin{array}{l} 0 = a_{,}.a_{,,}+b_{,}.b_{,,}+c_{,}.c_{,,} \\ 0 = a_{,}.a_{,,,}+b_{,}.b_{,,,}+c_{,}.c_{,,,} \\ 0 = a_{,,}.a_{,,,}+b_{,,}.b_{,,,}+c_{,,}.c_{,,,} \end{array}\right\} . (4)$$

Diese vier Systeme von Gleichungen sind mit den Gl. (3) (4) (5) (6) Art. 61 dieselben. Von den neun Coëffizienten $a_{,}a_{,,}$ u. s. w. bleiben also drei willkührlich, und die übrigen sechs lassen sich in Funktionen dieser drei Coëffizienten ausdrücken; sie sind nichts anders, als die drei Stücke, durch welche die Lage des zweiten Systemes gegen das erste bestimmt wird.

Aus diesen Relationen zwischen den Coëffizienten $a_{,}a_{,,}\ldots$ lassen sich noch eine Menge anderer ableiten. So z. B. ist

$$a_{,}.(a_{,}+b_{,}+c_{,})+a_{,,}.(a_{,,}+b_{,,}+c_{,,})+a_{,,,}.(a_{,,,}+b_{,,,}+c_{,,,}) = 1$$

$$(a_{,}+b_{,}+c_{,})^2+(a_{,,}+b_{,,}+c_{,,})^2+(a_{,,,}+b_{,,,}+c_{,,,})^2 = 3$$

$$(a_{,}+b_{,})^2+(a_{,,}+b_{,,})^2+(a_{,,,}+b_{,,,})^2 = 1$$

$$(a_{,}+c_{,})^2+(a_{,,}+c_{,,})^2+(a_{,,,}+c_{,,,})^2 = 1$$
$$(b_{,}+c_{,})^2+(b_{,,}+c_{,,})^2+(b_{,,,}+c_{,,,})^2 = 1$$
$$(a_{,}b_{,,}-a_{,,}b_{,})^2+(a_{,}c_{,,}-a_{,,}c_{,})^2+(b_{,}c_{,,}-b_{,,}c_{,})^2 = 1$$
$$(a_{,}b_{,,,}-a_{,,,}b_{,})^2+(a_{,}c_{,,,}-a_{,,,}c_{,})^2+(b_{,}c_{,,,}-b_{,,}c_{,,,}) = 1$$
$$(a_{,,}b_{,,,}-a_{,,,}b_{,,})^2+(a_{,,}c_{,,,}-a_{,,,}c_{,,})^2+(b_{,,}c_{,,,}-b_{,,,}c_{,,}) = 1$$
$$a_{,}.(a_{,,,}c_{,,}-a_{,,}c_{,,,})+a_{,,}.(a_{,}c_{,,,}-a_{,,,}c_{,})+a_{,,,}.(a_{,,}c_{,}-a_{,}c_{,,}) = 0$$
$$b_{,}.(b_{,,}c_{,,,}-b_{,,,}c_{,,})+b_{,,}.(b_{,,,}c_{,}-b_{,}c_{,,,})+b_{,,,}.(b_{,}c_{,,}-b_{,,}c_{,}) = 0$$
$$c_{,}.(b_{,,}c_{,,,}-b_{,,,}c_{,,})+c_{,,}.(b_{,,,}c_{,}-b_{,}c_{,,,})+c_{,,,}.(b_{,}c_{,,}-b_{,,}c_{,}) = 0.$$

67. Wir wollen itzt noch die Formeln zur Transformation der Polar-Coordinaten entwickeln.

Wenn der Punkt m (Fig. 35.) in der Polar-Ebene liegt, und wenn A der Polar-Punkt und AX die Polar-Achse ist; so ziehe man mA, und setze $Am=r$, $mAX=\varphi$. Nimmt man AX zur Achse der x an, zieht mp senkrecht auf AX, und setzt $Ap=x$, $pm=y$; so sind $r\varphi$ die Polar- und xy die rechtwinklichten Coordinaten des Punktes m. Es sey itzt $A_{,}$ eines zweiten Systemes Anfangspunkt, und $A_{,}X_{,}$ die Lage einer neuen Polar-Achse, also $r'\varphi'$ ein zweites System von Polar-Coordinaten des Punktes m; zieht man $mp_{,}$ auf $A_{,}X_{,}$ senkrecht, und setzt $A_{,}p_{,}=x_{,}$ und $p_{,}m=y_{,}$; so wird $x_{,}y_{,}$ ein zweites System von rechtwinklichten coordinirten Achsen seyn.

Man ziehe nun, um die alten Coordinaten $r\varphi$ durch die neuen $r_{,}\varphi_{,}$ auszudrücken, $AA_{,}$ und zu AX parallel die $A_{,}X'$; setze $AA_{,}=e$, $A_{,}AX=\varepsilon$, $X_{,}A_{,}X'=\chi$, so sind $e\varepsilon\chi$ diejenigen Stücke, welche die Lage dieses neuen Systems von Polar-Achsen gegen das erste bestimmen.

Man hat nun $AB=a=e.\cos.\varepsilon$, $BA_{,}=b=e.\sin.\varepsilon$,
$$\left.\begin{array}{l} x=r.\cos.\varphi\,,\ y=r.\sin.\varphi\,, \\ x_{,}=r_{,}.\cos.\varphi_{,}\,,\ y_{,}=r_{,}.\sin.\varphi_{,}\,, \end{array}\right\} \quad . \ . \ (a)$$

Diese Werthe von $a\,b\,x\,y\,x_{,}y_{,}$ setze man in die Gleichungen (1) (2) Art. 59, so erhält man:

$$\left.\begin{array}{l} r_{,}.\cos.\varphi_{,}=-e(\text{cs}.\varepsilon.\text{cs}.\chi+\sin.\varepsilon.\sin.\chi)+r.(\text{cs}.\varphi.\text{cs}.\chi+\sin.\varphi.\sin.\chi) \\ r_{,}.\sin.\varphi_{,}=-e(\text{cs}.\varepsilon.\sin.\chi-\sin.\varepsilon.\text{cs}.\chi)+r.(\sin.\varphi.\text{cs}.\chi-\text{cs}.\varphi.\sin.\chi) \end{array}\right\}(b)$$

$$\left.\begin{array}{l} r.\cos.\varphi=e.\cos.\varepsilon+r_{,}.(\cos.\varphi_{,}.\cos.\chi-\sin.\varphi_{,}.\sin.\chi), \\ r.\sin.\varphi=e.\sin.\varepsilon.+r_{,}.(\cos.\varphi_{,}.\sin.\chi+\sin.\varphi_{,}\cos.\chi), \end{array}\right\}\quad(c)$$

Oder: $\left.\begin{array}{l} r_{,}.\cos.\varphi_{,} = -e.\cos.(\varepsilon-\chi)+r.\cos.(\varphi-\chi), \\ r_{,}.\sin.\varphi_{,} = -e.\sin.(\varepsilon-\chi)+r.\sin.(\varphi-\chi), \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (1)$

und $\left.\begin{array}{l} r.\cos.\varphi = e.\cos.\varepsilon + r_{,}.\cos.(\varphi_{,}+\chi), \\ r.\sin.\varphi = e.\sin.\varepsilon + r_{,}.\sin.(\varphi_{,}+\chi), \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (2)$

Aus diesen Gleichungen findet man:

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{tg}.\varphi_{,} = \left\{\dfrac{r.\sin.(\varphi-\chi)+e.\sin.(\varepsilon-\chi)}{r.\cos.(\varphi-\chi)-e.\cos.(\varepsilon-\chi)}\right\}; \\ r_{,} = \dfrac{r.\sin.(\varphi-\chi)+e.\sin.(\varepsilon-\chi)}{\sin.\varphi_{,}} = \dfrac{r.\cos.(\varphi-\chi)-e.\cos.(\varepsilon-\chi)}{\cos.\varphi_{,}} \\ r_{,} = \sqrt{[e^2+r^2-2er.\cos.(\varepsilon+\varphi-2\chi)]}; \end{array}\right.$$

und umgekehrt:

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{tg}.\varphi = \left\{\dfrac{e.\sin.\varepsilon+r_{,}.\sin.(\varphi_{,}+\chi)}{e.\cos.\varepsilon+r_{,}.\cos.(\varphi_{,}+\chi)}\right\}; \\ r = \dfrac{e.\sin.\varepsilon+r_{,}.\sin.(\varphi_{,}+\chi)}{\sin.\varphi} = \dfrac{e.\cos.\varepsilon+r_{,}.\cos.(\varphi_{,}+\chi)}{\cos.\varphi}; \\ r = \sqrt{[e^2+r_{,}^2+2er_{,}.\cos.(\varphi_{,}+\chi-\varepsilon)]}. \end{array}\right.$$

Die Gleichungen (2) erhält man auch direkte durch die Gleichungen

$$Ap = AB + A_{,}q; \text{ und } pm = A_{,}B + mq.$$

In die Gleichungen (1) und (2) kann man noch einen willkührlichen Winkel i bringen: Multiplizirt man nemlich die erste mit $\cos.i$, die zweite mit $\sin.i$; so giebt ihre Summe:

$$r.\cos.(\varphi-i) = e.\cos.(\varepsilon-i)+r_{,}.\cos.(\varphi_{,}+\chi-i) \quad \ldots \quad (\alpha)$$

Wird die erste der Gleichungen (2) mit $\sin.i$, die zweite mit $\cos.i$ multiplizirt, und die erste von der zweiten abgezogen; so erhält man:

$$r.\sin.(\varphi-i) = e.\sin.(\varepsilon-i)+r_{,}.\sin.(\varphi_{,}+\chi-i) \quad \ldots \quad (\beta)$$

Verschiedene Werthe von i geben verschiedene Auflösungen der Gleichungen (α) (β)

Nimmt man z. B.

$$i = (\varphi_{,}+\chi);$$

so hat man die zwei Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} r.\cos.(\varphi-\varphi_{,}-\chi) = e.\cos.(\varepsilon-\varphi_{,}-\chi)+r_{,}; \\ r.\sin.(\varphi-\varphi_{,}-\chi) = e.\sin.(\varepsilon-\varphi_{,}-\chi) \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (3)$$

Hieraus ist

$$\text{tg.}(\varphi-\varphi_{,}-\chi) = \frac{e.\sin.(\varepsilon-\varphi_{,}-\chi)}{r_{,}+e.\cos.(\varepsilon-\varphi_{,}-\chi)};$$

und

$$r = \frac{e.\sin.(\varepsilon-\varphi_{,}-\chi)}{\sin.(\varphi-\varphi_{,}-\chi)}$$

Setzt man:

$$i = \left(\frac{\varepsilon+\varphi_{,}-\chi}{2}\right)$$

dann findet man:

$$\left.\begin{aligned} r.\cos.(\varphi-i) &= (e+r_{,}).\cos.(\varepsilon-i) \\ r.\sin.(\varphi-i) &= (\varepsilon-r_{,}).\sin.(\varepsilon-i) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

und hieraus ist

$$\text{tg.}\left(\varphi-\frac{\varepsilon+\varphi_{,}+\chi}{2}\right) = \left(\frac{e-r_{,}}{e+r_{,}}\right);$$

$$r = (e+r_{,}).\frac{\cos.(\varepsilon-i)}{\cos.(\varphi-i)} = (e-r_{,}).\frac{\sin.(\varepsilon-i)}{\sin.(\varphi-i)}.$$

68. Wir wollen endlich noch den Fall betrachten, da der Punkt m ausserhalb der Polar-Ebene liegt, und $r\omega\chi$ seyen die Polar-Coordinaten (d. i. r die Entfernung Am, ω die Neigung dieser Entfernung r gegen die Polar-Ebene, χ der Winkel der Projektion von r in der Polar-Ebene mit der Polar-Achse); ferner werden wir annehmen, dass sich von den drei Stücken: des Polar-Punktes, der Polar-Achse und der Polar-Ebene bloss die zwei letzten Stücke ändern, und es seyen $r_{,}\omega_{,}\chi_{,}$ ein zweites System von Polar-Coordinaten des Punktes m.

Wir wollen die Polar-Achse und Polar-Ebene des ersten Systems zur Achse der x und zur Ebene xy; so wie die ähnlichen Stücke im zweiten Systeme zur Achse der $x_{,}$ und zur Ebene $x_{,}y_{,}$ annehmen.

Die Lage des zweiten Systems gegen das erste werde durch die drei Winkel $\psi\vartheta\varphi$ Art. 62 bestimmt, wo nemlich ψ der Winkel ist, den die Durchschnittslinie der Polar-Ebenen mit der Polar-Achse des ersten Systemes macht; ϑ die Neigung der beiden Polar-Ebenen gegen einander, und endlich φ der Winkel der Polar-Achse des zweiten Systems mit jener Durchschnittslinie der Polar-Ebenen ist.

Nun ist

$$\left.\begin{array}{ll} x = r.\cos.\omega.\cos.\chi; & x_{,}=r_{,}.\cos.\omega_{,}.\cos.\chi_{,}, \\ y = r.\cos.\omega.\sin.\chi; & y_{,}=r_{,}.\cos.\omega_{,}.\sin.\chi_{,}, \\ z = r.\sin.\omega.; & ; z_{,}=r_{,}.\sin.\omega_{,}. \end{array}\right\} \ldots (a)$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichungen (2) und (3), welche wir der Kürze wegen wieder, wie Art. 65 in der Form anschreiben wollen:

$$\left.\begin{array}{ll} x=a'.x_{,}+b'.y_{,}+c'.z_{,}; \text{ und } & x_{,}=a'.x+a''.y+a'''.z, \\ y=a''.x_{,}+b''.y_{,}+c''.z_{,}; & y_{,}=b'.x+b''.y+b'''.z, \\ z=a'''.x_{,}+b'''.y_{,}+c'''.z_{,}; & z_{,}=c'.x+c''.y+c'''.z, \end{array}\right\}. (b)$$

so wird diese Substitution der Werthe für $x\,y\,z\,x_{,}y_{,}z_{,}$ aus den Gleichungen (a) in die Gleichungen (b) auf nachstehende führen:

$$\left.\begin{array}{l} r.\text{cs}.\omega.\text{cs}.\chi=r_{,}.\{a'.\text{cs}.\omega_{,}.\text{cs}.\chi_{,}+b'.\text{cs}.\omega_{,}.\sin.\chi_{,}+c'\sin.\omega_{,}\}=A_{,}r_{,}; \\ r.\text{cs}.\omega\sin.\chi=r_{,}.\{a''.\text{cs}.\omega_{,}.\text{cs}.\chi_{,}+b''.\text{cs}.\omega_{,}.\sin.\chi_{,}+c''.\sin.\omega_{,}\}=B_{,}r_{,}; \\ r.\sin.\omega \quad =r_{,}.\{a'''\text{cs}.\omega_{,}.\text{cs}.\chi_{,}+b'''\text{cs}.\omega_{,}.\sin.\chi_{,}+c'''.\sin.\omega_{,}\}=C_{,}r_{,}; \end{array}\right\}(1)$$

Und umgekehrt:

$$\left.\begin{array}{l} r_{,}.\text{cs}.\omega_{,}.\text{cs}.\chi_{,}=r.\{a'.\text{cs}.\omega.\text{cs}.\chi+a''.\text{cs}.\omega.\sin.\chi+a'''.\sin.\omega\}=Ar; \\ r_{,}.\text{cs}.\omega_{,}.\sin.\chi_{,}=r.\{b'.\text{cs}.\omega\text{cs}.\chi \pm b''.\text{cs}.\omega.\sin.\chi+b'''.\sin.\omega\}=Br; \\ r_{,}.\sin.\omega_{,} \quad =r.\{c'.\text{cs}.\omega\text{cs}.\chi+c''.\text{cs}.\omega.\sin.\chi+c'''.\sin.\omega\}=Cr; \end{array}\right\}(2)$$

Weil beide Systeme den Polar-Punkt gemeinschaftlich haben, so ist $r_{,} = r$

Aus den Gleichungen (1) folgt sodann:

$$\sin.\,\omega = C_{,}; \quad \text{tg}.\chi = \left(\frac{B_{,}}{A_{,}}\right); \Big\} \ldots\ldots (3)$$

Eben so geben die Gleichungen (2):

$$\sin.\,\omega_{,} = C; \quad \text{tg}.\,\chi_{,} = \left(\frac{B}{A}\right); \Big\} \ldots\ldots (4)$$

Wenn aber das zweite System einen Polarpunkt hat, welcher von dem des ersten Systemes verschieden ist; dann hat man, wenn $e\delta\varepsilon$ die Polar-Coordinaten des neuen Anfangspunktes gegen das erste System sind, bekanntlich

$$\left.\begin{array}{l} r.\cos.\omega.\cos.\chi= e.\cos.\delta.\cos.\varepsilon+A_{,}.r; \\ r.\cos.\omega.\sin.\chi= e.\cos.\delta.\sin.\varepsilon+B_{,}.r; \\ r.\sin.\omega. \quad = e.\sin.\delta \quad +C_{,}.r; \end{array}\right\} \ldots (5)$$

Die Auflösung dieser Gleichungen giebt nun:

$$\text{tg.}\,\chi = \left\{\frac{e.\cos.\delta.\sin.\varepsilon + B_{,}.r}{e.\cos.\delta.\cos.\varepsilon + A_{,}.r}\right\};$$

$$\text{tg.}\,\omega = \left(\frac{e.\sin.\delta + C_{,}.r}{e.\cos.\delta.\sin.\varepsilon + B_{,}.r}\right).\sin.\chi = \left(\frac{e.\sin.\delta + C_{,}.r}{e.\text{cs}.\delta.\text{cs}.\varepsilon + A_{,}.r}\right).\cos.\chi;$$

$$r = \frac{e.\sin.\delta + C_{,}r}{\sin.\omega} = \frac{e.\cos.\delta.\sin.\varepsilon + B_{,}r}{\cos.\omega.\sin.\chi} = \frac{e.\cos.\delta\cos.\varepsilon + A_{,}.r}{\cos.\omega.\cos.\chi}$$

$$r = \sqrt{\{e^2 + N^2.r^2 + 2H.er\}}$$

wo der Kürze wegen gesetzt wurde

$$N^2 = (A_{,}^2 + B_{,}^2 + C_{,}^2)$$

$$H = (A_{,}.\cos.\delta.\cos.\varepsilon + B_{,}.\cos.\delta.\sin.\varepsilon + C_{,}.\sin.\delta).$$

Die Grössen $A_{,}B_{,}C_{,}$ und ABC verdienen noch eine besondere Aufmerksamkeit. Nach einigen einfachen Reduktionen der Gleichungen (1) (2), in welche man für $a'a''$. . . die obigen Werthe aus den Gl. (1) Art. 62 bringt, findet man:

$$A_{,} = \text{cs}.\omega_{,}.[\text{cs}.\psi.\text{cs}(\varphi+\chi_{,,}) + \sin.\psi.\sin.(\varphi+\chi_{,,}).\text{cs}.\vartheta] + \sin.\omega_{,}.\sin.\psi.\sin.\vartheta$$

$$B_{,} = \text{cs}.\omega_{,}.[-\sin.\psi\,\text{cs}.(\varphi+\chi_{,,}) + \text{cs}.\psi.\sin.(\varphi+\chi_{,,}).\text{cs}.\vartheta] + \sin.\omega_{,}\,\text{cs}.\psi.\sin.\vartheta$$

$$C_{,} = -\cos.\omega_{,}.\sin.(\varphi+\chi_{,,})\,\sin.\vartheta + \sin.\omega_{,}.\cos.\vartheta.$$

$$A = \text{cs}.\omega.[\text{cs}.\varphi.\text{cs}.(\psi+\chi) + \sin.\varphi.\sin.(\psi+\chi).\text{cs}.\vartheta] + \sin.\omega.\sin.\varphi.\sin.\vartheta$$

$$B = \text{cs}.\omega.[\sin.\varphi.\text{cs}.(\psi+\chi) - \text{cs}.\varphi.\sin.(\psi+\chi).\text{cs}.\vartheta] - \sin.\omega.\text{cs}.\varphi.\sin.\vartheta$$

$$C = \cos.\omega.\sin.(\psi+\chi).\sin.\vartheta + \sin.\omega.\cos.\vartheta.$$

Diese Grössen besitzen nun gleichfalls die Eigenschaft, dass

$$A^2 + B^2 + C^2 = 1; \quad \text{und} \quad A^2_{,} + B^2_{,} + C^2_{,} = 1.$$

Aus den bisher entwickelten allgemeinen Formeln der Transformation der Polar-Coordinaten fliessen eine Menge anderer für spezielle Fälle, je nachdem von den drei Stücken: Polar-Punkt, Polar-Achse, Polar-Ebene, im Uibergange von einem Systeme zum andern, entweder nur eins allein geändert wird, oder bloss zwei der genannten Stücke die Aenderung leiden. In jedem dieser Fälle wird es nicht schwer seyn, die speziellen Formeln dafür aus jenen allgemeinen zu entwickeln.

Auflösungen einiger Aufgaben über die Bestimmung der Punkte in einer Ebene oder im Raume aus gegebenen Eigenschaften.

69. *Drei Punkte sind im Raume ihrer Lage nach gegeben. Man sucht die Coordinaten eines vierten Punktes, wenn seine Abstände von jenen drei Punkten bekannt sind.*

Es seyen $x'y'z'$ die bekannten Coordinaten des ersten gegebenen Punktes m'; eben so seyen $x''y''z''$ die Coordinaten des zweiten m'' und $x'''y'''z'''$ die Coordinaten des dritten Punktes m'''. Ein vierter Punkt m habe von diesen dreien die gegebenen Abstände:

$$mm'=f', \quad mm''=f'', \quad mm'''=f''';$$

man sucht die Coordinaten dieses Punktes m.

Man hat offenbar folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} f'^2 &=(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2, \\ f''^2 &=(x-x'')^2+(y-y'')^2+(z-z'')^2, \\ f'''^2 &=(x-x''')^2+(y-y''')+(z-z''')^2, \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (1)$$

Aus diesen drei Gleichungen hat man die Werthe der drei unbekannten Coordinaten zu suchen.

Setzt man die Entfernungen der gegebenen Punkte $m'm''m'''$ vom Anfangspunkte respektive $a'a''a'''$, so dass man hat:

$$\left.\begin{aligned} a'^2 &= x'^2+y'^2+z'^2, \\ a''^2 &= x''^2+y''^2+z''^2, \\ a'''^2 &= x'''^2+y'''^2+z'''^2, \end{aligned}\right\}$$

und die Entfernung des Punktes m vom Anfangspunkte $=r$, so dass $\quad r^2=x^2+y^2+z^2$:

so werden die Gleichungen (1) nach vollständiger Entwicklung ihrer Glieder werden:

$$\left.\begin{aligned} f'^2 &= r^2+a'^2-2.(x'.x+y'.y+z'.z), \\ f''^2 &= r^2+a''^2-2.(x''.x+y''.y+z''.z), \\ f''^2 &= r^2+a'''^2-2.(x'''.x+y'''.y+z'''.z), \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (2)$$

Zieht man von der zweiten und dritten die erste ab; so hat man:

$$f''^2-f'^2=a''^2-a'^2-2.[(x''-x').x+(y''-y').y+(z''-z').z];$$
$$f'''^2-f'^2=a'''^2-a'^2-2.[(x'''-x').x+(y'''-y').y+(z'''-z').z];$$

Setzt man der Kürze wegen

$$\left.\begin{array}{l}\frac{(a''^2-a'^2)-(f''^2-f'^2)}{2}=g;\ \frac{(a'''^2-a'^2)-(f'''^2-f'^2)}{2}=h,\\ (x''-x')=x_{,,},\ (y''-y')=y_{,,},\ (z''-z')=z_{,,};\\ (x'''-x')=x_{,,,},\ (y'''-y')=y_{,,,},\ (z'''-z')=z_{,,,};\end{array}\right\}(a)$$

so werden jene zwei Gleichungen:

$$g = x_{,,}.x+y_{,,}.y+z_{,,}.z\ ;\ h = x_{,,,}.x+y_{,,,}.y+z_{,,,}.z \quad . (3)$$

Diese zwei Gleichungen kann man anstatt der 2. und 3. der Gleichungen (2) gebrauchen. Um diese drei Gleichungen aufzulösen, suche man aus den Gleichungen (3) y u. z durch x. Man findet:

$$y = A - B.x\ ;\ z = -A'+B'.x\ ; \quad . \quad . \quad . (4)$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{wo } A=\left(\frac{gz_{,,,}-hz_{,,}}{y_{,,}z_{,,,}-y_{,,,}z_{,,}}\right);\ B=\left(\frac{x_{,,}z_{,,,}-x_{,,,}z_{,,}}{y_{,,}z_{,,,}-y_{,,,}z_{,,}}\right);\\ A'=\left(\frac{gy_{,,,}-hy_{,,}}{y_{,,}z_{,,,}-y_{,,,}z_{,,}}\right);\ B'=\left(\frac{x_{,,}y_{,,,}-x_{,,,}y_{,,}}{y_{,,}z_{,,,}-y_{,,,}z_{,,}}\right);\end{array}\right\} . (b)$$

Nun ist $r^2=(A^2+A'^2)-2.(A.B+A'.B')x+(1+B^2+B'^2)x^2$;

$$(x'.x+y'.y+z'.z)=(Ay'-A'z')+(x'-By'+B'.z').x$$

Setzt man noch weiter:

$$\left.\begin{array}{r}\{A^2+A'^2+a'^2-f'^2-2.(Ay'-A'z')\} = F;\\ 2.\{AB+A'.B'+x'-By'+B'.z'\} = G;\\ (1+B^2+B'^2) = H;\end{array}\right\} . (1)$$

so giebt die erste der Gleichungen (2):

$$0 = F-G.x+H.x^2$$

Aus dieser Gleichung folgt: $x=\frac{-G\pm\sqrt{G^2-FH}}{2H}$. . (5

Die Gleichungen (4) geben hierauf y und z.

Der doppelte Werth von x deutet auf zwei Punkte des Raumes hin, welche der Aufgabe ein Genüge leisten.

Denkt man sich durch die Punkte $m'm''m'''$ eine Ebene gelegt, und die zwei Punkte, welche dieselben Entfernungen von $m'm''$ und m''' haben, durch eine gerade Linie verbunden; so wird diese Gerade auf der Ebene $m'm''m'''$ senkrecht stehen und die Abstände dieser Punkte von der in Rede stehenden Ebene werden zu beiden Seiten einander gleich seyn. Diese Sätze, welche sich aus einfachen geometrischen Betrachtungen

ergeben, können jedoch nicht ohne grosse Schwierigkeiten aus den vorhergehenden Gleichungen entwickelt werden. Merkwürdig ist hier der Fall, wo $G^2 = 4FH$ (α) denn dann hat x nur einen Werth $-\frac{G}{2H}$, und für die beiden andern Coordinaten yz hat man:

$$y = \left(\frac{2.AH+BG}{2.H}\right); \quad z = -\left(\frac{2.A'H+B'G}{2.H}\right).$$

Dieses rühret nun von dem Umstande her, weil in gegenwärtigem Falle der gesuchte Punkt in die Ebene der Punkte $m'm''m'''$ fällt. Die Entwicklung der Gleichung (α) wird auf die Relation zwischen den Coordinaten der Punkte $m'm''m'''$ und der Entfernungen $f'f''f'''$ des Punktes m von denselben führen, welche statt finden muss, wenn dieser Punkt in der Ebene der Punkte $m'm''m'''$ liegt.

Der Allgemeinheit der Auflösung unbeschadet kann man annehmen, dass die Ebene $m'm''m'''$ zugleich die Ebene der xy sey, d. h. dass die drei gegebenen Punkte in der Ebene xy liegen; ferner kann man den Punkt m''' zum Anfangspunkt der Coordinaten, und die Gerade $m'''m''$ zur Achse der x annehmen. Unter dieser Voraussetzung wird man haben:

$$z'=0\ ,\quad z''=0\ ,\quad z'''=0\ ;\quad y''=0\ ,\quad y'''=0\ ;\quad x'''=0\ ;$$

Die Gleichungen (1) gehen dann in folgende über:

$$\left.\begin{array}{l} f'^2=(x-x')^2+(y-y')^2+z^2\,; \\ f''^2=(x-x'')^2+y^2+z^2\,; \\ f'''^2=x^2+y^2+z^2\,. \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (1')$$

Zur Auflösung dieser Gleichungen setze man:

$$a'^2 = x'^2+y'^2\ ;\quad a''=x''\ ;\quad a'''=0\,.$$

Die Gleichungen (a) geben dann:

$$\left.\begin{array}{l} g=\frac{(x''^2-x'^2-y'^2)-(f''^2-f'^2)}{2}\,; \\ h=\frac{f'^2-f'''^2-x'^2-y'^2}{2}\,; \\ x_{\prime\prime}=(x''-x')\,;\quad y_{\prime\prime}=-y'\,;\quad z_{\prime\prime}=0\,; \\ x_{\prime\prime\prime}=-x'\,;\quad y_{\prime\prime\prime}=-y'\,;\quad z_{\prime\prime\prime}=0\,; \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (a')$$

Die Gleichungen (3) geben ferner

$$g = (x''-x')x-y'.y \ ; \quad h = -(x'.x+y'.y) \ .$$

Aus ihnen folgt:

$$x = \left(\frac{g-h}{x''}\right) ; \ y = -\left(\frac{hx''+(g-h)x'}{x''y'}\right) \ . \ . \ (2')$$

Der Werth von z folgt aus der dritten der Gleichungen (1'); es ist

$$z = \pm\sqrt{f'''^2-x^2-y^2} \ .$$

Dieses Resultat zeigt ganz deutlich, dass die beiden Punkte, welche den Bedingungen der Aufgabe ein Genüge leisten, auf entgegengesetzten Seiten der Ebene xy und in gleichen Abständen von ihr sich befinden.

70. *In einer Ebene z. B. in der coordinirten Ebene xy ist irgend eine Anzahl von Punkten, als m', m'', m''', ... gegeben. Man sucht in dieser Ebene die Lage eines andern Punktes, so dass die Summe der Quadrate der Entfernungen dieses Punktes von allen gegebenen Punkten einem gegebenen Quadrate Q^2 gleich sey.*

Es seyen $x'y'$ die Coordinaten des ersten Punktes m', $x''y''$ die Coordinaten des Punktes m'', u. s. w., und xy die Coordinaten des gesuchten Punktes, so sind die Quadrate der Entfernungen der gegebenen Punkte vom gesuchten:

$$(m'm)^2 = (x-x')^2+(y-y')^2 \ ;$$
$$(m''m)^2 = (x-x'')^2+(y-y'')^2 \ ;$$
$$(m'''m)^2 = (x-x''')^2+(y-y''')^2 \ ;$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung:

$$(m'm)^2+(m''m)^2+(m'''m)^2+ \ . \ . \ . \ . = Q^2 ,$$

welche die gegebene Bedingung ausdrückt; so erhält man eine Relation zwischen den Coordinaten xy und den Coordinaten der gegebenen Punkte $m'm''$. . .

Setzt man der Kürze wegen:

$$\left.\begin{array}{l} x'+x''+x'''+\ldots\ldots=\Sigma(x);\\ y'+y''+y'''+\ldots\ldots=\Sigma(y);\\ x'^2+x''^2+x'''^2+\ldots\ldots=\Sigma(x^2);\\ y'^2+y''^2+y'''^2+\ldots\ldots=\Sigma(y^2);\end{array}\right\}$$

so erhält man nach gehöriger Entwicklung der gegebenen Bedingungsgleichung, wenn n die Anzahl der gegebenen Punkte ist:

$$x^2+y^2-x.\left\{\frac{2.\Sigma(x)}{n}\right\}-y.\left\{\frac{2.\Sigma(y)}{n}\right\}=\left\{\frac{Q^2-\Sigma(x^2)-\Sigma(y^2)}{n}\right\}\ldots(1)$$

Man sieht, dass die Aufgabe eine unbestimmte ist, welche unendlich viele Auflösungen zulässt; für jeden willkührlichen Werth von x hat man den zugehörigen Werth von y aus der Gleichung (1) zu nehmen. Es giebt also unendlich viele Punkte, welche die verlangte Eigenschaft besitzen. Um die Aufgabe bestimmt zu machen, kann man sich noch irgend eine Bedingung hinzufügen.

Es seyen n Punkte gegeben, und man soll den Ort eines andern Punktes finden, der so beschaffen ist, dass, wenn von diesem Punkte nach dem gegebenen gerade Linien gezogen werden, und hierauf jedes der Quadrate dieser Entfernungen mit einer gewissen gegebenen Zahl multiplizirt wird, die Summe aller hiedurch erhaltener Produkte einer gegebenen Grösse Q^2 gleich sey.

Zur Auflösung dieser Aufgabe, welche etwas allgemeiner ist, als die vorige, behalte man dieselben Bezeichnungen; nur bezeichne man noch überdiess die Zahlen, durch welche man die Quadrate der Entfernungen der gegebenen Punkte vom zu bestimmenden Punkte zu multipliziren hat, mit $\mu'\mu''\mu'''\ldots$, so dass die gegebene Bedingungsgleichung der Aufgabe sey:

$$\mu'.(m'm)^2+\mu''.(m''m)^2+\mu'''.(m'''m)^2+\ldots=Q^2\ \ldots(b)$$

Substituirt man in diese Gleichung die Werthe für $(m'm)^2$, $(m''m)^2$, ... und setzt um abzukürzen:

$$\left.\begin{array}{l} \mu'x'+\mu''x''+\mu'''x'''+\ldots=\Sigma(\mu x)\\ \mu'y'+\mu''y''+\mu'''y'''+\ldots=\Sigma(\mu y)\\ \mu'x'^2+\mu''x''^2+\mu'''x'''^2+\ldots=\Sigma(\mu x^2)\\ \mu'y'^2+\mu''y''^2+\mu'''y'''^2+\ldots=\Sigma(\mu y^2)\end{array}\right\}$$

so bekömmt man nachstehende Relation zwischen den Coordinaten xy des zu bestimmenden Punktes:

$$x^2+y^2-x.\left\{\frac{2.\Sigma(\mu x)}{\Sigma(\mu)}\right\}-y.\left\{\frac{2.\Sigma(\mu y)}{\Sigma(\mu)}\right\}=\left\{\frac{Q^2-\Sigma(\mu x^2)-\Sigma(\mu y^2)}{\Sigma(\mu)}\right\} \quad . \; . \; (2)$$

Diese Aufgabe ist, so wie die vorige gleichfalls unbestimmt d. h. es giebt unendlich viele Punkte, welche der Aufgabe ein Genüge leisten.

Wir wollen itzt, in noch grösserer Allgemeinheit annehmen, dass die gegebenen Punkte $m'm''m'''$. . . was immer für eine Lage im Raume haben, und dass $x'y'z'$, $x''y''z''$, $x'''y'''z'''$,... ihre Coordinaten, und xyz die des zu bestimmenden Punktes sind, so dass:

$$\mu'.(m'm)^2+\mu''.(m''m)^2+\mu'''.(m'''m)^2+ \; . \; . \; . = Q^2 \quad . \; . \; (b)$$

Da nun in diesem Falle:

$$(m'm)^2 = (x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2 \; ;$$
$$(m''m)^2 = (x-x'')^2+(y-y'')^2+(z-z'')^2 \; ;$$
$$(m'''m)^2 = (x-x''')^2+(y-y''')^2+(z-z''')^2 \; ;$$

u. s. w.

so wird die Substitution dieser Ausdrücke in der Gleichung (b), und ihre weitere Entwicklung auf folgende Gleichung führen:

$$x^2+y^2+z^2-2.\left[x.\left\{\frac{\Sigma(\mu x)}{\Sigma(\mu)}\right\}+y.\left\{\frac{\Sigma(\mu y)}{\Sigma(\mu)}\right\}+z.\left\{\frac{\Sigma(\mu z)}{\Sigma(\mu)}\right\}\right]=$$
$$\left\{\frac{Q^2-\Sigma(\mu x^2)-\Sigma(\mu y^2)-\Sigma(\mu z^2)}{\Sigma(\mu)}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; (3)$$

In dieser Gleichung, welcher allein die Coordinaten des Punktes m, der die verlangte Eigenschaft besitzen soll, ein Genüge leisten müssen, sind zwei dieser Coordinaten xyz willkührlich. Es giebt also gleichfalls auch hier unendlich viele Punkte des Raumes, welche die gegebene Eigenschaft besitzen.

71. *In einer Ebene sind n Punkte $m'm''m'''$. . . gegeben; man sucht einen Punkt m von der Eigenschaft, dass, wenn man von demselben auf was immer für eine durch den Anfangspunkt gehende gerade Linie ein Perpendikel herablässt, dieses Perpendikel, n mal genommen, so gross sey, als die algebraische*

Summe der Perpendikel, welche auf diese Gerade aus den gegebenen Punkten herabgelassen werden.

Sind $x'y'x''y''x'''y'''$. . . die Coordinaten der gegebenen Punkte $m'm''m'''$. . ., und xy die Coordinaten des gesuchten Punktes m; so wird, wenn die Gerade unter dem Winkel φ gegen die Achse der x durch den Anfangspunkt gezogen wird, der Abstand des Punktes m von ihr seyn $(y.\cos.\varphi - x.\sin.\varphi) = p$

. m' $(y'.\cos.\varphi - x'.\sin.\varphi) = p'$

. m'' $(y''.\cos.\varphi - x''.\sin.\varphi) = p''$

. m''' . . . $(y'''.\cos.\varphi - x'''.\sin.\varphi) = p'''$

u. s. w.

Der gegebenen Bedingung gemäss ist nun:

$$n.p = p' + p'' + p''' + \ldots ; \quad \ldots \quad (a)$$

Setzt man die gefundenen Ausdrücke für $pp'p''$. . . in diese Gleichung, und bedient sich der Abkürzungen des vorigen Art.; so hat man:

$$ny.\cos.\varphi - nx.\sin.\varphi = \cos.\varphi.\Sigma(y) - \sin.\varphi.\Sigma(x)$$

oder

$$\{ny - \Sigma(y)\} = \{nx - \Sigma(x)\}.\text{tg}.\varphi \quad \ldots \quad (1)$$

Da nun diese Gleichung (1), welche nichts anders ist, als die entwickelte Gleichung (a), für jeden Werth von φ statt finden soll, so muss sowohl der von φ abhängige, als unabhängige Theil der Gleichung (1), und zwar jeder für sich, gleich Null seyn; diese Bedingung giebt folglich die zwei Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} nx - \Sigma(x) = 0\,; \\ ny - \Sigma(y) = 0\,; \end{array}\right\}$$

woraus

$$x = \frac{\Sigma(x)}{n}, \quad y = \frac{\Sigma(y)}{n} \quad \ldots \quad (2)$$

folgt.

Die Coordinaten des gesuchten Punktes sind demnach die arithmetischen Mittel zwischen den Coordinaten der gegebenen Punkte. Dieser Punkt besitzt übrigens noch die merkwürdige Eigenschaft, dass die Summe der Quadrate der Abstände der

gegebenen Punkte von dem durch die Gleichung (2) bestimmten Punkte ein *Minimum* sey. Denn setzt man

$$V = \{(x-x')^2+(y-y')^2\}+\{(x-x'')^2+(y-y'')^2\}+ \ldots$$

oder
$$V = n.(x^2+y^2)-2.[(xx'+yy')+(xx''+yy'')+\ldots] + [(x'^2+y'^2)+(x''^2+y''^2)+\ldots]$$

oder endlich

$$V = n.x^2+n.y^2-2x.\Sigma(x)-2y.\Sigma(y)+\Sigma(x^2+y^2),$$

und soll diese Summe ein *Minimum* seyn; so hat man bekanntlich:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = 0; \quad \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = 0$$

d. i.
$$n.x = \Sigma(x); \quad ny = \Sigma(y),$$

woraus die Werthe (2) folgen.

Wenn ein jedes der Perpendikel, welche von den Punkten $m'm''m'''$. . . auf eine gerade Linie herabgelassen werden, mit einer gewissen Zahl multiplizirt wird, und hierauf diese Produkte in eine Summe gebracht werden, und man sucht einen solchen Punkt in dieser Ebene, so dass die Summe dieser Zahlen in das Perpendikel aus diesem Punkte auf die nemliche Gerade so gross sey, als jene Summe der Produkte; d. h. dass

$$(\mu'.p'+\mu''.p''+\mu'''.p'''+\ldots) = (\mu'+\mu''+\mu'''+\ldots).p$$

so findet man die Coordinaten dieses Punktes auf ähnliche Art, wie im vorigen Falle. Diese Bedingungsgleichung wird nemlich, nachdem man in sie die obigen Werthe für $pp'p''$ substituirt hat, werden:

$$y.\cos.\varphi.\Sigma(\mu)-x.\sin.\varphi.\Sigma(\mu) = \cos.\varphi.\Sigma(\mu y)-\sin.\varphi.\Sigma(\mu x);$$

das ist:

$$\{y.\Sigma(\mu)-\Sigma(\mu y)\} = \{x.\Sigma(\mu)-\Sigma(\mu x)\}.\mathrm{tg}.\varphi \quad \ldots (3)$$

Hieraus folgt wieder:

$$\left.\begin{array}{l} x.\Sigma(\mu)-\Sigma(\mu x) = 0 \\ y.\Sigma(\mu)-\Sigma(\mu y) = 0 \end{array}\right\}$$

und diese Gleichungen geben:

$$x = \frac{\Sigma(\mu x)}{\Sigma(\mu)}; \quad y = \frac{\Sigma(\mu y)}{\Sigma(\mu)} \quad \ldots \ldots (4)$$

Für die Gerade, welche durch den Punkt gezogen wird, den diese Coordinaten xy bestimmen, hat man $p = 0$; folglich

$$\cos.\varphi.\Sigma(\mu y) - \sin.\varphi.\Sigma(\mu x) = 0 .$$

Diese Gleichung giebt:

$$\mathrm{tg}.\varphi = \frac{\Sigma(\mu x)}{\Sigma(\mu y)} .$$

Durch diesen Winkel φ wird die Lage der geraden Linie bestimmt, welche die Eigenschaft hat, dass die Summe der Produkte aus den auf der einen Seite derselben liegenden Punkte in die gegebenen Zahlen so gross sey, als die ähnliche Summe der Produkte der Perpendikel, welche aus den auf der andern Seite dieser Geraden liegenden Punkten auf sie gezogen werden, in die gegebenen Zahlen.

Da der Anfangspunkt der Coordinaten willkührlich in dieser Ebene angenommen werden kann; so sieht man, dass es unendlich viele Geraden von dieser Eigenschaft geben könne; aber alle diese gerade Linien durchschneiden sich in einem und demselben Punkte, dessen Lage durch die Coordinaten xy aus den Gleichungen (4) bestimmt wird.

Wir werden itzt annehmen, dass die n gegebenen Punkte was immer für eine Lage im Raume haben; man sucht nun einen Punkt von der Beschaffenheit, dass, wenn man aus demselben auf was immer für eine Ebene ein Perpendikel herab lässt, die übrigens was immer für eine Lage habe, aber durch den Anfangspunkt gehe, dieses Perpendikel, n mal genommen, immer so gross sey, als die algebraische Summe aller der Perpendikel, welche aus den gegebenen Punkten auf eben dieselbe Ebene herabgelassen werden.

Wir werden annehmen, dass xyz die Coordinaten des gesuchten, und $x'y'z'$, $x''y''z''$, . . . die Coordinaten der gegebenen Punkte im Raume sind. Man denke sich ferner durch den Anfangspunkt A eine Ebene gelegt, welche wir die Ebene

der $x_i y_i$ nennen wollen, deren Lage gegen das erste Achsensystem durch die Winkel $\psi\vartheta$ bestimmt werde, wo ψ der Winkel ist, welchen die Durchschnittslinie der angenommenen Ebene und der coordinirten Ebene xy mit der Achse der x macht, und ϑ die Neigung dieser angenommenen Ebene gegen die Ebene xy bedeutet.

Nennt man nun die Perpendikel, welche von den Punkten $m m' m'' m'''$. . . auf diese Ebene $x_i y_i$ herabgelassen werden, $z_i z_i' z_i'' z_i'''$. . . ; so hat man, gemäss der dritten der Gleichungen (3) Art. 62:

$$\left.\begin{array}{l} z_i = x.\sin.\vartheta.\sin.\psi + y.\sin.\vartheta.\cos.\psi + z.\cos.\vartheta\ ; \\ z_i' = x'.\sin.\vartheta.\sin.\psi + y'.\sin.\vartheta.\cos.\psi + z'.\cos.\vartheta\ ; \\ z_i'' = x''.\sin.\vartheta.\sin.\psi + y''.\sin.\vartheta.\cos.\psi + z''.\cos.\vartheta\ ; \\ .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad . \end{array}\right\} .. (\alpha)$$

Die Bedingungsgleichung der Aufgabe ist aber:

$$n.z_i = z_i' + z_i'' + z_i''' + \ .\ .\ .\ .$$

Setzt man in diese Gleichung für $z_i z_i' z_i''$. . . die Werthe aus den Gleichungen (α); und bedient sich der gebräuchlichen Abkürzungen; so erhält man die Gleichung:

$$n.x.\sin.\vartheta.\sin.\psi + n.y.\sin.\vartheta.\cos.\psi + n.z.\cos.\vartheta =$$
$$\sin.\vartheta.\sin.\psi.\Sigma(x) + \sin.\vartheta.\cos.\psi.\Sigma(y) + \cos.\vartheta.\Sigma(z)\ ;$$

Oder

$$\{nx - \Sigma(x)\}.\mathrm{tg}.\vartheta.\sin.\psi + \{ny - \Sigma(y)\}.\mathrm{tg}.\vartheta.\cos.\psi + \{nz - \Sigma(z)\} = 0.$$

Da die gegebene Eigenschaft des Punktes m in Bezug auf jede durch den Anfangspunkt der Coordinaten gelegte Ebene statt finden soll; so müssen die Werthe von xyz so beschaffen seyn, dass sie dieser letzten Gleichung ein Genüge leisten, welches auch immer die Werthe von $\vartheta\psi$ seyen. Diess kann aber nur dann der Fall seyn, wenn jedes Glied der Gleichung für sich gleich Null wird. Die Coordinaten xyz werden daher aus folgenden drei Gleichungen zu bestimmen seyn

$$\left.\begin{array}{r}n.x-\Sigma(x)=0\,;\\ n.y-\Sigma(y)=0\,;\\ n.z-\Sigma(z)=0\,;\end{array}\right\}$$

Hieraus findet man:

$$x=\frac{\Sigma(x)}{n};\quad y=\frac{\Sigma(y)}{n};\quad z=\frac{\Sigma(z)}{n}\quad\ldots\quad(5)$$

Die Coordinaten des gesuchten Punktes sind demnach die arithmetischen Mittel der Coordinaten der gegebenen Punkte. Dieser Punkt besitzt die merkwürdige Eigenschaft, dass die Summe der Quadrate seiner Entfernungen von den gegebenen Punkten ein *Minimum* sey. Dieses lässt sich ebenso, wie im vorigen Falle zeigen, da man die Punkte $m'm''$. . . in einer und derselben Ebene annimmt, welcher Fall der besondere des gegenwärtigen allgemeinern ist.

Da der Anfangspunkt der Coordinaten willkührlich ist; so folgt, dass jede Ebene, welche wie immer durch den mittelst der Gleichung (5) bestimmten Punkt m gelegt wird, die Eigenschaft hat, dass die Summe der Perpendikel, welche von den gegebenen Punkten $m'm''m'''$. . . auf diese Ebene herabgelassen werden, auf der einen Seite dieser Ebene so gross sey, als auf der entgegengesetzten.

Werden die Perpendikel $z_i' z_i'' z_i'''$. . . respektive mit den gegebenen Zahlen $\mu' \mu'' \mu'''$. . . multiplizirt, und soll die Summe dieser Punkte so gross seyn, als das Produkt aus der Summe der Zahlen $(\mu'+\mu''+\ldots)$ in das Perpendikel z_i; so setze man in die gegebene Bedingungsgleichung:

$$\mu' z_i' + \mu''.z_i'' + \mu'''.z_i''' + \ldots = (\mu' + \mu'' + \mu''' \ldots).z_i$$

die Werthe für diese Perpendikel aus den Gleichungen (α); so hat man:

$$\text{tg}.\vartheta.\sin.\psi.\{x.\Sigma(\mu)-\Sigma(\mu x)\}+\text{tg}.\vartheta.\cos.\psi.\{y.\Sigma(\mu)-\Sigma(\mu y)\}+$$
$$\{z.\Sigma(\mu)-\Sigma(\mu z)\}=0.$$

Soll diese Gleichung für jeden Werth der Winkel $\vartheta\psi$ statt finden; so muss

$$\left.\begin{aligned} x.\Sigma(\mu)-\Sigma(\mu x) &= 0; \\ y.\Sigma(\mu)-\Sigma(\mu y) &= 0; \\ z.\Sigma(\mu)-\Sigma(\mu z) &= 0; \end{aligned}\right\}$$

Hieraus folgen nun:

$$x = \frac{\Sigma(\mu x)}{\Sigma(\mu)}; \quad y = \frac{\Sigma(\mu y)}{\Sigma(\mu)}; \quad z = \frac{\Sigma(\mu z)}{\Sigma(\mu)} \; . \; . \; . \quad (6)$$

Für die Ebene, welche durch diesen Punkt gelegt wird, hat man:

$z_{,}=0$; oder $\Sigma(\mu x).\text{tg}.\vartheta.\sin.\psi+\Sigma(\mu y).\text{tg}.\vartheta.\cos.\psi+\Sigma(\mu z)=0$,

und hieraus

$$\text{tg}.\vartheta = -\frac{\Sigma(\mu z)}{\sin.\psi.\Sigma(\mu x)+\cos.\psi.\Sigma(\mu y)}.$$

Der Winkel ψ ist in diesem Ausdrucke gänzlich willkührlich. Wird die Ebene durch den Punkt m und die Achse x gelegt; so ist $\psi=0$; und ihre Neigung ϑ gegen xy wird aus der Gleichung

$$\text{tg}.\vartheta = -\frac{\Sigma(\mu z)}{\Sigma(\mu y)}$$

bestimmt.

ZWEITES CAPITEL.

Analytische Bestimmungsarten der Lagen einer geraden Linie.

I. Gerade Linien in den coordinirten Ebenen.

Methode, die Lage einer Geraden in einer Ebene analytisch zu bestimmen. Ausdrücke für Coordinaten der Durchschnittspunkte dieser Geraden mit den Achsen — Winkel der Geraden mit den coordinirten Achsen — Absand des Anfangspunktes oder irgend eines andern gegebenen Punktes in dieser Ebene von der Geraden.

72. Nachdem ich im vorhergehenden Capitel die Hilfsmittel angegeben habe, mit denen uns die Analys und Geometrie versieht, um die Lage eines Punktes sowohl in einer Ebene als im Raume zu bestimmen; so komme ich nun zu der Erklärung derjenigen Methoden, nach welchen man eine Reihe von Punkten, oder vielmehr eine unendliche Anzahl derselben, analytisch bestimmt, wenn ihre Aufeinanderfolge nach dem Gesetze der Stetigkeit geschieht. Diese analytische Bestimmung beruht vornehmlich darauf, dass man eine gewisse Eigenschaft, welche allen diesen Punkten gemeinschaftlich zukömmt, durch eine Gleichung zwischen den die Lage eines Punktes bestimmenden Stücken ausdrücke.

Diese Systeme von Punkten, welche durch eine gewisse Eigenschaft charakterisirt und von allen andern Punkten des Raumes unterschieden werden, bilden entweder Linien oder Flächen; und die Relation zwischen den Stücken, welche die Lage irgend eines Punktes dieses Systemes bestimmen, heisst dann die Gleichung der Linie oder Fläche. Wenn also das Gesetz, nach welchem die Punkte einer Linie oder Fläche besimmt werden können, durch eine Gleichung zwischen den Coordinaten ausgedrückt ist; dann kann man hieraus die Punkte bestimmen, welche in der gehörigen Linie oder Fläche liegen.

Man wird nun schon im voraus inne, dass die ganze analytische Geometrie auf der Theorie der Gleichungen beruhe, und dass sich aus derselben alle ihre Lehren entwickeln lassen. Das wichtigste Hilfsmittel bei diesen Entwicklungen ist die Elimination gewisser Grössen aus vorhandenen Gleichungen.

Das einfachste Gesetz, wodurch die Folge einer unendlichen Menge von Punkten bestimmt wird, ist offenbar dasjenige, wodurch ausgesagt wird, dass alle diese Punkte, (in einer Ebene, oder überhaupt im Raume), in einerlei Richtung liegen sollen.

Diesem Gesetze entsprechen alle Punkte, welche in einer und derselben geraden Linie liegen. Dieses System von Punkten, welche in einer Geraden liegen, soll nun zuerst der Gegenstand unserer Betrachtungen seyn. Wir haben nun vor allen andern die Relation zwischen den Coordinaten dieser Punkte auszumitteln, welche nichts anders ist, als der analytische Ausdruck des oben mit Worten ausgesprochenen Gesetzes. Das System der Punkte wollen wir zuerst in einer Ebene betrachten, in welcher zwei der coordinirten Achsen liegen, z. B. in der Ebene xy; und hierauf werden wir diese Betrachtungen verallgemeinern, indem wir annehmen werden, dass das System der Punkte ausserhalb der coordinirten Ebenen liege.

73. Es ist im vorhergehenden Capitel gelehrt worden, dass die Lage eines Punktes in der Ebene zweier rechtwinklicht coordinirter Achsen durch die beiden zugleich bestehenden Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} x = a \\ y = b \end{array}\right\}$$

bestimmt werde, oder mit andern Worten: dass der Ort eines Punktes in dieser Ebene gegeben sey, wenn seine zwei Coordinaten gegeben sind.

Die Gleichung

$$x = a$$

für sich allein betrachtet, gehört, wie schon oben bemerkt worden ist, allen denjenigen Punkten zu, deren Entfernung von der Achse y der beständigen Grösse a gleich ist; d. h. die Gleichung (1) wird eine Gleichung einer geraden Linie in dieser Ebene seyn, welche in der Entfernung a von dieser Achse y und mit ihr parallel gezogen wird.

Eben so wird die Gleichung $y = b$, für sich betrachtet, allen denjenigen Punkten zugehören, deren Entfernung von der Achse der x der beständigen Grösse a gleich ist, d. h. $y = b$ ist die Gleichung einer Geraden in dieser Ebene, welche in einer Entfernung b von der Achse der x, und zu ihr parallel, gezogen wird.

Wir wollen nun die Lage der einen dieser Geraden in Bezug auf ein anderes System coordinirter Achsen betrachten, und aus einer dieser Gleichungen die Relation zwischen den Coordinaten ihrer Punkte in diesem zweiten Systeme mittelst der Formeln der Transformation der Coordinaten suchen.

Es seyen also $AX_{,}$ und $AY_{,}$ (Fig. 36.) die rechtwinklichten coordinirten Achsen, zu deren einer, $AX_{,}$, die Gerade LL in einem Abstande $= b$ von dieser Achse parallel gezogen sey. Ist nun m irgend ein Punkt in dieser Geraden, und zieht man mp auf $AX_{,}$ senkrecht; so sind $Ap_{,} = x_{,}$ und $p_{,}m = y$ die rechtwinklichten Coordinaten des Punktes m, und

$$y_{,} = b_{,} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

ist die Gleichung aller Punkte, die in dieser Geraden LL liegen, oder schlechthin die Gleichung der Geraden LL in Bezug auf das Achsen-System $AX_{,}$ und $AY_{,}$.

Diese Gleichung zeigt, dass die Ordinate $y_{,}$ für jeden beliebigen Werth von $x_{,}$ jederzeit denselben Werth habe.

Betrachten wir nun die Punkte dieser Geraden LL gegen ein anderes System rechtwinklichter coordinirter Achsen bezogen. Es seyen also AX und AY ein paar andere Achsen, und $XAX_{,} = YAY_{,} = \chi$. Zieht man mp senkrecht auf AX, und setzt $Ap = x$, $pm = y$; so hat man, nach den Formeln der Transformation der rechtwinklichten Coordinaten in einer Ebene:

$$\left.\begin{array}{l} x_{,} = x.\cos.\chi + y.\sin.\chi\,; \\ y_{,} = y.\cos.\chi - x.\sin.\chi\,, \end{array}\right\}$$

Setzt man diesen Werth von $y_{,}$ in die Gleichung (1); so wird man anstatt derselben haben:

$$b_{,} = y.\cos.\chi - x.\sin.\chi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Diese Relation zwischen den Coordinaten xy und den beständigen Grössen $b_{,}\ \chi$ gehört noch immer für dasselbe System von Punkten, welche in der Geraden LL liegen, als die Gleichung (1), nur mit den Unterschied, dass die Coordinaten in der Gleichung (1) gegen das System $AX_{,}$ und $AY_{,}$, und die Coordinaten in der Gleichung (2) gegen das System AX, AY bezogen worden.

Der Gleichung (2) kann man die Gestalt geben:

$$y = x.\mathrm{tg}.\chi + \frac{b_{,}}{\sin.\chi}.$$

Diese Relation ist also überhaupt die Gleichung einer geraden Linie, welche mit der Achse AX den Winkel χ macht, und von dem Anfangspunkte der Coordinaten A den Abstand $AB = b_{,}$ hat.

In dieser Gleichung hier kommen zweierlei Arten von Grössen vor, deren Unterschied man wohl auffassen muss. Die beständigen Grössen $\chi\ b_{,}$ dienen zur Bestimmung der L a g e der Geraden LL gegen das Achsen-System AX, AY, die

veränderlichen Grössen xy hingegen beziehen sich auf die verschiedenen Punkte, welche in einer und derselben Geraden auf einander folgen. Während also die Grössen $\chi b_{,}$ die Lage einer Geraden in der coordinirten Ebene bestimmen, werden die Coordinaten xy die Lage eines Punktes in dieser Geraden fixiren.

Um jener Gleichung der Geraden LL eine zweckmässigere Form zu geben, werden wir anstatt der Beständigen $\chi b_{,}$ zwei neue beständige Grössen ab einführen, so dass

$$a = \text{tg.}\chi\,;$$

$$b = \frac{b_{,}}{\sin.\chi}\,;$$

Die Gleichung der Geraden LL wird sodann:

$$y = ax + b; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Der Coëffizient a von x in der Gleichung einer Geraden ist also die trigonometrische Tangente des Neigungswinkels dieser Geraden gegen die Achse der x.

74. Die Gleichung einer Geraden kann noch auf verschiedene Arten (Fig. 37.) gefunden werden.

Wenn z. B. die Gerade LL die Achse AX im Punkte K, dessen Entfernung vom Anfangspunkte A gleich e sey, und unter einem Winkel $LKX = \chi$ schneidet; wenn ferner m irgend ein Pnnkt auf LL sey, dessen Coordinaten $Ap = x$, $pm = y$ sind; so hat man:

$$pm = Kp.\,\text{tg.}\chi = (KA + Ap).\,\text{tg.}\chi$$

oder $$y = (x + e).\text{tg.}\chi.$$

Setzt man nun $\text{tg.}\chi = a$, $e.\,\text{tg.}\chi = b$; so erhält man

$$y = ax + b$$

zur Gleichung dieser Geraden.

Auf diese Gleichung gelangt man auch noch durch folgende Betrachtungen.

Wir haben oben gefunden, dass die Coordinaten aller Punkte, welche in einerlei Richtung liegen, die durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht, in einerlei Verhältniss zu

einander stehen. Sind demnach $m\,m'm''m'''\ldots$ mehrere Punkte einer und derselben Geraden LL; so sind die Verhältnisse:

$$\frac{mp}{Kp},\ \frac{m'p'}{Kp'},\ \frac{m''p''}{Kp''},\ \ldots\ldots$$

alle einander gleich; nennt man den Exponent des Verhältnisses a; dann hat man überhaupt, wenn $KA = c$ ist,

$$\frac{y}{x+c} = a, \text{ oder } y = (ax+ac).$$

Wird $a.c = b$ gesetzt; so ist $y = a.x+b$.

Oder endlich, wenn C der Punkt ist, in welchem die verlängerte LL die Achse der y trifft, und CX eine durch diesen Punkt C zur Achse AX parallel gezogene Gerade, welche die Ordinaten $y\,y'y''\ldots$ der Punkte $m\,m'm''\ldots$ in den Punkten $n\,n'n''\ldots$ trifft, dann geben die ähnlichen Dreiecke Cnm, $Cn'm'$, $Cn''m'''$, ... folgende einander gleiche Verhältnisse:

$$\frac{mn}{Cn} = \frac{m'n'}{Cn'} = \frac{m''n''}{Cn''}\ \ldots\ldots$$

Oder $$\frac{mp-AC}{Ap} = \frac{m'p'-AC}{Ap'} = \frac{m''p''-AC}{Ap''}\ \ldots\ldots$$

d. h. alle Punkte, welche in einer und derselben Richtung liegen, besitzen die Eigenschaft, dass der Unterschied zwischen der Ordinate eines Punktes derselben und der Ordinate des Punktes derselben Geraden, welcher auf der Achse y liegt, zur Abscisse ein beständiges Verhältniss hat. Bezeichnet man nun die Ordinate im Anfangspunkte, d. i. AC mit b, und das beständige Verhältniss mit a; so hat man für jeden Punkt dieser Geraden folgende Relation seiner Coordinaten xy:

$$\frac{y-b}{x} = a,$$

woraus $$y = ax+b$$

folgt.

Für jeden andern Punkt dieser Ebene, welcher nicht in dieser Richtung LL liegt, ist y entweder grösser oder kleiner als $(ax+b)$. Dieser Gleichung leisten folglich die Werthe der Coordinaten unendlich vieler Punkte und nur derje-

nigen Genüge, welche in einer und derselben Geraden liegen, und sie kann keinem andern Punkte, der ausserhalb dieser Geraden liegt, zukommen. Die beständigen Grössen $a b$ charakterisiren die Lage dieser Geraden; wenn daher ihre numerischen Werthe gegeben sind, und man sucht die Lage der Geraden, in welcher alle Punkte liegen, deren Coordinaten der gegebenen Gleichung ein Genüge leisten, so ist die einfachste Methode diese, dass man für zwei willkührlich angenommene Werthe von x aus der gegebenen Gleichung die correspondirenden Werthe von y sucht, mittelst dieser Coordinaten die zwei Punkte in der Ebene verzeichnet, und durch dieselben eine gerade Linie zieht.

75. Indem sich die Grössen xy der Gleichung der Geraden auf die verschiedenen Punkte derselben beziehen, sind a und b die Grössen, welche sich auf die verschiedenen Lagen der Geraden LL gegen das System der coordinirten Achsen beziehen. Wir wollen hier zunächst den Zusammenhang betrachten, der zwischen den verschiedenen Lagen der geraden Linie LL und den Werthen der zwei beständigen a und b obwaltet. Je nachdem a und b bei denselben absoluten Werthen dieselben Vorzeichen oder verschiedene haben, wird sich die Lage der zugehörigen geraden Linie ändern. Nun sind in dieser Rücksicht vier von einander verschiedene Fälle möglich, nemlich:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{erster Fall;} & y = +ax+b\,; \\ \text{zweiter Fall;} & y = -ax+b\,; \\ \text{dritter Fall;} & y = +ax-b\,; \\ \text{vierter Fall;} & y = -ax-b; \end{array}\right\}$$

Jedem dieser vier Fälle entspricht eine besondere Lage (Fig. 38.) der Geraden. Wenn a positiv ist; so ist, weil a die Tagente des Winkels, den die Gerade mit AX macht, dieser Winkel spitz. Im Gegentheile wird dieser Winkel, wenn a negativ wird, stumpf. Im ersten Falle liegen die unbestimmten Verlängerungen der Geraden in den Quadranten XAY

und $X'AY'$. Im andern Falle hingegen liegen sie in den Quadranten YAX' und XAY'.

Weil b die Ordinate im Anfangspunkte ist; so wird, wenn es das positive Vorzeichen hat, der eine Theil AY der Achse über der Abscissenlinie geschnitten; wenn aber b negativ ist, dann geht die Gerade unter der Abscissenlinie durch die Achse der y, also durch den andern Theil AY'. Sind daher die Längen AC, $AC_{,}$ einander gleich und $= b$; so wird in den zwei ersten Fällen die Gerade durch den Punkt C, und in den zwei letzten durch den Punkt $C_{,}$ gehen.

Wenn nun K der Punkt ist, in welchem die Gerade $L'L'$, für welche der Winkel $L'KX = \chi$ ist, die Abscissenlinie schneidet; so entspricht diese Lage der Geraden der Gleichung des ersten Falles. Wenn ferner durch den Punkt C unter dem Winkel χ gegen AX eine Gerade $L''L''$ gezogen wird, welche AX in $K_{,}$ trifft; so wird, wegen $XK_{,}L'' = (180^{\circ} - \chi)$ auch $\mathrm{tg.}(XK_{,}L'') = -\mathrm{tg.}\chi = -\alpha$ seyn. Diese Lage $L''L''$ entspricht also dem zweien Falle.

Zieht man durch den Punkt $C_{,}$ und durch die Punkte $K_{,}$ und K die Geraden $L'''L'''$ und $L^{\mathrm{v}}L^{\mathrm{v}}$; so ist es wieder leicht einzusehen, dass die Lage jener Geraden dem dritten, und die Lage dieser dem vierten Falle entspreche.

In den Punkten K und $K_{,}$ wird $y=0$; so wie in den Punkten C und $C_{,}$ die Abscisse $x=0$ ist. Man findet nun überhaupt für die Coordinaten der Durchschnittspunkte der Geraden mit den Achsen $-\left(\frac{a}{b}\right)$ und b.

Es ist aus dem bisher Erklärten einleuchtend, dass:

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{im ersten Falle } -\left(\frac{+a}{+b}\right) = AK\,; & +b = AC \\
\text{.. zweiten Falle } -\left(\frac{-a}{+b}\right) = AK_{,}\,; & +b = AC \\
\text{.. dritten Falle } -\left(\frac{+a}{-b}\right) = AK_{,}\,; & -b = AC_{,} \\
\text{.. vierten Falle } -\left(\frac{-a}{-b}\right) = AK\,; & -b = AC_{,}
\end{array}\right\}
\begin{array}{c}\text{und die ge-}\\\text{rade Linie}\\\text{geht durch}\\\text{die Punkte:}\end{array}
\left\{\begin{array}{l}
K \text{ u. } C \\
K_{,} \text{ u. } C \\
K_{,} \text{ u. } C_{,} \\
K \text{ u. } C_{,}
\end{array}\right.$$

76. Wenn die gerade Linie durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht, dann verschwinden x und y gleichzeitig, es ist $b=0$, und die Gleichung dieser Geraden wird werden:

$$y = ax.$$

Ihre Lage hängt allein von dem Werthe des Coëffizienten a ab. Die vorhin betrachteten vier Fälle reduziren sich auf folgende zwei:

$$y = +ax\text{; und } y = -ax\text{;}$$

denen auch nur zwei verschiedene Lagen der Geraden entsprechen.

77. Bedient man sich zur Bestimmung der Punkte einer geraden Linie der schiefwinklichten Coordinaten; so findet man die Gleichungen derselben aus ihrer Gleichung zwischen den rechtwinklichten Coordinaten auf folgende Art.

Es sey AX, AY ein System zweier schiefwinklichter coordinirter Achsen, LL irgend eine Gerade, M ein Punkt derselben, $AP=x_{,}$, $PM=y_{,}$ die schiefwinklichten, und zieht man MQ senkrecht auf AX, $AQ=x$, $QM=y$ die rechtwinklichten Coordinaten dieses Punktes; endlich sey

$$y = ax+b \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

die Gleichung der Geraden LL.

Setzt man den Coordinaten-Winkel $XAY=v$; so hat man:

$$x = x_{,}+y_{,}.\cos. v\text{;}$$
$$y = y_{,}.\sin. v\text{;}$$

Hieraus findet man:

$$x_{,}=(x-y.\cot.v)\text{; } y_{,}= \frac{y}{\sin.v}\text{:}$$

Setzt man die Werthe von xy in die gegebene Gleichung der Geraden; dann findet man:

$$y_{,}.\sin.v = ax_{,}+ay_{,}.\cos.v+b$$

oder

$$y_{,}.(\sin.v-a.\cos.v) = ax_{,}+b\text{,}$$

und endlich hieraus:

$$y_{,}= \left(\frac{a}{\sin.v-a.\cos.v}\right).x_{,}+\left(\frac{b}{\sin.v-a.\cos.v}\right)$$

Setzt man $a = \text{tg.}\chi$,
wo χ der Winkel ist, den LL mit AX macht; dann hat man nach gehöriger Reduktion der letzten Gleichung:

$$y_{,} = \frac{\sin.\chi}{\sin.(\nu-\chi)} \cdot x_{,} + \frac{b.\cos.\chi}{\sin.(\nu-\chi)} \quad . \; . \; . \quad (2)$$

Diese Gleichung der Geraden LL zwischen den schiefwinklichten Coordinaten $x_{,}y_{,}$ hat genau dieselbe Form, als zwischen den rechtwinklichten xy.

Der Gleichung einer geraden Linie kann nun die allgemeine Form:

$$Ax + By + C = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

gegeben werden, es mögen xy rechtwinklichte oder schiefwinklichte Coordinaten seyn. Man erhält diese Gleichung aus der Gleichung

$$y = ax + b,$$

wenn man sie mit B multiplizirt, die andern Glieder zum Gliede By auf die andere Seite des Gleichheitszeichens schafft, und

$$-a.B = A; \; -b.B = C$$

setzt, so dass $a = -\frac{A}{B}$, $b = -\frac{C}{B}$.

Man erkennt hieraus, dass, wenn die Gleichung einer Geraden die Form wie (3) hat, die Grössen a und b oder die Lage der Geraden nicht sowohl von den absoluten Zahlenwerthen der Grössen ABC, als vielmehr von den Verhältnissen dieser Grössen zu einander abhängen, was auch schon daraus klar ist, weil der Faktor B, womit man die Gleichung $y = a.x + b$ multiplizirt hat, willkührlich angenommen werden kann.

78. Wir wollen itzt noch die Gleichung einer Geraden zwischen Polar-Coordinaten suchen.

Es sey also A (Fig. 40.) der Polar-Punkt, AX die Polar-Achse, m ein Punkt der Geraden LL, $Am = r$, $mAX = \varphi$ die Polar-Coordinaten dieses Punktes; $Ap = x$, $pm = y$ die rechtwinklichten Coordinaten, und die Gleichung der Geraden zwischen diesen letztern sey $y = ax + b$ (1)

Da nun

$$y = r.\sin.\varphi;\quad x = r.\cos.\varphi;$$

so giebt die Substitution dieser Werthe von xy in die gegebene Gleichung (1):

$$r.\sin.\varphi = ar.\cos.\varphi + b$$

und hieraus folgt

$$r = \frac{b}{\sin.\varphi - a.\cos.\varphi} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Ist χ der Neigungswinkel der Geraden LL gegen die Achse der x; dann ist

$$a = \text{tg}.\chi.$$

In dieser Voraussetzung wird die Gleichung (2) werden:

$$r = \frac{b.\cos.\chi}{\sin.(\varphi - \chi)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Ist m' ein zweiter Punkt der Geraden LL, und sind $r'\varphi'$ die Polar-Coordinaten desselben; dann hat man für ihn eben so:

$$r' = \frac{b.\cos.\chi}{\sin.(\varphi' - \chi)}.$$

Es ist also:

$$r : r' = \sin.(\varphi' - \chi) : \sin.(\varphi - \chi);$$

oder, da

$$(\varphi' - \chi) = mm'A, \quad \text{und} \quad (\varphi - \chi) = 180° - m'mA;$$

so ist

$$r : r' = \sin.(mm'A) : \sin.(m'mA)$$

d. h. *die Seiten eines Dreieckes verhalten sich wie die Sinusse der gegenüber stehenden Seiten*, wie bekannt.

Aus der Gleichung (3) ersieht man ferner, dass für $\varphi = 0$, $r = AK = -b.\text{cotg}.\chi$ wird; für $\varphi = 90°$ ist $r = AC = b$; für $\varphi = \chi$ wird $r = \frac{b.\cos.\chi}{0} = \infty$ d. h. r wird zu LL parallel.

79. Nachdem ich gezeigt habe, auf welche Art die Lage eines Systemes von Punkten in einer Ebene, welche in einer und derselben Richtung liegen, gegen ein System rechtwink-

lichter Achsen bestimmt werden könne; so wollen wir zunächst diejenigen Stücke in Betrachtung ziehen, welche aus Beziehungen der geraden Linie gegen das Achsensystem entspringen, und von der jedesmaligen Lage dieser Geraden gegen die fixen Achsen abhängen; diese sind Funktionen theils von einer der Beständigen a, b, welche die Lage einer geraden Linie bestimmen, theils von beiden zugleich.

Es sey nun

$$y = ax + b \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

die Gleichung irgend einer Geraden LL (Fig. 41), welche die Achsen der x und y in den Punkten K und C schneidet. Eine durch den Anfangspunkt A zur Linie LL parallel gezogene Gerade ll soll die correlative Linie der Geraden LL genannt werden; ihre Gleichung ist

$$y = ax \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Aus dieser Erklärung folgt, dass die Winkel, welche eine Gerade mit den coordinirten Achsen macht, eben dieselben sind, als welche die correlative Gerade mit den nemlichen Achsen bildet; nur mit dem Unterschiede, dass die Scheitel jener Winkel für verschiedene Linien in den verschiedenen Punkten der Achsen, die Scheitel dieser aber im Anfangspunkte liegen.

Bezeichnet man mit $(1.x)$ und $(1.y)$ die respektiven Winkel der gegebenen Geraden (1) mit den Achsen der x und y d. i. setzt man

$$lAX = (1.x), \quad lAY = (1.y),$$

(eine Bezeichnungsart, von der wir bereits im ersten Capitel Gebrauch gemacht haben); so findet man, mit Hilfe der Gleichung

$$a = \text{tg.}\,(1.x)$$

sehr leicht folgende:

$$\left.\begin{array}{l} \text{tg.}(1.x) = a;\ \cos.(1.x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}};\ \sin.(1.x) = \dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}} \\[2ex] \text{tg.}(1.y) = \dfrac{1}{a};\ \cos.(1.y) = \dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}};\ \sin.(1.y) = \dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}} \end{array}\right\} .(a)$$

Mit Hilfe derselben erhält man die schon bekannte Gleichung:

$$\cos^2(1.x)+\cos^2(1.y) = 1.$$

80. Die Punkte C und K, welche die Durchschnittspunkte der Geraden LL mit den Achsen der x und der y sind, und deren Entfernungen vom Anfangspunkte A gleichfalls von der Lage der Geraden gegen das Achsensystem abhängt, sind also diejenigen, in welchen einer der Werthe der Coordinaten x und y Null wird. In C ist $x=0$; und die Gleichung (1) des vorigen Art. giebt $y=AC=b$. In K ist $y=0$; daher wird die Gleichung (1) für diesen Fall $0=ax+b$; hieraus findet man $x=-\frac{b}{a}=AK$. Werden also auf den Achsen AX und AY die Punkte K und C so angenommen, dass sie vom Anfangspunkte der Coordinaten die respektiven Abstände $\frac{b}{a}$ und b haben; und zieht man durch diese zwei Punkte eine gerade Linie; so wird $y=ax+b$ ihre Gleichung seyn. Nennt man die Abstände $AC=h$, $AK=g$; so wird $b=h$, $-\frac{b}{a}=g$ folglich:

$$a=-\frac{b}{g}=-\frac{h}{g}.$$

Die Gleichung der Geraden hat dann die Form:

$$y=-\frac{h}{g}x+h,$$

welcher endlich noch diese Gestalt gegeben werden kann:

$$\frac{y}{h}+\frac{x}{g}=1.$$

Die Länge des zwischen den beiden Achsen enthaltenen Stückes CK dieser Geraden ist $=\sqrt{\{\overline{AK}^2+\overline{AC}^2\}}=\sqrt{g^2+h^2}$ $=\sqrt{\left(\frac{b^2}{a^2}+b^2\right)}=b.\sqrt{1+\frac{1}{a^2}}=\frac{b.\sqrt{1+a^2}}{a}=\frac{b}{\cos.(1.y)}=$ $\frac{b}{\sin.(1.x)}$:

Die Fläche des Dreieckes KAC endlich ist $= \frac{1}{2}.KA.CA$

$$= \frac{b^2}{2a}.$$

Stellen wir uns ferner vom Anfangspunkte A auf die Gerade LL ein Perpendikel AP gezogen vor, welche die Gerade LL im Punkte P trifft; so ist, wenn l die Länge dieses Lothes AP bezeichnet:

$$l = b.\cos.(1.x) = \frac{b}{\sqrt{1+a^2}} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Diesen Ausdruck für die Länge l findet man noch, wenn man betrachtet, dass der Inhalt des Dreieckes KAC von der einen Seite $= \frac{b^2}{2a}$, von der andern $= \frac{KC.l}{2} = \frac{l.b.\sqrt{1+a^2}}{2a}$ ist. Die Gleichung $\frac{b^2}{2a} = \frac{l.b.\sqrt{1+a^2}}{2a}$ giebt unmittelbar

$$l = \frac{b}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Sind pq die Coordinaten des Punktes P, d. i. $AQ = q$, $PQ = p$; so findet man für dieselben:

$$\left.\begin{aligned} q &= \frac{\overline{AP}^2}{AK} = \frac{al^2}{b} = \frac{a.b}{1+a^2}\,; \\ p &= \sqrt{AP^2 - AQ^2} = \sqrt{l^2 - \frac{a^2l^4}{b^2}} = \frac{l}{\sqrt{1+a^2}} = \frac{b}{1+a^2} \end{aligned}\right\} \ldots (2)$$

Sucht man die Gleichung einer Geraden, deren Lage dadurch bestimmt wird, dass man einen Punkt P giebt, durch welchen sie gehen soll, und die Bedingung hinzufüget, dass sie auf der Geraden AP senkrecht stehen soll; so hat man aus den Gleichungen (2) a und b nur durch die gegebenen Coordinaten pq auszudrücken, und in die allgemeine Gleichung der Geraden zu substituiren. Man findet so nach einigen Reduktionen:

$$y = -\frac{q}{p}.x + \left(\frac{p^2+q^2}{p}\right);$$

oder

$$p.y - q.x = p^2 + q^2 = l^2.$$

Diese Gleichung enthält einen sehr merkwürdigen Lehrsatz der Geometrie.

81. Ist m' ein Punkt der Ebene XAY, welcher ausserhalb der Geraden LL liegt, und durch seine Coordinaten $x'y'$ gegeben ist, und man sucht die Länge des Lothes, das von diesem Punkte auf die gegebene Gerade LL gefällt wird; so denke man sich durch den Punkt p' eine zur LL parallele Linie $p'\nu'$, und eine auf ll senkrechte Gerade $p'\pi$; ferner ziehe man $m'n'$ senkrecht auf LL, und ihre Verlängerung treffe jene Parallele in ν', so wie ll in s; so hat man:

$$m'\nu' = y'.\cos.(1.x) = \frac{y'}{\sqrt{1+a^2}};$$

$$p'\pi' = \nu's = x'.\sin.(1.x) = \frac{a.x'}{\sqrt{1+a^2}};$$

nun ist $m's = m'\nu' - \nu's = \dfrac{y' - a.x'}{\sqrt{1+a^2}}$.

Setzt man die gesuchte Länge des Lothes $m'n' = L$; so hat man endlich, wegen

$$m'n' = (m's - n's),$$

$$L = \frac{y' - a.x' - b}{\sqrt{1+a^2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Um die Coordinaten des Punktes n' zu bestimmen, in welchem das Perpendikel L die Gerade LL trifft; ziehe man durch diesen Punkt, zur Achse der x parallel, die Gerade $n'r$, welche die Ordinate $m'p'$ im Punkte r treffe. Es ist dann:

$$m'r = L.\cos.(1.x) = \frac{L}{\sqrt{1+a^2}},$$

und

$$n'r = L.\sin.(1.x) = \frac{a.L}{\sqrt{1+a^2}};$$

und folglich:

$$Aq' = Ap' + n'r = x' + \frac{aL}{\sqrt{1+a^2}} = \left(\frac{ay' + x' - ab}{1+a^2}\right);$$

$$q'n' = p'm' - m'r = y' - \frac{L}{\sqrt{1+a^2}} = \left(\frac{a^2y' + ax' + b}{1+a^2}\right);$$

Gerade Linie, welche durch zwei gegebene Punkte geht. Bedeutung ihrer Gleichung. Auflösung einiger Aufgaben, welche die Bestimmung einer Geraden in einer Ebene betreffen.

82. Es seyen $x'y'$ und $x''y''$ die Coordinaten zweier Punkte m' und m'' in der Ebene xy. Um die Gleichung der Geraden zu finden, welche durch diese zwei Punkte gezogen wird, haben wir die Grössen a und b der allgemeinen Gleichung

$$y = ax + b \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

die folglich für jetzt unbekannt sind, mittelst der gegebenen zwei Bedingungen durch Funktionen der gegebenen und bekannten Grössen $x'y'x''y''$ auszudrücken.

Da die Punkte $m'm''$ in der Geraden liegen sollen; so muss die angenommene Gleichung (1) für die Werthe der Coordinaten xy dieser beiden Punkte statt finden. Sie muss also sowohl für $x = x'$, $y = y'$;
als auch für $x = x''$, $y = y''$;
zugleich statt haben oder identisch werden.

Die zwei Bedingungen geben die Gleichungen:

$$y' = ax' + b\,;$$
$$y'' = ax'' + b\,.$$

Man hat also zwei Gleichungen zwischen den unbekannten Grössen a, b und den gegebenen $x'y'x''y''$ erhalten, die hinreichend sind, um jene zu bestimmen. Zieht man die obere Gleichung von der untern ab, so hat man:

$$y'' - y' = ax'' - ax'\,,$$

woraus folgt, dass:

$$a = \left(\frac{y'' - y'}{x'' - x'}\right).$$

Dann hat man:

$$b = \left(\frac{x''y' - x'y''}{x'' - x'}\right).$$

Die Gleichung der Geraden, welche durch die zwei Punkte $(x'y')$ und $(x''y'')$ gelegt wird, ist daher:

$$y = \left(\frac{y'' - y'}{x'' - x'}\right).x + \left(\frac{x''y' - x'y''}{x'' - x'}\right) \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Die Formeln, welche wir zur Bestimmung der Winkel der Geraden mit den coordinirten Achsen, der Coordinaten der Durchschnittspunkte der Geraden mit den Achsen, der Länge des Lothes, das vom Anfangspunkte auf die gerade Linie gezogen wird, der Coordinaten des Durchschnittspunktes dieser zwei Senkrechten, u. s. w. in den vorhergehenden Art. gegeben haben, werden dann für diesen Fall geben:

$$l = \frac{x''y' - x'y''}{\sqrt{\{(x''-x')^2 + (y''-y')^2\}}};$$

$$q = \frac{(y''-y')(x''y'-x'y'')}{(x''-x')^2+(y''-y')^2}; \quad p = \frac{(x''-x')(x''y'-x'y'')}{(x''-x')^2+(y''-y')^2};$$

$$g = \frac{x''y'-x'y''}{y'-y''}; \quad h = \frac{x''y'-x'y''}{x''-x'};$$

$$\text{tg.}(1.x) = \left(\frac{y''-y'}{x''-x'}\right);$$

$$\cos(1.x) = \frac{x''-x'}{\sqrt{(x''-x')^2+(y''-y)^2}}; \sin.(1.x) = \frac{y''-y'}{\sqrt{(x''-x')^2+(y''-y')^2}}$$

83. Wir wollen itzt der gefundenen Gleichung (2) des vorhergehenden Art. die Gestalt:

$$y.(x''-x') - x.(y''-y') = (x''y'-x'y'')$$

ertheilen. Um die Bedeutung dieser Gleichung näher zu erklären, bemerke ich zuerst, dass $(x''y'-x'y'')$ der doppelte Werth des Flächeninhaltes des Dreieckes $m'Am''$ ist. Nennt man ihn k; so ist

$$y.(x''-x') - x.(y''-y') = 2.k$$

oder

$$(y.x''-x.y'') - (y.x'-x.y') = 2.k.$$

Nun ist wieder:

$$(y.x''-x.y'') = 2.mAm'';$$

$$(y.x'-x.y') = 2.mAm';$$

folglich ist:

$$mAm'' - mAm' = k.$$

Die eben behandelte Gleichung zeigt also unter der Gestalt, unter welcher wir sie eben betrachtet haben, an, dass der Unterschied der Dreiecke mAm'' und mAm', welche ihren gemein-

schaftlichen Scheitel im Anfangspunkte A, und ihre Grundlinien auf der Geraden LL haben, der beständigen Grösse k oder dem Dreiecke $m'Am''$ gleich ist, ein Satz, dessen Identität an sich klar ist.

Zieht man durch den Punkt m die zu den Achsen AX und AY parallelen Geraden $m\nu''$ und $m\mu''$, von denen die $m\nu''$ die $m'p'$ in ν', und die $m\mu''$ die durch m' zur Achse AX parallel gezogene Gerade $m'n'$ in μ' schneidet; so ist offenbar:

$$\left.\begin{aligned} y.(x''-x') &= \nu'p'p''\nu'' \\ x.(y''-y') &= \mu'n'n''\mu'' \end{aligned}\right\}$$

Die Gleichung (2) des vorigen Art. zeigt also unter der Gestalt, unter welcher sie hier betrachtet wird, noch an, dass der Unterschied der Rechtecke $\nu'p'p''\nu''$ und $\mu'n'n''\mu''$ beständig der doppelten Fläche des Dreieckes $m'Am''$ gleich sey.

Wenn einer der Punkte, z. B. m' auf der Achse der x, und der andere auf der Achse der y liegt; so dass $x', 0$; $0, y''$; die Coordinaten dieser zwei Punkte sind, oder: $y' = 0$, $x'' = 0$; dann hat man zur Gleichung der geraden Linie, welche durch diese zwei Punkte der Achsen x, y gelegt wird,

$$y = -\frac{y''}{x'}.x + y''$$

oder

$$\frac{y}{y''} + \frac{x}{x'} = 1,$$

eine Gleichung, welche schon oben angezeigt wurde. Die Summe der Rechtecke $x'.y$ und $y''.x$ ist stets einer beständigen Grösse, oder dem Rechtecke $x'.y''$ gleich.

84. Folgende Auflösungsmethode der Aufgabe, die Gleichung der Geraden zu finden, welche durch die Punkte $(x'y')$ und $(x''y'')$ geht, ist einfacher und eleganter als die schon gegebene.

Von den Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned} y' &= ax' + b\,; \\ y'' &= ax'' + b\,; \end{aligned}$$

ziehe man jene von dieser ab, so hat man eine Gleichung, aus der

$$a = \left(\frac{y''-y'}{x''-y'}\right)$$

gefunden wird. Zieht man von der angenommenen Gleichung der Geraden

$$y = ax+b$$

die erste Bedingungsgleichung ab; so hat man

$$y-y' = a.(x-x').$$

Setzt man in diese Gleichung den Werth, der für a gefunden wurde; so erhält man:

$$y-y' = \left(\frac{y''-y'}{x''-x'}\right).(x-x').$$

Die Identität dieser Gleichung mit der im vorigen Art. gefundenen kann leicht nachgewiesen werden; denn löst man die Faktoren auf; so hat man:

$$y-y' = \left\{\frac{y''-y'}{x''-x'}.x-\frac{y''-y'}{x''-x'}.x'\right\}$$

oder $$y = \frac{y''-y'}{x''-x'}.x+(y'-\frac{y''-y'}{x''-x'}.x')$$

oder endlich:

$$y = \frac{y''-y'}{x''-x'}.x+\left(\frac{x''y'-x'y''}{x''-x'}\right).$$

Die Gleichung:

$$y-y' = a.(x-x') \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

ist in der analytischen Geometrie von grosser Wichtigkeit. Sie ist nemlich die gemeinschaftliche Form der Gleichungen aller derjenigen Geraden, welche durch den Punkt gehen, dessen Coordinaten $x'y'$ sind. Diese Gleichungen, so wie die zugehörigen Geraden unterscheiden sich nur durch den Werth der Grösse a von einander. Um also unter den unendlich vielen Geraden, welche durch denselben Punkt m' gezogen werden können, eine bestimmte Gerade zu fixiren, hat man noch eine Bedingung zu wissen nöthig, welcher durch ihre besondere Lage Genüge geleistet werden soll. Aus dieser Bedingung hat man die

Grösse a zu bestimmen. So hat man z. B. wenn noch beigefügt wird, dass die Gerade auch noch durch den Punkt m'' gehen soll, die Gleichung:

$$y''-y' = a.(x''-x');$$

woraus

$$a = \left(\frac{y''-y'}{x''-x'}\right)$$

folgt.

Zieht man durch den Punkt m' eine andere Gerade, welche auf derjenigen senkrecht steht, deren Gleichung

$$y-y' = a.(x-x')$$

ist; so macht diese mit AX den Winkel $\{180^0-(1.\gamma)\}$, und weil die Tangente dieses Winkels $= -\mathrm{tg}.(1.\gamma) = -\frac{1}{a}$; so wird ihre Gleichung seyn:

$$(y-y') = -\frac{1}{a}.(x-x').$$

Es folgt also hieraus, dass die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} y-y' &= a.(x-x') \\ y-y' &= -\frac{1}{a}.(x-x') \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (2)$$

zu zwei geraden Linien gehören, welche durch den Punkt $(x'y')$ gehen und gegenseitig auf einander senkrecht stehen.

Gehen diese zwei Geraden durch den Anfangspunkt der Coordinaten; so hat man $x'=0$, $y'=0$.

Die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} y &= ax; \\ y &= -\frac{1}{a}.x; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

gehören also für zwei gerade Linien, welche im Anfangspunkte senkrecht auf einander stehen.

85. *In einer Ebene sind n Punkte gegeben; man soll die Gleichung einer geraden Linie in dieser Ebene finden, welche die Eigenschaft hat, dass die algebraische Summe aller Perpendikel,*

welche auf sie von den gegebenen Punkten herabgelassen werden, gleich Null sey.

Es sey

$$y = ax + b$$

die gesuchte Gleichung der geraden Linie; ferner $x'y'$, $x''y''$, $x'''y'''$, . . . die Coordinaten der gegebenen Punkte $m'm''m'''$.... Bezeichnet man die Längen der Perpendikel, welche von den gegebenen Punkten auf die Gerade herabgelassen werden, respektive mit $L' L'' L'''$. . . ; so hat man:

$$L' = \frac{y' - ax' - b}{\sqrt{1+a^2}};$$

$$L'' = \frac{y'' - ax'' - b}{\sqrt{1+a^2}};$$

$$L''' = \frac{y''' - ax''' - b}{\sqrt{1+a^2}};$$

.

Der gegebenen Bedingung gemäss soll

$$L' + L'' + L''' + \ldots = 0$$

seyn; man hat also folgende Gleichung:

$$(y' + y'' + y''' + \ldots) = a.(x' + x'' + x''' + \ldots) + nb$$

oder abgekürzt:

$$\Sigma(y) = a.\Sigma(x) + n.b.$$

Dieser Relation müssen die Beständigen a, b, von deren Werthen die Lage der Geraden abhängt, Genüge leisten, wenn dieser Geraden die in der Aufgabe ausgesprochene Eigenschaft zukommen soll. Man sieht aber alsogleich, dass die Aufgabe, wie sie hier vorgetragen wurde, zu den unbestimmten gehört, da es unendlich viele Werthe für a b giebt, welche dieser Bedingungsgleichung ein Genüge leisten. Es giebt also in dieser Ebene unendlich viele Gerade, welche die geforderte Eigenschaft besitzen. Um ihre Lage näher zu bestimmen, setze man den Werth von b, d. i.

$$b = \frac{\Sigma(y)}{n} - a.\frac{\Sigma(x)}{n}$$

in die angenommene Gleichung der Geraden; so hat man:

$$\left(y - \frac{\Sigma(y)}{n}\right) = a.\left(x - \frac{\Sigma(x)}{n}\right).$$

Aus dieser Gleichung schliessen wir, den Bemerkungen des vorhergehenden Art. gemäss, dass alle diese gesuchten Geraden das mit einander gemeinschaftlich haben, dass sie durch den Punkt gehen, dessen Coordinaten

$$\frac{\Sigma(x)}{n}, \quad \frac{\Sigma(y)}{n}$$

sind. Soll die Gerade zugleich durch den Anfangspunkt gehen, dann muss die Gleichung für $x = 0$, $y = 0$ statt finden; dadurch erhält man $a = \frac{\Sigma(y)}{\Sigma(x)}$ d. h. die gesuchte Gerade ist gegen die Achse der x unter einem Winkel geneigt, dessen trigonometrische Tangente $= \frac{\Sigma(y)}{\Sigma(x)}$. Diese Resultate stimmen genau mit den, Art. 71 gefundenen, überein.

Wenn ein jedes der Perpendikel $L' L'' L''' \ldots$ noch mit einer gegebenen Zahl multiplizirt werden soll, und wenn

$$\mu_{,}.L' + \mu''.L'' + \mu'''.L''' + \ldots = 0;$$

seyn soll; dann führt diese Bedingungsgleichung auf die Gleichung:

$$\left(y - \frac{\Sigma(\mu y)}{\Sigma(\mu)}\right) = a.\left(x - \frac{\Sigma(\mu x)}{\Sigma(\mu)}\right);$$

In dieser sind die Gleichungen aller Geraden dieser Ebene enthalten, welche die verlangte Eigenschaft besitzen. Man erkennt hieraus wieder, dass alle diese Geraden durch den Punkt geben, der durch die Coordinaten

$$\frac{\Sigma(\mu x)}{\Sigma(\mu)} \quad \text{und} \quad \frac{\Sigma(\mu y)}{\Sigma(\mu)}$$

bestimmt wird; und dass, wenn die gerade Linie durch den Anfangspunkt geht, ihr Winkel mit der Achse der x so gross sey, dass die trigonometrische Tangente desselben $= \frac{\Sigma(\mu y)}{\Sigma(\mu x)}$ sey.

86. *Es sind in einer Ebene n gerade Linien ihrer Lage nach durch eben so viele Gleichungen gegeben; man sucht einen Punkt in dieser Ebene, welcher die Eigenschaft besitzt, dass, wenn man von diesem Punkte auf die gegebenen geraden Linien die Perpendikel $L' L'' L'''$. . . herablässt, und jedes dieser Perpendikel mit einer der respektiven Zahlen $\mu' \mu'' \mu'''$. . . multiplizirt; alsdann die Summe aller dieser Produkte einer gegebenen Grösse G gleich sey*, d. h. dass

$$\mu'.L'+\mu''.L''+\mu'''.L'''+ \ldots = G.$$

Es seyen nun

$$y = a' x+b' \quad ;$$
$$y = a'' x+b'' \quad ;$$
$$y = a''' x+b''' \quad ;$$
$$\ldots$$

die Gleichungen der gegebenen geraden Linien, und $x_{,}y_{,}$ die Coordinaten des gesuchten Punktes.

Nun ist

$$L' = \frac{y_{,}-a'.x_{,}-b'}{\sqrt{1+a'^2}} ;$$

$$L'' = \frac{y_{,}-a''.x_{,}-b''}{\sqrt{1+a''^2}} ;$$

$$L''' = \frac{y_{,}-a'''.x_{,}-b'''}{\sqrt{1+a'''^2}} ;$$

$$\ldots\ldots$$

Bringt man diese Werthe in die gegebene Bedigungsgleichung; so erhält man:

$$\left.\begin{array}{l} y_{,}.\left\{\frac{\mu'}{\sqrt{1+a'^2}}+\frac{\mu''}{\sqrt{1+a''^2}}+\frac{\mu'''}{\sqrt{1+a'''^2}}+ \ldots\right\} \\ -x_{,}.\left\{\frac{\mu'a'}{\sqrt{1+a'^2}}+\frac{\mu''a''}{\sqrt{1+a''^2}}+\frac{\mu'''a'''}{\sqrt{1+a'''^2}}+ \ldots\right\} \\ -\left\{\frac{\mu'b'}{\sqrt{1+a'^2}}+\frac{\mu''b''}{\sqrt{1+a''^2}}+\frac{\mu'''b'''}{\sqrt{1+a'''^2}}+ \ldots\right\} \end{array}\right\} = G$$

Bedient man sich der gewöhnlichen Abkürzungsart mit dem Summenzeichen Σ; so wird diese Gleichung:

$$y_{,}.\Sigma\left(\frac{\mu}{\sqrt{1+a^2}}\right) = x_{,}.\Sigma\left(\frac{\mu a}{\sqrt{1+a^2}}\right) + \left\{\Sigma\left(\frac{\mu b}{\sqrt{1+a^2}}\right) + G\right\}.$$

Dieser Gleichung müssen nun die Werthe der Coordinaten $x_{,}y_{,}$ Genüge leisten, wenn der Punkt die in der Aufgabe ausgesprochene Eigenschaft besitzen soll. Diese Relation giebt alsogleich zu erkennen, dass es unendlich viele solcher Punkte giebt, welche in einer geraden Linie liegen, deren Gleichung gefunden wird:

$$y = \left\{\frac{\Sigma\left(\frac{\mu a}{\sqrt{1+a^2}}\right)}{\Sigma\left(\frac{\mu}{\sqrt{1+a^2}}\right)}\right\}.x + \left\{\frac{\Sigma\left(\frac{\mu b}{\sqrt{1+a^2}}\right)+G}{\Sigma\left(\frac{\mu}{\sqrt{1+a^2}}\right)}\right\}$$

Diese Gerade ist gegen die Achse der x unter einem Winkel geneigt, dessen trigonometrische Tangente gleich ist:

$$\Sigma\left(\frac{\mu a}{\sqrt{1+a^2}}\right) : \Sigma\left(\frac{\mu}{\sqrt{1+a^2}}\right).$$

Hieraus folgt ferner, weil die gegebene Grösse G nicht im Faktor von x erscheint, dass (für die nemlichen gegebenen Geraden, und für die nemlichen Zahlen $\mu'\mu''\ldots$) die Summe $\Sigma(\mu L)$ für die Punkte aller derjenigen Geraden dieselbe bleibt, welche unter einander parallel sind. Gehen die gegebenen Geraden durch den Anfangspunkt der Coordinaten, und nennt man die Winkel, welche sie mit der Achse x machen, $\chi'\chi''\chi'''\ldots$; dann hat man, wegen $b'=0$, $b''=0$, $b'''=0,\ldots$ die Gleichung

$$y = \left\{\frac{\Sigma\left(\frac{\mu a}{\sqrt{1+a^2}}\right)}{\Sigma\left(\frac{\mu}{\sqrt{1+a^2}}\right)}\right\}.x + \frac{G}{\Sigma\left(\frac{\mu}{\sqrt{1+a^2}}\right)}$$

d. i.

$$y = \left\{\frac{\Sigma(\mu.\sin.\chi)}{\Sigma(\mu.\cos.\chi)}\right\}.x + \frac{G}{\Sigma(\mu.\cos.\chi)}.$$

Soll noch überdiess

$$G = 0$$

seyn; alsdann wird die Gleichung der Geraden werden:

$$y = \left\{\frac{\Sigma(\mu.\sin.\chi)}{\Sigma(\mu.\cos.\chi)}\right\}.x\,;$$

sie macht mit der Achse der x einen Winkel, dessen trigonometrische Tangente $= \frac{\Sigma(\mu.\sin.\chi)}{\Sigma(\mu.\cos.\chi)}$, und geht durch den Anfangspunkt der Coordinaten.

II. Gerade Linien im Raume.

Gleichungen der in den coordinirten Ebenen projizirten Geraden. Zwei derselben bestimmen die Lage der Geraden im Raume.

87. Die Lage eines Punktes im Raume wird bekanntlich durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} x &= a; \\ y &= b; \\ z &= c; \end{aligned}\right\}$$

welche als zugleich bestehend angenommen werden, bestimmt. Wir haben oben bemerkt, dass bloss eine dieser Gleichungen, z. B. $x=a$ für sich allein betrachtet, für alle diejenigen Punkte gehöre, welche den Abstand a von der coordinirten Ebene yz haben. Diese Punkte liegen in einer Ebene, welche im Abstande a von der Ebene yz zu dieser parallel gelegt wird. Man kann also auch sagen, dass die Gleichung $x=a$ für alle Punkte dieser Ebene gehöre. Eben so wird die Gleichung $y = b$, für sich allein betrachtet, allen denjenigen Punkten zugehören, welche in einer Ebene liegen, die in dem Abstande $=b$ von der Ebene xz und zu ihr parallel gelegt wird.

Endlich wird die Gleichung $z=c$, an und für sich betrachtet, die Gleichung derjenigen Ebene seyn, welche in einem Abstande $=c$ von der Ebene xy ihr parallel gelegt wird.

Betrachtet man itzt zwei dieser Gleichungen zusammen, z. B. $y = b$ und $z = c$;

so gehören diese für alle Punkte, welche in den beiden Ebenen zugleich liegen, davon die eine zur Gleichung $y=b$, die andere zur Gleichung $z=c$ gehört, d. i. die zwei Gleichungen $y=b$, $z=c$ zusammen betrachtet, gehören für die Durchschnittslinie dieser zwei Ebenen, die man desshalb die Gleichungen dieser Geraden nennt. Diese Gleichungen zeigen, dass die Coordinaten yz der verschiedenen Punkte der Geraden für jeden beliebigen Werth von x denselben Werth haben.

Wir wollen itzt die Lage der Punkte, welche in einer solchen Geraden liegen, in Bezug auf ein anderes System coordinirter Achsen betrachten, und aus diesen Gleichungen die Relationen zwischen den Coordinaten ihrer Punkte in diesem zweiten Systeme der Coordinaten mittelst der Formeln der Transformation suchen.

Man stelle sich nun ein System rechtwinklicht coordinirter Achsen AX_i, AY_i und AZ_i vor; die Gleichungen der Geraden, welche zur Achse der x_i parallel ist, seyen

$$\left.\begin{aligned} y_i &= b_i\,; \\ z_i &= c_i\,; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Es seyen itzt xyz die Coordinaten desselben Punktes der Geraden (1), aber in Bezug auf ein zweites System coordinirter Achsen AX, AY, AZ.

Man hat nun überhaupt:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_i.\cos.(x.x_i)+y_i.\cos.(x.y_i)+z_i.\cos.(x.z_i)\,; \\ y &= x_i.\cos.(y.x_i)+y_i.\cos.(y.y_i)+z_i.\cos.(y.z_i)\,; \\ z &= x_i.\cos.(z.x_i)+y_i.\cos.(z.y_i)+z_i.\cos.(z.z_i)\,; \end{aligned}\right\}$$

Nun ist $y_i=b_i$; $z_i=c_i$; folglich

$$\left.\begin{aligned} x&=x_i.\cos.(x.x_i)+b_i.\cos.(x.y_i)+c_i.\cos.(x.z_i)\,; \\ y&=x_i.\cos.(y.x_i)+b_i.\cos.(y.y_i)+c_i.\cos.(y.z_i)\,; \\ z&=x_i.\cos.(z.x_i)+b_i.\cos.(z.y_i)+c_i.\cos.(z.z_i)\,; \end{aligned}\right\} \quad .\ . \quad (2)$$

Diese drei Gleichungen, in denen nun x_i eine willkührliche Grösse ist, gehören für alle jene Punkte, welche in derselben Geraden (1) liegen. Eliminirt man also x_i aus diesen drei Gleichungen, so reduziren sich die drei Gleichungen (2) auf folgende zwei:

$$\begin{cases} y.\cos.(x.x_{,})-x.\cos.(y.x_{,}) = \\ \qquad \left\{ \begin{array}{l} b_{,}.[\cos.(x.x_{,}).\cos.(y.y_{,})-\cos.(x.y_{,}).\cos.(y.x_{,})] \\ +c_{,}.[\cos.(x.x_{,}).\cos.(y.z_{,})-\cos.(x.z_{,}).\cos.(y.x_{,})] \end{array} \right\} \\ z.\cos.(x.x_{,})-x.\cos.(z.x_{,}) = \\ \qquad \left\{ \begin{array}{l} b_{,}.[\cos.(x.x_{,}).\cos.(z.y_{,})-\cos.(x.y_{,}).\cos.(z.x_{,})] \\ +c_{,}.[\cos.(x.x_{,}).\cos.(z.z_{,})-\cos.(x.z_{,}).\cos.(z.x_{,})] \end{array} \right\} \end{cases} \quad (3)$$

Diese zwei Gleichungen gehören für die nemliche Gerade im Raume, als die Gleichung (1), nur mit dem Unterschiede, dass die Gleichung (1) die Coordinaten der Punkte in Beziehung auf das System $AX_{,}$, $AY_{,}$, $AZ_{,}$; die Gleichung (3) hingegen die Coordinaten dieser Punkte in Bezug auf das zweite System AX, AY und AZ enthält.

Setzt man die Theile, welche rechter Hand des Gleichheitszeichens in diesen beiden Gleichungen stehen, und welche in Absicht auf die von einem Punkte zum andern der Geraden veränderlichen Coordinaten xyz beständig sind, respektive A und B; so werden die Gleichungen (3):

$$\left. \begin{array}{l} y = x.\dfrac{\cos.(y.x_{,})}{\cos.(x.x_{,})} + \dfrac{A}{\cos.(x.x_{,})}; \\ z = x.\dfrac{\cos.(z.x_{,})}{\cos.(x.x_{,})} + \dfrac{B}{\cos.(x.x_{,})}; \end{array} \right\} \quad . \; . \; (4)$$

Da die in Rede stehende Gerade zur Achse $x_{,}$ parallel ist; so macht sie mit den Achsen der xyz dieselben Winkel, als $x_{,}$. Es ist also $(x.x_{,})=(1.x)$, $(y.x_{,})=(1.y)$, $(z.x_{,})=(1.z)$. Die Gleichungen (4) werden also:

$$\left. \begin{array}{l} y = x.\left\{\dfrac{\cos.(1.y)}{\cos.(1.x)}\right\} + \dfrac{A}{\cos.(1.x)}; \\ z = x.\left\{\dfrac{\cos.(1.z)}{\cos.(1.x)}\right\} + \dfrac{B}{\cos.(1.x)}; \end{array} \right\} \quad . \; . \; (5)$$

Setzt man, um noch mehr abzukürzen:

$$\frac{\cos.(1.y)}{\cos.(1.x)} = a; \quad \frac{A}{\cos.(1.x)} = b; \quad \frac{\cos.(1.z)}{\cos.(1.x)} = a_{,}; \quad \frac{B}{\cos.(1.x)} = b_{,};$$

so erhält man überhaupt:

$$\left. \begin{array}{l} y = ax+b; \\ z = a_{,}x+b_{,}; \end{array} \right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (6)$$

Auf diese allgemeine Form werden nun die Gleichungen aller Geraden im Raume zurückgebracht werden können. Man sieht hieraus, dass die Lage der Geraden gegen das System der coordinirten Achsen überhaupt von den vier Grössen $aa_{,}bb_{,}$ abhängig sey, und dass dieselbe bekannt ist, wenn diese vier Grössen gegeben sind. Aus der Art und Weise, wie diese Gleichungen erhalten worden sind, geht hervor, dass die Gleichung

$$y = ax + b \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

für sich allein betrachtet, nichts anders ist, als die Gleichung der Projektion der Geraden des Raumes in der coordinirten Ebene xy. Eben so wird:

$$z = a_{,}x + b_{,} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\beta)$$

an und für sich betrachtet, die Gleichung der Projektion der Geraden des Raumes in der Ebene xz seyn. Eliminirt man aus den Gleichungen $(\alpha)(\beta)$ die Grösse x; so erhält man eine Gleichung zwischen den Coordinaten yz, nemlich:

$$\frac{y-b}{a} = \frac{z-b_{,}}{a_{,}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\gamma)$$

und diese Relation ist die Gleichung einer Geraden, welche die Projektion der Geraden des Raumes in der Ebene yz ist. Zwei dieser Gleichungen zusammen bestimmen die Lage der Geraden im Raume.

Wenn also die zwei Projektionen einer Geraden des Raumes in zwei der coordinirten Ebenen gegeben sind, so wird dadurch die Lage dieser Geraden auch schon selbst gegeben; indem es nur eine einzige Gerade des Raumes geben kann, welche diesen beiden Bedingungen Genüge leistet.

Die Gleichungen (6) sind nun die Relationen, welche zwischen den Coordinaten einer Reihe von Punkten statt haben müssen, wenn diese Punkte in einer geraden Linie liegen.

Betrachtet man den Raum nach allen drei Abmessungen, so wird die Gleichung

$$y = ax + b$$

für alle diejenigen Punkte gehören, welche in einer Ebene liegen, und zwar in derjenigen, welche durch jene Projektion

in xy geht, und senkrecht auf dieser Ebene xy steht. Denn die Coordinaten aller Punkte dieser Ebene leisten dieser Relation Genüge. Ebenso wird die Gleichung

$$z = a_{\prime}x + b_{\prime}$$

an und für sich genommen, und wenn man den Raum nach seinen drei Abmessungen betrachtet, auch die Gleichung einer Ebene seyn, welche durch die Projektion in der Ebene xy geht, und zugleich auf dieser Ebene senkrecht steht.

Die zwei Gleichungen

$$y = ax + b; \quad z = a_{\prime}x + b_{\prime}$$

zusammen genommen, werden demnach allen denjenigen Punkten zugehören, die in den erwähnten Ebenen zugleich liegen, und diese Punkte befinden sich in der Durchschnittslinie dieser Ebenen. Eine Gerade im Raume wird also gegeben seyn, wenn die zwei Ebenen gegeben sind, deren Durchschnittslinie sie ist, oder wenn zwei Projektionen der Geraden in zwei der coordinirten Ebenen gegeben sind.

88. Die Gleichungen der Geraden im Raume lassen sich noch durch andere Betrachtungen erhalten.

Sind $m m' m''$ Punkte, welche in einer Geraden im Raume liegen, sind ferner $n n' n''$ die Projektionen derselben in der Ebene xy, und $p p' p''$ die Projektionen auf der Achse AX, und setzt $Ap = x$, $pn = y$, $nm = z$; $Ap' = x'$, u. s. w. so dass xyz, $x'y'z'$, $x''y''z''$ die Coordinaten dieser drei Punkte $m m' m''$ sind; zieht man endlich durch den Punkt n die zu AX parallele Gerade, welche die Coordinaten $y'y''$ in $\nu'\nu''$, und durch m die zur ll Parallele, welche die Coordinaten $z'z''$ in $\mu'\mu''$ schneiden; so hat man, weil die entstehenden Dreiecke $n\nu'n'$, $n\nu''n''$ einander ähnlich sind:

$$(x'-x):(y'-y) = (x''-x):(y''-y) \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

Eben so, weil die Dreiecke $m\mu'm'$ und $m\mu''m''$ einander ähnlich sind, hat man:

$$m\mu' : (z'-z) = m\mu'' : (z''-z).$$

Weil aber: $m\mu' : m\mu'' = (x'-x) : (x''-x)$;

so ist: $(x'-x) : (z'-z) = (x''-x) : (z''-z) \quad . \quad . \quad (\beta)$

Die Entwicklung dieser zwei Proportionen (α) (β) führt auf folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} y &= \left(\frac{y''-y'}{x''-x'}\right).\,x + \left(\frac{x''y'-x'y''}{x''-x'}\right);\\ z &= \left(\frac{z''-z'}{x''-x'}\right).\,x + \left(\frac{x''z'-x'z''}{x''-x'}\right); \end{aligned}\right\} \;.\;.\quad (1)$$

Diese zwei Gleichungen haben offenbar dieselbe Form, als die Gleichungen (α) (β) des vorigen Art. Vergleicht man beide mit einander, so findet man:

$$\left(\frac{y''-y'}{x''-x'}\right) = a\,,\; \left(\frac{z''-z'}{x''-x'}\right) = a_{,};$$

$$\left(\frac{x''y'-x'y''}{x''-x'}\right) = b\,,\; \left(\frac{x''z'-x'z''}{x''-x'}\right) = b_{,}.$$

Ein zweites noch einfacheres Verfahren gründet sich auf den bereits im ersten Capitel angemerkten Satz, dass die Coordinaten aller Punkte, welche in einerlei Richtung liegen, so durch den Anfangspunkt geht, in denselben Verhältnissen zu einander stehen. Wenn man sich nun eine gerade Linie im Raume vorstellt, welche, gehörig verlängert, die Ebene yz in einem Punkte O, dessen Coordinaten $y = b$ und $z = b_{,}$ sind, trifft, und man denkt sich ferner durch diesen Punkt O drei gerade Linien gezogen, welche den drei coordinirten Achsen parallel sind; so kann man O als einen neuen Anfangspunkt der Coordinaten betrachten. Sind $x_{,} y_{,} z_{,}$ die Coordinaten irgend eines Punktes der Geraden im Raume, so werden die Verhältnisse

$$\frac{y_{,}}{x_{,}} \text{ und } \frac{z_{,}}{x_{,}}$$

und zwar jedes für sich, von einem Punkte zum andern unveränderlich dieselben bleiben.

Bezeichnet man den beständigen Exponenten des einen mit a und den des andern Verhältnisses mit $a_{,}$; so dass:

$$\frac{y_{,}}{x_{,}} = a\,; \quad \frac{z_{,}}{x_{,}} = a_{,};$$

und bemerkt, dass

$$x_i = x\,;\; y_i = y - b\,;\; z_i = z - b_i\,;$$

so hat man: $\frac{y-b}{x} = a$ und $\frac{z-b}{x} = a_i\,;$

woraus die obigen Gleichungen der Geraden im Raume entspringen.

Geht die Gerade durch den Anfangspunkt der Coordinaten, oder fällt der Punkt O mit A zusammen; so wird $y_i = y$, $z_i = z$, wegen $b = 0$, $b_i = 0$; und die Gleichungen der Geraden sind:

$$y = ax\,;\; z = a_i . x.$$

Eine durch den Anfangspunkt A der Coordinaten zur geraden Linie LL im Raume parallel gezogene Gerade (λ) nennen wir die correlative Gerade derselben. Die Winkel, welche irgend eine Gerade im Raume mit den coordinirten Achsen macht, sind nun dieselben, als welche ihre correlative Gerade mit ihnen macht. Die correlativen Geraden reduziren demnach alle Winkel, welche gerade Linien im Raume mit einander machen, auf den Anfangspunkt der Coordinaten.

Analytische Ausdrücke zur Bestimmung der Winkel, welche die gerade Linie im Raume und ihre Projektionen in den coordinirten Ebenen mit den coordinirten Achsen und Ebenen machen. Coordinaten der Durchschnittspunkte der Geraden im Raume mit den coordinirten Ebenen, und der Projektionen dieser Geraden mit den Achsen.

89. Da eine Gerade im Raume mit den coordinirten Achsen dieselben Winkel als ihre correlative Linie macht; so braucht man hier bloss diese letzte zu betrachten. Ihre Gleichungen sind:

$$y = \left\{\frac{\cos.(1.y)}{\cos.(1.x)}\right\} . x\,;\; z = \left\{\frac{\cos.(1.z)}{\cos.(1.x)}\right\} . x$$

so dass:

$$a = \frac{\cos.(1.y)}{\cos.(1.x)}\,;\; a_i = \frac{\cos.(1.z)}{\cos.(1.x)}\,; \quad \ldots\ldots \quad (\alpha)$$

Erhebt man beide Theile dieser Gleichungen aufs Quadrat, und addirt zu ihrer Summe die Einheit; so erhält man:

$$1+a^2+a_{,}^2 = \frac{\cos.^2(1.x)+\cos.^2(1.y)+\cos.^2(1.z)}{\cos.^2(1.x)} = \frac{1}{\cos.^2(1.x)},$$

und endlich hieraus: $\cos.(1.x) = \frac{1}{\sqrt{1+a^2+a_{,}^2}}$

Die Gleichungen (α) geben hierauf die Ausdrücke für die Cosinusse der Winkel ($1.y$) und ($1.z$).

Man hat also:

$$\left.\begin{aligned} \cos.(1.x) &= \frac{1}{\sqrt{1+a^2+a^2}}; \\ \cos.(1.y) &= \frac{a}{\sqrt{1+a^2+a_{,}^2}}; \\ \cos.(1.z) &= \frac{a_{,}}{\sqrt{1+a^2+a_{,}^2}}; \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (1)$$

Diese Ausdrücke ergeben sich auch noch unmittelbar aus den im ersten Capitel gegebenen Formeln:

$$\cos.(1.x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \cos.(1.y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};$$

$$\cos.(1.z) = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

wenn man darin $y = ax$, $z = a_{,}x$ setzt.

Aus diesen Formeln (1) lassen sich nun leicht die Sinusse und Tangenten dieser Winkel ausdrücken. Man findet:

$$\left.\begin{aligned} \sin.(1.x) &= \frac{\sqrt{a^2+a_{,}^2}}{\sqrt{1+a^2+a_{,}^2}}; & \text{tg.}(1.x) &= \sqrt{a^2+a_{,}^2}; \\ \sin.(1.y) &= \frac{\sqrt{1+a_{,}^2}}{\sqrt{1+a^2+a_{,}^2}}; & \text{tg.}(1.y) &= \left(\frac{\sqrt{1+a_{,}^2}}{a}\right); \\ \sin.(1.z) &= \frac{\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{1+a^2+a_{,}^2}}; & \text{tg.}(1.z) &= \left(\frac{\sqrt{1+a^2}}{a_{,}}\right); \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (2)$$

Bezeichnet man die Projektionen der Geraden (1) in den Ebenen xy, xz, yz respektive mit $1'$ $1''$ $1'''$; so ist:

$$\left.\begin{aligned}
tg.(1'.x) &= cot.(1'.y) = a\,;\; cs.(1'.x) = sin.(1'.y) = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\\
tg.(1'.y) &= cot.(1'.x) = \frac{1}{a}\,;\; cs.(1'.y) = sin.(1'.x) = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\\
tg.(1''.x) &= cot.(1''.z) = a_{,}\,;\; cs.(1''.x) = sin.(1''.z) = \frac{1}{\sqrt{1+a_{,}^2}}\\
tg.(1''.z) &= cot.(1''.x) = \frac{1}{a_{,}}\,;\; cs.(1''.z) = sin.(1''.x) = \frac{a_{,}}{\sqrt{a+a'^2}}\\
tg.(1'''.y) &= cot.)1'''.z) = \frac{a_{,}}{a}\,;\; cs.(1'''.y) = sin.(1'''.z) = \frac{a}{\sqrt{a^2+a_{,}^2}}\\
tg.(1'''.z) &= cot.(1'''.y) = \frac{a}{a_{,}}\,;\; cs.(1'''.z) = sin.(1'''.y) = \frac{a_{,}}{\sqrt{a^2+a'^2}}
\end{aligned}\right\}\;(3)$$

Bezeichnet man ferner die Winkel, welche die Gerade (1) oder ihre correlative Gerade mit den coordinirten Ebenen xy, xz, yz macht, mit $(1.xy)$, $(1.xz)$, $(1.yz)$; so hat man, weil diese Winkel die Ergänzungswinkel von $(1.z)$, $(1.y)$, $(1.x)$ zu einem Rechten sind,

$$\left.\begin{aligned}
sin.(1.xy) &= \frac{a'}{\sqrt{1+a^2+a_{,}^2}}\,;\quad tg.(1.xy) = \frac{a_{,}}{\sqrt{1+a^2}}\,;\\
sin.(1.xz) &= \frac{a}{\sqrt{1+a^2+a'^2}}\,;\quad tg.(1.xz) = \frac{a}{\sqrt{1+a_{,}^2}}\,;\\
sin.(1.yz) &= \frac{1}{\sqrt{1+a^2+a_{,}^2}}\,;\quad tg.(1.yz) = \frac{1}{\sqrt{a^2+a_{,}^2}}\,;
\end{aligned}\right\}\;.\;(4)$$

Zwischen den Winkeln, welche eine Gerade und ihre Projektionen mit den coordinirten Achsen und Ebenen machen, findet eine Menge von Relationen statt, deren Entwicklung aus den Systemen der Gleichungen (1) (2) (3) (4) leicht ist. So z. B. ist

$$\left.\begin{aligned}
cos.(1.x) &= sin.(1.z).\ cos.(1'''.x) = sin.(1''.z).\ sin.(1.y)\\
cos.(1.y) &= sin.(1.x).\ cos.(1'.y) = sin.(1'''.z).\ sin.(1.z)\\
cos.(1.y) &= sin.(1.y).\ cos.(1''.z) = sin.(1'.y).\ sin.(1.x)
\end{aligned}\right\}\;.\;(5)$$

$$\left.\begin{aligned}
tg.(1.xy) &= tg.(1''.x).\ cos.(1'.x) = tg.(1'''.y).\ cos.(1''.y)\\
tg.(1.xz) &= tg.(1'.x).\ cos.(1''.x) = tg.(1'''.z).\ cos.(1''.z)\\
tg.(1.yz) &= tg.(1'.y).\ cos.(1'''.z) = tg.(1''.z).\ cos.(1'''.z)
\end{aligned}\right\}\;.\;(6)$$

90. Die Abstände der Durchschnittspunkte der Projektionen der Geraden in den drei coordinirten Ebenen vom Anfangspunkte der Coordinaten werden auf dieselbe Art bestimmt, wie im Art. 80. Nennt man sie respektive fg; $f_{,}g_{,}$; $f_{,,}g_{,,}$; so dass f die Entfernung des Durchschnittspunktes der Projektionen der Geraden in der Ebene xy mit der Achse der x, und g die Entfernung des Durchschnittspunktes dieser Projektion mit der Achse der y vom Anfangspunkte ist; und dass sich auf ähnliche Weise $f_{,}g_{,}$ und $f_{,,}g_{,,}$ auf die Ebenen xz und yz beziehen; so hat man:

$$\left.\begin{array}{l} f = b;\ f_{,} = b_{,};\ f_{,,} = \dfrac{ab_{,} - a_{,}b}{a};\\[2ex] g = -\dfrac{b}{a};\ g_{,} = -\dfrac{b_{,}}{a_{,}};\ g_{,,} = -\dfrac{ab_{,} - a_{,}b}{a_{,}}; \end{array}\right\} \quad (1)$$

Nennt man $hh_{,}h_{,,}$ die Längen der zwischen zwei coordinirten Achsen in den coordinirten Ebenen xy, xz, yz von den in dieser Ebene projizirten Linien; so ist:

$$\left.\begin{array}{l} h = \sqrt{f^2 + g^2} = \dfrac{b.\sqrt{1+a^2}}{a};\\[2ex] h_{,} = \sqrt{f_{,}^2 + g_{,}^2} = \dfrac{b_{,}.\sqrt{1+a_{,}^2}}{a_{,}};\\[2ex] h_{,,} = \sqrt{f_{,,}^2 + g_{,,}^2} = (a_{,}b - ab_{,}).\sqrt{\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a_{,}^2}}; \end{array}\right\} \quad (2)$$

Aus den Gleichungen (1) (2) lassen sich zwischen den Abständen $ff_{,}f_{,,}gg_{,}g_{,,}$ und den Längen $hh_{,}h_{,,}$ einige merkwürdige Relationen herleiten. Diese sind:

$$f_{,,} = \frac{f_{,}}{g_{,}}.(g_{,} - g);\ \frac{f_{,,}}{f_{,}} + \frac{g}{g_{,}} = 1;$$

$$g_{,,} = -\frac{f}{g}.(g_{,} - g);\ \frac{g_{,,}}{f} + \frac{g_{,}}{g} = 1;$$

$$\frac{ff_{,,}}{f_{,}} + \frac{gg_{,,}}{g_{,}} = 0;$$

$$h_{,,} = (g_{,} - g).\sqrt{\frac{f^2}{g_{,}^2} + \frac{f_{,}^2}{g_{,}^2}};\ h_{,,} = f_{,,}\sqrt{\frac{f_{,}^2}{g_{,}^2} + \frac{g_{,,}^2}{f_{,,}^2}}.$$

91. Denkt man sich die Gerade LL im Raume gehörig verlängert; so wird sie die coordinirten Ebenen xy, xz, yz in Punkten treffen, welche wir respektive mit $e\,e_{,}e_{,,}$ bezeichnen wollen. Die Coordinaten dieser Punkte bezeichnet man mit pq; $p_{,}q_{,}$; $p_{,,}q_{,,}$. Die Ausdrücke für sie lassen sich nun leicht auf folgende Art finden.

Da der Punkt e ein Punkt der Ebene xy und der Geraden LL zugleich ist; so werden die drei Gleichungen:

$$y = ax+b;\ z = a_{,}x+b_{,};\ z = 0: \quad . \; . \; . \quad (\alpha)$$

zusammen genommen für den Durchschnittspunkt e gehören. Die Werthe der Coordinaten sind in diesem Falle

$$x = p,\ y = q,\ z = 0.$$

Da der Punkt $e_{,}$ in der Ebene xz und in der Geraden LL zugleich liegt, so werden die Gleichungen:

$$y = ax+b;\quad z = a_{,}x+b_{,};\quad y = 0. \quad . \; . \quad (\beta)$$

zusammengenommen für den Durchschnittspunkt $e_{,}$ gehören. Die Werthe der Coordinaten sind in diesem Falle:

$$x = p_{,};\quad y = 0:\quad z = q_{,}.$$

Da endlich der Punkt $e_{,,}$ in der Ebene yz und in der Geraden LL zugleich liegt; so werden die Gleichungen:

$$y = ax+b;\quad z = a_{,}x+b_{,};\quad x = 0; \quad . \; . \quad (\gamma)$$

zusammengenommen für den Durchschnittspunkt $e_{,,}$ gehören. Die Werthe der Coordinaten sind in diesem Falle:

$$x = 0;\quad y = p_{,,};\quad z = q_{,,}.$$

Löst man die Gleichungen (α) (β) (γ) auf; so wird man finden:

$$\left.\begin{array}{lll} p = -\dfrac{b_{,}}{a_{,}}: & p_{,} = -\dfrac{b}{a}; & p_{,,} = b; \\ q = \dfrac{a_{,}b-a\,b_{,}}{a_{,}}; & q_{,} = \dfrac{ab_{,}-a_{,}b}{a}; & q_{,,} = b_{,}; \end{array}\right\} \quad . \; . \quad (1)$$

Aus diesen drei Gleichungen ergeben sich einige merkwürdige Relationen. So z. B. ist:

$$\left.\begin{array}{c} a_{,}(p_{,}-p) = q_{,}:\ a(p-p_{,}) = q; \\ a_{,}q+aq_{,} = 0; \end{array}\right\} \quad . \; : \; . \; . \quad (2)$$

$$\left.\begin{array}{l} pq_{,}+p_{,}q_{,,}=pq_{,,};\ \dfrac{p_{,}}{p}+\dfrac{q_{,}}{q_{,,}}=1; \\ p_{,}q+pp_{,,}=p_{,}p_{,,};\ \dfrac{pp_{,,}}{p_{,}}+\dfrac{qq_{,,}}{q_{,}}=0; \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (3)$$

Vergleicht man die oben für $f\,g\,f_{,}g_{,}f_{,,}g_{,,}$ gefundenen Ausdrücke mit den Ausdrücken für $p\,q\,p_{,}q_{,}p_{,,}q_{,,}$; so wird man inne, dass:

$$p=g_{,};\ p_{,}=g;\ p_{,,}=f;\quad q=g_{,,};\ q_{,}=f_{,,};\ q_{,,}=f_{,}\ \ldots\ (4)$$

Diese Identitaten lassen sich leicht durch geometrische Construktionen nachweisen.

Bezeichnet man die Längen der zwischen den Punkten $e\,e_{,}e_{,,}$ enthaltenen Stücke der Geraden LL respektive mit $E\,E_{,}E_{,,}$, so dass $e_{,}e_{,,}=E$; $ee_{,,}=E_{,}$; $ee_{,}=E_{,,}$; so ist:

$$\left.\begin{array}{l} E=\sqrt{\{p_{,}^2+p_{,,}^2+(q_{,,}-q)^2\}}=\dfrac{b.\sqrt{1+a^2+a_{,}^2}}{a}=\dfrac{b}{\cos.(1.y)} \\ E_{,}=\sqrt{\{p^2+q_{,,}^2+(p_{,,}-q)^2\}}=\dfrac{b_{,}.\sqrt{1+a^2+a_{,}^2}}{a_{,}}=\dfrac{b_{,}}{\cos.(1.z)} \\ E_{,,}=\sqrt{\{q^2+q_{,}^2+(p_{,}-p)^2\}}=\left(\dfrac{b}{a}-\dfrac{b_{,}}{a_{,}}\right)\sqrt{1+a^2+a_{,}^2} \end{array}\right\}(5)$$

Hieraus folgt, wie an sich schon klar ist, dass

$$E=E_{,}+E_{,,}.$$

Abstände des Anfangspunktes der Coordinaten von den Projektionen der Geraden des Raumes in den coordinirten Ebenen. Abstand des Anfangspunktes von einer Geraden im Raume, und Coordinaten des Punktes, in welchem dieses Perpendikel die Gerade trifft. Projektionen dieses Abstandes in den coordinirten Ebenen. Abstand eines Punktes im Raume von einer Geraden.

92. Nennt man $l\,l_{,}l_{,,}$ die Längen der Perpendikel, welche vom Anfangspunkte auf die in den Ebenen xy, xz, yz projizirten Linien der Geraden LL des Raumes gefällt werden; so hat man, nach Gl. (1) Art. 80 die Ausdrücke:

$$l = \frac{b}{\sqrt{1+a^2}}, \quad l_{,} = \frac{b_{,}}{\sqrt{1+a_{,}^2}}; \quad l_{,,} = \frac{ab_{,}-a_{,}b}{\sqrt{a^2+a_{,}^2}} \Big\} \;.\;.\; (1)$$

Mit Hülfe der Ausdrücke (2) Art. (86) findet man noch:

$$l = \frac{b}{a_{,}.\text{tg}.(1.z)}; \quad l_{,} = \frac{b_{,}}{a.\text{tg}.(1.y)}; \quad l_{,,} = \frac{ab_{,}-a_{,}b}{\text{tg}.(1.x)}. \Big\} \;.\; (2)$$

Setzt man die Werthe von $b b_{,}$ aus den zwei ersten dieser Gleichungen in die dritte; so erhält man nachstehende Relation zwischen den Längen $l l_{,} l_{,,}$.

$$a^2.l_{,}.\text{tg}.(1.y) - a_{,}^2.l.\text{tg}.(1.z) = l_{,,}.\text{tg}.(1.x).$$

Dividirt man diese Gleichung durch $\sqrt{1+a^2+a^2_{,}}$, und bemerkt, dass

$$\frac{a_{,}.\text{tg}.(1.z)}{\sqrt{1+a^2+a_{,}^2}} = \sin.(1.z); \quad \frac{a.\text{tg}.(1.y)}{\sqrt{1+a^2+a_{,}^2}} = \sin.(1.y);$$

$$\frac{\text{tg}.(1.x)}{\sqrt{1+a^2+a_{,}^2}} = \sin.(1.x);$$

so hat man:

$$a.l_{,}.\sin.(1.y) - a_{,}.l.\sin.(1.z) = l_{,,}.\sin.(1.x).$$

Dividirt man diese Gleichung abermals mit $\sqrt{1+a^2+a_{,}^2}$; so hat man:

$$l_{,}.\cos.(1.y).\sin.(1.y) - l.\cos.(1.z).\sin.(1.z) = l_{,,}.\sin.(1.x).\cos.(1.x)$$

oder $l_{,}.\sin.2.(1.y) - l_{,}.\sin.2.(1.z) = l_{,,}.\sin.2.(1.x)$,

welche Relation zwischen den Perpendikeln vorzüglich bemerkenswerth ist.

93. Wir wollen itzt auch noch die Länge des Perpendikels suchen, das man vom Anfangspunkte auf die gerade Linie im Raume herablässt. Würde man die Coordinaten des Punktes kennen, in welchem dieses Perpendikel die Gerade trifft, so würde man alsogleich auch diese Länge kennen.

Die Methode, der wir uns hier bedienen werden, um diese Coordinaten zu bestimmen, gründet sich auf die Lehre vom Grössten und Kleinsten in der Analys. Wenn man nun irgend eine Funktion von x hat, welche wir V nennen wollen, so

erlangt diese den grössten oder kleinsten Werth für denjenigen Werth von x, welcher sich aus der Gleichung:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

ergiebt. So z. B. wenn $V = (Ax^2 + Bx + C)$, worin ABC gegebene Grössen sind, und man legt der Grösse x verschiedene Werthe bei; so wird man auch für V verschiedene Werthe erhalten. Unter allen denjenigen Werthen aber, die man nur immer der Grösse x beilegen kann, ist der Werth, welcher aus der Gleichung

$$2Ax + B = 0$$

folgt, d. i. der Werth $x = -\frac{B}{2A}$ derjenige, für den der Werth von V am kleinsten wird. Der Werth von V wird dann, wenn man ihn in diesem Falle mit V' bezeichnet, werden:

$$V' = \left(\frac{4AC - B^2}{4A^2}\right).$$

Dieser besondere Satz, davon wir die Anwendung eben zur Bestimmung der in Rede stehenden Coordinaten machen werden, lässt sich auf folgende elementäre Art erweisen.

Setzt man nemlich $x = -\frac{B}{2A} + \delta$

$$x = -\frac{B}{2A} - \delta$$

anstatt x in den Ausdruck V, so erhält man, wenn man seinen Werth im ersten Falle mit $V_{,}$ und im zweiten mit $V_{,,}$ bezeichnet:

$$V_{,} = \left(\frac{4AC - B^2}{4A^2}\right) + \delta^2 = V' + \delta^2;$$

$$V_{,,} = \left(\frac{4AC - B^2}{4A^2}\right) + \delta^2 = V'' + \delta^2;$$

Hieraus sieht man offenbar, dass in beiden Fällen $V_{,} > V'$ und $V_{,,} > V''$. Für jeden andern Werth von x also, der grösser oder kleiner ist, als $-\frac{B}{2A}$, wird der Werth von V grösser

Er wird also am kleinsten, wenn

$$\delta = 0$$

d. i. wenn $x = -\frac{B}{2A}$.

Für denselben Werth von x wird auch jede Potenz V^n am kleinsten. Ist V eine Funktion zweier Veränderlichen xy; so wird sie für diejenigen Werthe von xy am kleinsten, welche die Auflösung der Gleichungen:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = 0; \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = 0$$

giebt. Ist z. B.

$$V = \{A.y^2 + B.x^2 + C.x.y + D.y + E.x + F\};$$

so wird der Werth von V für diejenigen Werthe von xy am kleinsten, welche sich aus den zwei Gleichungen:

$$2Ay + Cx + D = 0$$
$$2Bx + Cy + E = 0$$

ergeben.

Ich werde nun zuerst an ein paar einfachen Beispielen den Gebrauch dieser Sätze in der analytischen Geometrie zeigen.

Es sey $y = ax + b$ die Gleichung einer Geraden in der Ebene xy. Sind x und y die Coordinaten eines Punktes auf dieser Geraden; so hat man zum Ausdrucke des Abstandes dieses Punktes vom Anfangspunkte:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (ax+b)^2} = \{x^2(1+a^2) + 2ab.x + b^2\}^{\frac{1}{2}}$$

Dieser Ausdruck wird nun für denjenigen Werth von x am kleinsten, der aus der Gleichung

$$x.(1+a^2) + a.b = 0$$

sich ergiebt; also für den Werth

$$x = -\frac{a.b}{1+a^2}.$$

Dieser Werth ist also die Abscisse desjenigen Punktes der Geraden, der den kürzesten Abstand vom Anfangspunkte hat: und weil dieser kürzeste Abstand zugleich das Loth aus dem Anfangspunkte auf die Gerade ist; so werden, wenn der gefundene Werth von x in die Gleichung der Geraden gesetzt wird,

die Coordinaten des Durchschnittspunktes dieses Lothes mit der Geraden seyn:

$$x = \frac{-ab}{1+a^2};\ y = \frac{-b}{1+a^2};$$

Der kürzeste Abstand, oder die Länge des Perpendikels wird dann seyn:

$$\sqrt{x^2+y^2} = -\sqrt{\left\{\frac{a^2+b^2}{(1+a^2)^2} + \frac{b^2}{(1+a^2)^2}\right\}} = \frac{-b}{\sqrt{1+a^2}}$$

genau so, wie ihn geometrische Betrachtungen gaben.

Sind $x'y'$ die Coordinaten eines gegebenen Punktes in der Ebene der xy, und man sucht den Abstand dieses Punktes von der Geraden, deren Gleichung

$$y = ax+b$$

ist; so suche man nun die Coordinaten xy desjenigen Punktes dieser Geraden, welcher am kürzesten vom Anfangspunkte absteht. Der Abstand des Punktes $(x'y')$ von einem Punkte (xy) überhaupt ist:

$$\sqrt{\{(x-x')^2+(y-y')^2\}}$$

Weil der Punkt (xy) in der gegebenen Geraden liegt; so hat man für diesen Abstand der zwei Punkte:

$$\sqrt{\{(x-x')^2+(ax+b'-y')^2)\}} =$$
$$\sqrt{[(1+a^2).\,x+2.(ab-x'-ay').\,x+(x^{2\prime}+(b-y')^2)]}$$

Dieser Ausdruck wird am kleinsten, wenn:

$$\left.\begin{aligned} x &= \left(\frac{ay'+x'-ab}{1+a^2}\right), \\ \text{wo dann: } y &= ax+b = \left(\frac{a^2y'+ax'+b}{1+a^2}\right) \end{aligned}\right\}$$

ist. Da nun:

$$\left.\begin{aligned} x-x &= \frac{ay'-a^2x'-ab}{1+a^2} = a.\left(\frac{y'-ax'-b}{1+a^2}\right) \\ y-y' &= \frac{-y'+ax'+b}{1+a^2} = -\left(\frac{y'-ax'-b}{1+a^2}\right) \end{aligned}\right\}$$

so erhält man für die Länge dieses Lothes:

$$\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2} = (1+a^2)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{y'-ax'-b}{1+a^2}\right) = \frac{y'-ax'-b}{\sqrt{1+a^2}}$$

Alle diese Resultate stimmen genau mit den schon oben erhaltenen überein.

94. Wir wollen nun auf ähnliche Art diese Grundsätze der Geometrie anwenden, um die Coordinaten des Durchschnittspunktes des Lothes, das vom Anfangspunkte oder von einem gegebenen Punkte des Raumes auf eine gegebene Gerade im Raume herabgelassen wird, nebst der Länge dieses Lothes zu finden.

Es seyen nun xyz die Coordinaten irgend eines Punktes m der Geraden, deren Gleichungen sind:

$$y = ax + b \,;\quad z = a_{\prime}x + b_{\prime}.$$

Die Entfernung dieses Punktes m vom Anfangspunkte ist dann

$$\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)},$$

oder, wenn man in diesem Ausdrucke für y und z die Werthe aus den gegebenen Gleichungen der Geraden setzt; so ist sie

$$\sqrt{\{x^2 + (ax+b)^2 + (a_{\prime}x + b_{\prime})^2\}},$$

oder endlich, wenn man die Glieder unter dem Wurzelzeichen entwickelt:

$$\sqrt{\{\, (1 + a^2 + a_{\prime}^2).x^2 + 2(a.b + a_{\prime}.b_{\prime})x + b^2 + b_{\prime}^2 \,\}}$$

Dieser Ausdruck wird am kleinsten, wenn man x so annimmt, dass

$$(1 + a^2 + a_{\prime}^2).x + (a.b + a_{\prime}.b_{\prime}) = 0.$$

Der Werth von x aus dieser Gleichung ist nun die Abscisse desjenigen Punktes der gegebenen Geraden, der am kürzesten von dem Anfangspunkte absteht. Da nun dieser kein anderer seyn kann, als derjenige, in welchem die von ihm zum Anfangspunkte gezogene Gerade senkrecht auf der gegebenen steht; so wird dieser Werth von x zugleich die erste Ordinate desjenigen Punktes seyn, in welchem das Loth aus dem Anfangspunkte auf die gegebene Gerade diese trifft. Die beiden andern Coordinaten y und z findet man hierauf aus den gegebenen Gleichungen der Geraden.

Die Coordinaten des in Rede stehenden Punktes sind also:

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{a.b+a_{,}.b_{,}}{1+a^2+a_{,}^2}; \\ y &= \frac{b+a_{,}.(a_{,}b-a.b_{,})}{1+a^2+a_{,}^2}; \\ z &= \frac{b_{,}-a.(a_{,}.b-a.b_{,})}{1+a^2+a_{,}^2}; \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; (1)$$

Die Länge des Lothes endlich ist

$$\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}\,,$$

oder nach Substitution der für xyz gefundenen Werthe und gehöriger Reduktion:

$$\left.\begin{aligned} L &= \frac{\sqrt{\{b^2+b_{,}^2+(a.b_{,}-a_{,}.b)\}}}{\sqrt{1+a^2+a_{,}^2}}; \\ \text{oder} \quad L &= \sqrt{\left\{b^2+b_{,}^2-\frac{(ab+a_{,}b_{,})^2}{1+a^2+a_{,}^2}\right\}}; \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (2)$$

Setzt man der Kürze wegen:

$$\sqrt{\{b^2+b_{,}^2+(a.b_{,}-a_{,}.b)^2\}} = G;$$

so findet man für die Projektionen dieses Lothes L auf den coordinirten Achsen:

$$\left.\begin{aligned} L.\cos.(1.x) &= \frac{G}{1+a^2+a_{,}^2} = s; \\ L.\cos.(1.y) &= \frac{G.a}{1+a^2+a_{,}^2} = s_{,}; \\ L.\cos.(1.z) &= \frac{G.a_{,}}{1+a^2+a_{,}^2} = s_{,,}; \end{aligned}\right\} \quad . \; : \; (3)$$

Aus diesen Gleichungen folgt unmittelbar die Relation:

$$G = \{s+a.s_{,}+a_{,}.s_{,,}\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

Die Projektionen dieses Lothes in den coordinirten Ebenen sind aber;

$$\left.\begin{aligned} L.\cos.(1.yz) &= \frac{G.\sqrt{a^2+a_{,}^2}}{1+a^2+a_{,}^2} = t; \\ L.\cos.(1.xz) &= \frac{G.\sqrt{1+a_{,}^2}}{1+a^2+a_{,}^2} = t'; \\ L.\cos.(1.xy) &= \frac{G.\sqrt{1+a_{,}^2}}{1+a^2+a_{,}^2} = t_{,,}; \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (5)$$

Aus diesen Gleichungen folgt die Relation:

$$\left.\begin{aligned} G &= \tfrac{1}{2}\{t\sqrt{a^2+a_{\prime}^2}+t_{\prime}.\sqrt{1+a_{\prime}^2}+t_{\prime\prime}.\sqrt{1+a^2}\} \\ \text{oder}\quad G &= \tfrac{1}{2}\{t.\text{tg}.(1.x)+a.t_{\prime}.\text{tg}.(1.y)+a_{\prime}.t_{\prime\prime}.\text{tg}.(1.z)\} \end{aligned}\right\} . \quad (6)$$

95. Wenn itzt die Länge des Perpendikels gesucht wird, das von irgend einem gegebenen Punkte des Raumes, dessen Coordinaten $x_{\prime}y_{\prime}z_{\prime}$ sind, auf eine gegebene Gerade des Raumes herabgelassen wird, deren Gleichungen sind:

$$y = ax+b\ ; \quad z = a_{\prime}x+b_{\prime}\ ;$$

so suche man zuerst die Coordinaten desjenigen Punktes der gegebenen Geraden, welcher den kürzesten Abstand von dem gegebenen Punkte $x'y'z'$ hat. Es seyen also überhaupt xyz die Coordinaten irgend eines Punktes der gegebenen Geraden, so ist, wenn L seine Entfernung vom gegebenen Punkte bezeichnet:

$$L = \sqrt{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]}$$

oder, nachdem man für y und z die durch x gegebenen Werthe setzt,

$$L = \sqrt{\{(x-x')^2+(ax+b-y')^2+(a_{\prime}x+b_{\prime}-z')^2\}}\ ,$$

oder endlich, wenn man die Grösse unter dem Wurzelzeichen gehörig entwickelt:

$$L = \sqrt{\left\{\begin{aligned} &(1+a^2+a_{\prime}^2).x^2+2.(ab+a_{\prime}b_{\prime}-x'-ay'-a_{\prime}z') \\ &\qquad +(x'^2+(b-y')^2+(b_{\prime}-z')^2\} \end{aligned}\right\}}$$

dieser Werth wird am kleinsten, wenn:

$$\left.\begin{aligned} x &= -\left\{\frac{ab+a_{\prime}b_{\prime}-x'-ay'-a_{\prime}z'}{1+a^2+a_{\prime}^2}\right\} \\ \text{dann findet man:}\quad y &= \left\{\frac{b+a_{\prime}.(a_{\prime}b-ab_{\prime})+a.(x'+ay'+a_{\prime}z')}{1+a^2+a_{\prime}^2}\right\} \\ \text{und}\quad z &= \left\{\frac{b_{\prime}-a.(a_{\prime}b-ab_{\prime})+a_{\prime}.(x'+ay'+a_{\prime}z')}{1+a^2+a_{\prime}^2}\right\} \end{aligned}\right\} (1)$$

Diese sind nun die Werthe der Coordinaten des Punktes der gegebenen Geraden, in welchen sie von dem aus dem Punkte $x'y'z'$ auf gefällte Perpendikel getroffen wird.

Bringt man diese Werthe von xyz in den vorhergehenden Ausdruck für L; so erhält man, nach einigen einfachen Reduk-

tionen desselben, den Werth des kürzesten Abstandes des gegebenen Punktes von der gegebenen Geraden selbst. Er ist:

$$L = \frac{\sqrt{\{(1+a^2+a_i^2)(x'^2+(b-y')^2+(b_i-z')^2-(ab+a_ib_i-x'-ay'-a_iz')^2\}}}{\sqrt{1+a^2+a_i^2}}$$

oder

$$L = \sqrt{\left\{x'^2+(b-y')^2+(b_i-z')^2-\frac{(ab+a_ib_i-x'-ay'-a_iz')^2}{1+a^2+a_i^2}\right\}} \quad (1)$$

96. In den zwei vorhergehenden Art. haben wir den kürzesten Abstand einer geraden Linie im Raume von einem gegebenen und fixen Punkte gesucht; d. h. unter den unendlich vielen Punkten, welche in der Richtung einer gegebenen Geraden im Raume liegen, haben wir denjenigen bestimmt, der einem gegebenen Punkte am nächsten liegt. Jetzt wollen wir die nemlichen Grundsätze der Analys anwenden, um den kürzesten Abstand einer gegebenen Geraden von jeder der coordinirten Achsen zu finden; d. h. unter der unendlichen Menge von Punkten, welche in der gegebenen Achse und in der gegebenen Geraden liegen, diejenigen zu finden, welche unter allen andern einander am nächsten liegen, oder die kürzeste Gerade zu finden, welche nur immer zwischen einer gegebenen Geraden und einer Achse gezogen werden kann. Es seyen nun

$$y = ax+b; \quad z = a_ix+b_i$$

die gegebenen Gleichungen einer Geraden. Um ihren kürzesten Abstand von der Achse der x zu finden, hat man die Coordinaten sowohl des einen Endpunktes dieses Abstandes, der in der gegebenen Geraden liegt, als auch des andern Endpunktes zu suchen, welcher sich auf der Achse der x befindet. Es seyen nun xyz die Coordinaten irgend eines Punktes in der gegebenen Geraden, und x' die Entfernung irgend eines Punktes der Achse der x vom Anfangspunkte. Die Entfernung der beiden Punkte von einander ist:

$$\sqrt{\{(x-x')^2+y^2+z^2\}} = L,$$

oder, da y' und z' gegeben sind:

$$L = \sqrt{\{(x-x')^2+(ax+b)^2+(a_ix+b_i)^2\}};$$

und endlich, wenn man diesen Ausdruck gehörig entwickelt:

$$L = \sqrt{\{(1+a^2+a_i^2)x^2 - 2x.x' + 2(ab+a_ib_i)x + (x'^2+b^2+b_i^2)\}}.$$

In diesem Ausdrucke sind, weil keiner der Punkte, weder auf der Geraden im Raume noch auf der Achse der x bestimmt ist, die Abscissen derselben, x und x', veränderlich.

Diese Grösse wird nun für diejenigen Werthe von x und x_i am kleinsten, welche die Auflösung der zwei folgenden Gleichungen giebt:

$$(1+a^2+a_i^2).x - x' + (ab+a_ib_i) = 0$$
$$x' = x;$$

hieraus folgt also:

$$\left.\begin{aligned} x = x_i = -\left(\frac{ab+a_ib_i}{a^2+a_i^2}\right); \\ \text{und} \quad y = \frac{a_i(a_ib-a.b_i)}{a^2+a_i^2}; \quad z = \frac{a.(ab_i-a_ib)}{a^2+a_i^2}; \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (1)$$

Bezeichnet man den kürzesten Abstand der gegebenen Geraden von der Achse der x mit d_{ii}; dann findet man:

$$d_{ii} = \sqrt{(y^2+z^2)} = \frac{(ab_i-a_ib)}{\sqrt{a^2+a_i^2}} \quad . \; . \; . \; : (2)$$

Wir wollen auf gleiche Weise den kürzesten Abstand der gegebenen Geraden von der Achse der y und z suchen.

Bezeichnet man die Entfernung eines Punktes auf der Achse der y vom Anfangspunkte der Coordinaten mit y'; so ist seine Entfernung von einem Punkte der gegebenen Geraden:

$$\sqrt{\{x^2+(y-y')^2+z^2\}} \quad \text{d. i.}$$
$$\sqrt{\{x^2+(ax+b-y')^2+(a_ix+b_i)^2\}}, \quad \text{oder}$$
$$\sqrt{\{(1+a^2+a_i^2)x^2+2(ab-ay'+a_ib_i).x+b^2+b_i^2+y'^2-2by'\}}.$$

In dieser Grösse sind itzt die beiden Veränderlichen x und y'. Wenn sie am kleinsten werden soll, so hat man für $x\,y'$ diejenigen Werthe zu setzen, welche aus folgenden zwei Gleichungen sich ergeben:

$$(1+a^2+a_i^2).x+(ab+a_ib_i)-a.y' = 0;$$
$$y'-ax-b = 0 \quad \text{oder} \quad y' = y.$$

Die erste dieser zwei Gleichungen giebt:

$$x = \frac{-a_{,}.b_{,}}{1+a_{,}^2};$$

und hieraus folgt: . . (3)

$$y = \frac{b+a_{,}(a_{,}b-ab_{,})}{1+a_{,}^2}; \quad z = \frac{b_{,}}{1+a_{,}^2};$$

die kürzeste Entfernung der gegebenen Geraden von der Achse der y, welche wir mit $d_{,}$ bezeichnen wollen, ist demnach

$$d_{,} = \sqrt{x^2+z^2} = \frac{b_{,}}{\sqrt{1+a_{,}^2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

Ist endlich z' der Abstand eines Punktes auf der Achse der z vom Anfangspunkte der Coordinaten, so ist die Entfernung dieses Punktes von irgend einem der gegebenen Geraden:

$$\sqrt{\{x^2+y^2+(z-z')^2\}}$$

oder $$\sqrt{\{x^2+(ax+b)^2+(a_{,}x+b_{,}-z')^2\}},$$

oder endlich:

$$\sqrt{\{(1+a^2+a_{,}^2).x^2+2(ab+a_{,}b_{,}-a_{,}z').x+b^2-2b_{,}z'+z'^2\}}.$$

In diesem Ausdrucke sind xz' die beiden Veränderlichen. Soll der Werth desselben am kleinsten werden, so müssen xz' diejenigen Werthe haben, welche aus nachstehenden zwei Gleichungen folgen:

$$(1+a^2+a_{,}^2).x+(ab+a_{,}b_{,})-a_{,}z' = 0$$

$$z'-a_{,}x-b_{,} = 0 \quad \text{oder} \quad z' = z.$$

Die erste dieser Gleichungen giebt:

$$x = \frac{-a.b}{1+a^2};$$

und hieraus folgt: . . (5)

$$y = \frac{b}{1+a^2}; \quad z = \frac{b_{,}+a.(ab_{,}-a_{,}b)}{1+a^2};$$

Die kürzeste Entfernung der gegebenen Geraden von der Achse der z, welche wir mit d bezeichnen wollen, ist dann:

$$d = \sqrt{x^2+y^2} = \frac{b}{\sqrt{1+a^2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (6)$$

Vergleicht man die Ausdrücke, welche man hier für die kürzesten Distanzen $d\,d_{,}d_{,,}$ der gegebenen Geraden von den Achsen der zyx gefunden hat, mit denjenigen, welche wir oben

Art. 92 Gleichung (1) für die Längen $l\, l_{,} l_{,,}$ der Perpendikel angeführt haben, die vom Anfangspunkte der Coordinaten auf die in den Ebenen xy, xz, yz projizirten Linien der gegebenen Geraden gefällt werden; so wird sich alsogleich die Identität dieser Ausdrücke zeigen. Es ist nemlich

$$l = d\,;\quad l_{,} = d_{,}\,;\quad l_{,,} = d_{,,}.$$

Der Abstand des Anfangspunktes der Coordinaten von der Geraden kann auf eine einfache Art durch die kürzesten Abstände dieser Geraden von den coordinirten Achsen ausgedrückt werden. Die Gleichungen (2) (4) (6) geben nemlich:

$$\left.\begin{array}{c} b^2 = (1+a^2).d^2\,;\quad b_{,}^2 = (1+a_{,}^2).d^2_{,,}\,; \\ (ab_{,}-a_{,}b)^2 = (a^2+a_{,}^2).d^2_{,,}\,; \end{array}\right\}$$

Nun ist, nach Art. 94 Gleichung (2):

$$G = \{(1+a^2).\,d^2+(1+a_{,}^2).d_{,}^2+(a^2+a_{,}^2).d^2_{,,}\}^{\frac{1}{2}}$$

und

$$L = \frac{G}{\sqrt{1+a^2+a_{,}^2}}\,.$$

Diesem Ausdrucke kann man auch noch folgende Gestalt geben:

$$\left.\begin{array}{l} L = \sqrt{\{d^2\sin^2(1.x) + d^2_{,}\sin^2(1.y) + d^2_{,,}\sin^2(1.z)\}} \\ \text{oder } L = \sqrt{\{d^2\cos^2(1.yz)+d^2_{,}\cos^2(1.xz)+d^2_{,,}\cos^2(1.xy)\}} \end{array}\right\}.\;(7)$$

gemäss den Formeln Art. 89.

Nun ist $d.\cos.(1.yz)$ die Projektion des kürzesten Abstandes der gegebenen Geraden von der Achse der x in der Ebene yz; wir wollen dieselbe mit $\varDelta$ bezeichnen. Eben so bezeichne man mit $\varDelta_{,}$ die Projektion von $d_{,}$ in der Ebene xz, und endlich mit $\varDelta_{,,}$ die Projektion von $d_{,,}$ in der Ebene xy; so dass also

$$\varDelta = d.\cos.(1.yz)\,;\quad \varDelta_{,} = d_{,}.\cos.(1.xz)\,;\quad \varDelta_{,,} = d_{,,}.\cos.(1.xy).$$

Die Gleichung (7) wird nun geben:

$$L = \sqrt{\{\varDelta^2+\varDelta_{,}^2+\varDelta^2_{,,}\}}\quad .\;.\;.\;.\;.\;(8)$$

Sind nun $\varDelta\,\varDelta_{,}\varDelta_{,,}$ die drei Coordinaten eines Punktes im Raume, so ist seine Entfernung vom Anfangspunkte der Länge

des Lothes gleich, das vom Anfangspunkte auf die gegebene Gerade gezogen wird.

Bestimmungen der Lagen der Geraden im Raume aus gegebenen Bedingungen. Gerade Linie, welche durch zwei gegebene Punkte des Raumes geht. Bedeutung ihrer Gleichungen. Winkel, welche sie mit den coordinirten Achsen und Ebenen macht. Coordinaten ihrer Durchschnittspunkte mit den coordinirten Ebenen. Allgemeine Ausdrücke für die Cosinusse der Neigungswinkel, welche die Ebene, so durch den Anfangspunkt und eine gegebene Gerade im Raume gelegt wird, mit den coordinirten Ebenen macht.

97. Wir haben bereits oben schon angemerkt, dass die Lage einer Geraden im Raume von den Werthen der beständigen Grössen $a\,a_{,}b\,b_{,}$ abhängen, welche in ihren Gleichungen vorkommen. Wenn gewisse Bedingungen gegeben sind, welchen die Lage der Geraden Genüge leisten soll, so wird dieselbe vollkommen durch jene Bedingungen bestimmt seyn, wenn man Gleichungen aus ihnen herleiten kann, welche hinreichend sind, die Grössen $a\,a_{,}b\,b_{,}$ durch die in den Bedingungen der Aufgabe gegebenen Stücke auszudrücken. Umgekehrt wird man, wenn man schon durch die Grundsätze der Geometrie weis, dass die Lage einer Geraden im Raume durch die in gewissen Bedingungen gegebenen Stücke vollständig bestimmt werde, aus diesen Bedingungen gerade so viele Gleichungen ableiten können, als hinreichend sind, die Grössen $a\,a_{,}b\,b_{,}$ durch jene in den Bedingungen gegebenen Stücke auszudrücken. In den vorhergehenden Art. haben wir die Grössen, welche aus den verschiedenen Beziehungen einer Geraden im Raume gegen ein coordinirtes Achsensystem entspringen, in Funktionen dieser Stücke $a\,a_{,}b\,b_{,}$ ausgedrückt. Werden aber diese Stücke wieder als Funktionen von andern Grössen gegeben; so wird man die in den vorigen Art. entwickelten Funktionen noch gebrauchen können, um alle

daselbst in Betrachtung gezogenen Grössen als Funktionen von den in gewissen bekannten Bedingungen gegebenen, und die Lage der Geraden im Raume bestimmenden Stücken auszudrücken. Man erkennt nun leicht im Allgemeinen den Weg, den man einzuschlagen hat, um Probleme, welche die Lage einer auf was immer für eine Art bestimmten Geraden im Raume betreffen, auf die einfachste Weise aufzulösen. Einige dieser Aufgaben wollen wir nun in den folgenden Art. auflösen.

98. *Man soll die Gleichungen der Geraden im Raume finden, deren Lage durch die Bedingungen bestimmt wird, dass sie durch einen gegebenen Punkt in der Ebene xy gehe, gegen diese Ebene unter einem gegebenen Winkel geneigt sey, und dass ihre Projektion in dieser Ebene mit der Achse der x einen gegebenen Winkel mache.*

Wir wollen annehmen, dass die Coordinaten des in der Ebene xy gegebenen Punktes, durch welche die gesuchte Gerade gehen soll, $x'y'$ seyn; dass die Neigung dieser Geraden gegen die Ebene xy mit ϑ, und der Winkel, welchen ihre Projektion in der Ebene xy mit der Achse der x macht, mit η bezeichnet werde; endlich wollen wir annehmen, dass die gesuchten Gleichungen der Geraden seyen:

$$\left.\begin{aligned} y &= ax+b\,; \\ z &= a_{,}x+b_{,}\,; \end{aligned}\right\}$$

Hier sind also $x'y'\vartheta\,\eta$ die in den Bedingungen gegebenen Stücke, und $a\,a_{,}b\,b_{,}$ sind unbekannt. Man wird aber aus den gegebenen Bedingungen, wenn sie die Lage der Geraden im Raume genau bestimmen, so viel Gleichungen herleiten können, als gerade nothwendig sind, um die unbekannten Grössen $a\,a_{,}b\,b_{,}$ aus ihnen zu finden, oder durch die bekannten $x'y'\vartheta\,\eta$ auszudrücken. Denn erstlich sind hier die Stücke $x'y'$ mit denen einerlei, die wir Art. 91 mit pq bezeichnet haben; aus den Gleichungen (1) nimmt man also folgende zwei Relationen:

$$x' = -\frac{b_{,}}{a_{,}}\,; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

$$y' = \frac{a_, b - a b_,}{a_,} ; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\beta)$$

Ferner ist es klar, dass $\vartheta \eta$ nichts anderes sind, als die Winkel, welche Art. 89 mit $(1.xy)$ und $(1'.x)$ bezeichnet worden sind. Aus den Gleichungen (4) entnehmen wir nun folgende Relationen:

$$\text{tg.}\vartheta = \frac{a_,}{\sqrt{1+a^2}} ; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\gamma)$$

$$\text{tg.}\eta = a ; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\delta)$$

Nimmt man nun für die Grössen $a\,a_,\,b\,b_,$ solche Werthe an, die diesen vier Gleichungen Genüge leisten; so sind hiemit die gegebenen Bedingungen der Aufgabe erfüllt. Welches aber diese Werthe sind, findet man durch Auflösung dieser vier Gleichungen.

Die Gleichungen (γ) (δ) geben sogleich:

$$a = \text{tg.}\eta ; \quad a_, = \frac{\text{tg.}\vartheta}{\cos.\eta} ;$$

die Gleichungen (α) (β) aber geben:

$$b = y' - x'.\text{tg.}\eta ; \quad b_, = -\frac{x'.\text{tg.}\vartheta}{\cos.\eta} ;$$

die Gleichungen der gesuchten Geraden im Raume werden also seyn:

$$\left. \begin{aligned} y &= x.\text{tg.}\eta + (y' - x'.\text{tg.}\eta) ; \\ z &= x.\frac{\text{tg.}\vartheta}{\cos.\eta} - x'.\frac{\text{tg.}\vartheta}{\cos.\eta} ; \end{aligned} \right\}$$

oder:

$$\left. \begin{aligned} (y - y') &= (x - x').\text{tg.}\eta ; \\ z.\cos.\eta &= (x - x').\text{tg.}\vartheta ; \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Wir können itzt sehr leicht alle Stücke, welche aus den Beziehungen der geraden Linie im Raume gegen das Achsensystem entspringen, in Funktionen der gegebenen Grössen $x'y'\eta\vartheta$ ausdrücken, indem man nichts anderes zu thun hat, als in den allgemeinen Formeln, welche wir für solche Grössen in den vorhergehenden Art. gefunden haben, und welche überhaupt Funktionen der vier Stücke $a\,a_,\,b\,b_,$ sind, ihre hier

gefundenen Werthe zu substituiren. So z. B. findet man, nach Gleichung (1) Art. 89:
$\cos.(1.x) = \cos.\eta.\cos.\vartheta$; $\cos.(1.y) = \sin.\eta.\cos.\vartheta$; $\cos.(1.z) = \sin.\vartheta$;
Ausdrücke, welche uns schon aus dem ersten Capitel bekannt sind. Setzt man die Werthe für $a\,a_{,}b\,b_{,}$ in die Gleichungen (1) Art. 94; so hat man:

$$\left.\begin{array}{l} x = (1-\cos.^2\eta.\cos.^2\vartheta).x' - \sin.\eta.\cos.\eta.\cos.^2\vartheta.y' \\ y = -\sin.\eta.\cos.\eta.\cos.^2\vartheta.x' + (1-\sin.^2\eta.\cos.^2\vartheta).y' \\ z = -\sin.\vartheta.\cos.\vartheta.(x'.\cos.\eta + y'.\sin.\eta). \end{array}\right\}$$

und die Gleichung (2) desselben Art. giebt: $L =$
$\sqrt{\{(1-\cos.^2\eta.\cos.^2\vartheta).x'^2 + (1-\sin.^2\eta.\cos.^2\vartheta).y'^2 - x'y'.\sin.(2\eta).\cos.^2\vartheta\}}$.

Diese Ausdrücke geben also die Länge des Lothes, das vom Anfangspunkte der Coordinaten auf diese Gerade herabgelassen wird, und die Coordinaten des Punktes, wo dasselbe die Gerade trifft, in Funktionen der gegebenen Stücke $x'y'\eta\vartheta$.

Setzt man die Werthe für $a\,a_{,}b\,b_{,}$ in die Ausdrücke (2) (4) (6) Art. 96; so findet man:

$$\left.\begin{array}{l} d_{,,} = -\dfrac{\text{tg}.\vartheta}{\sqrt{(\text{tg}.^2\vartheta + \sin.^2\eta)}}y'; \\ d_{,} = -\dfrac{\text{tg}.\vartheta}{\sqrt{(\text{tg}.^2\vartheta + \cos.^2\eta)}}.x'; \\ d = (y'.\cos.\eta - x'.\sin.\eta); \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; (2)$$

99. Wir wollen itzt die Lage einer geraden Linie im Raume durch andere Bedingungen bestimmen, und die Grössen $a\,a_{,}b\,b_{,}$ in Funktionen der in diesen Bedingungen gegebenen Stücken ausdrücken.

Man soll die Gleichungen einer Geraden im Raume suchen, welche durch zwei gegebene Punkte des Raumes geht.

Es seyen $m'm''$ diese zwei Punkte des Raumes, deren Lage durch die Coordinaten $x'y'z'$ und $x''y''z''$ bestimmt wird; man hat die beständigen Grössen $a\,a_{,}\,b\,b_{,}$ in Funktionen der in der Frage gegebenen sechs Grössen $x'y'z'x''y''z''$ auszudrücken: was dadurch bewerkstelliget wird, dass man aus den gegebenen Bedingungen vier Gleichungen ableite, aus denen die unbekannten Grössen $a\,a_{,}b\,b_{,}$ gefunden werden können.

Die Gleichungen der gesuchten Geraden sind also:

$$\left.\begin{array}{l} y = ax+b\ ; \\ z = a_{,}x+b_{,}\ ; \end{array}\right\}$$

Weil der Punkt m' in der gesuchten Geraden liegen soll, so müssen die für sie angenommenen Gleichungen auch in dem Falle statt finden, da $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$ gesetzt wird. Diese Bedingung versieht uns mit nachstehenden zwei Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} y' = ax'+b\ ; \\ z' = a_{,}x'+b'\ ; \end{array}\right\} \ldots\ldots (\alpha)$$

Aus demselben Grunde, da die gerade Linie auch durch den Punkt m'' gehen soll, müssen die für diese Gerade angenommenen Gleichungen statt haben, wenn man in ihnen setzt

$$x = x'',\ y = y'',\ z = z''.$$

Diese zweite Bedingung versieht uns wieder mit nachstehenden zwei Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} y'' = ax''+b\ ; \\ z'' = a_{,}x''+b_{,}\ ; \end{array}\right\} \ldots\ldots (\beta)$$

Die Verbindung der Gleichungen $(\alpha)(\beta)$ giebt ein System von vier Gleichungen, zwischen den gegebenen Grössen $x'y'z'x''y''z''$ und den unbekannten Stücken $a\,a_{,}b\,b_{,}$.

Behandelt man diese Gleichungen nach der oben erklärten Methode; so erhält man erstlich:

$$y'-y'' = a.(x'-x'');$$
$$z'-z'' = a_{,}.(x'-x'');$$

Aus diesen zwei Gleichungen findet man sogleich:

$$a = \left(\frac{y'-y''}{x'-x''}\right);\ a_{,} = \left(\frac{z'-z''}{x'-x''}\right) \ldots (a)$$

und hierauf:

$$b = \left(\frac{x'y''-x''y'}{x'-x''}\right);\ b_{,} = \left(\frac{x'z''-x''z'}{x'-x''}\right) \ldots (b)$$

Auf die Gleichungen der gesuchten Geraden kann man auch noch auf eine der schon oben gebrauchten ähnliche Art gelangen. Zieht man nemlich die angenommenen Gleichungen von den Gleichungen erster Bedingung ab; so hat man:

$$\left.\begin{aligned} y-y' &= a.(x-x')\,; \\ z-z' &= a_{,}.(x-x')\,; \end{aligned}\right\}$$

Diese Gleichungen gehören, so lange $a a_{,}$ unbestimmt gelassen werden, allen geraden Linien zu, welche durch den Punkt im Raume gehen, dessen Coordinaten $x'y'z'$ sind. Um sie näher zu bestimmen, wird man mit dieser noch eine andere Bedingung verbinden, wodurch die Grössen $a\ a_{,}$ bestimmt werden. Die in unserm Falle gegebene zweite Bedingung ist, dass die gerade Linie auch durch den Punkt m'' gehen solle, dessen Coordinaten $x''y''z''$ sind. Diese Bedingung giebt sogleich:

$$y''-y' = a.(x''-x')\,;$$
$$z''-z' = a_{,}.(x''-x')\,;$$

woraus $a = \left(\frac{y''-y'}{x''-x'}\right)$; $a_{,} = \left(\frac{z''-z'}{x''-x'}\right)$ folgt.

Die gesuchten Gleichungen sind itzt:

$$\left.\begin{aligned} (y-y') &= \left(\frac{y''-y'}{x''-x'}\right).(x-x')\,; \\ (z-z') &= \left(\frac{z''-z'}{x''-x'}\right).(x-x')\,; \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (1)$$

100. Wir wollen itzt zuerst die Bedeutung dieser Gleichungen, oder die Sätze, welche sie enthalten, näher untersuchen. Bringen wir sie auf nachstehende Form zurück:

$$\left.\begin{aligned} (x''y-xy'')-(x'y-xy') &= (x''y'-x'y'') \\ (x''z-xz'')-(x'z-xz') &= (x''z'-x'z'') \end{aligned}\right\}$$

Man weis nun, dass die innerhalb der Klammern eingeschlossenen Grössen nichts anderes, als die doppelten Flächenräume von Dreiecken sind. Denkt man sich nemlich die Punkte $m\,m'm''$ mit dem Anfangspunkte der Coordinaten verbunden; so entstehen die Dreiecke mAm'', mAm', $m'Am''$, deren Flächeninhalte respektive mit $K'K''K$ bezeichnet werden sollen; und sind ihre Projektionen in den coordinirten Ebenen xy, xz, yz respektive $k'k'_{,}k''_{,}$; $k_{,,}k'_{,,}k''_{,,}$; $k\,k'k''$; so bedeuten jene zwei Gleichungen, dass

$$\left.\begin{aligned} k'-k'' &= k\,; \\ k'_{,}-k''_{,} &= k_{,}\,; \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (1)$$

und als Folge aus ihnen ist: $k'_{,,}-k''_{,,} = k_{,,}$;

Sind $\vartheta\,\vartheta_{,}\vartheta_{,,}$ die Neigungen des Dreieckes gegen die coordinirten Ebenen; dann ist:

$$k = K.\cos.\vartheta\ ;\ k_{,} = K.\cos.\vartheta_{,}\ ;\ k_{,,} = K.\cos.\vartheta_{,,}\ ;$$
$$k' = K'.\cos.\vartheta\ ;\ k'_{,} = K'.\cos.\vartheta_{,}\ ;\ k'_{,,} = K'.\cos.\vartheta_{,,}\ ;$$
$$k'' = K''.\cos.\vartheta\ ;\ k''_{,} = K''.\cos.\vartheta_{,}\ ;\ k''_{,,} = K''.\cos.\vartheta_{,,}\ ;$$

Jede der Gleichungen (1) reduzirt sich sodann auf diese:

$$K' - K'' = K \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

eine Gleichung, deren Identität an sich offenbar ist.

101. Wir wollen itzt diejenigen Grössen, welche wir in den vorhergehenden Art. durch Funktionen von $a\,a_{,}b\,b_{,}$ ausgedrückt haben, mit Hilfe der für diese vier beständige Grössen gefundenen Ausdrücke in Funktionen der gegebenen Grössen $x'y'z'x''y''z''$ suchen. Setzt man also die für $a\,a_{,}b\,b_{,}$ gefundenen Werthe in die Ausdrücke (1) Art. 89; so findet man

$$\cos.(1.x) = \sin.(1.yz) = \frac{x'-x''}{\sqrt{[(x'-x'')^2+(y'-y'')^2+(z'-z'')^2]}};$$
$$\cos.(1.y) = \sin.(1.xz) = \frac{y'-y''}{\sqrt{[(x'-x'')^2+(y'-y'')^2+(z'-z'')^2]}};$$
$$\cos.(1.z) = \sin.(1.xy) = \frac{z'-z''}{\sqrt{[(x'-x'')^2+(y'-y'')^2+(z'-z'')^2]}};$$

Ausdrücke, dergleichen wir schon im ersten Capitel für die Cosinusse der Winkel gefunden haben, welche die Richtung der Geraden $m'm''$ mit den coordinirten Achsen macht. Setzt man die Werthe für $a\,a_{,}b\,b_{,}$ in die Gleichungen (1) Art. 91; so ergeben sich für die Coordinaten der Durchschnittspunkte der Geraden mit den coordinirten Ebenen xy, xz und yz:

$$\left.\begin{array}{l} p=\left(\dfrac{x'z''-x''z'}{z''-z'}\right);\ p_{,}=\left(\dfrac{x'y''-x''y'}{y''-y'}\right);\ p_{,,}=\left(\dfrac{x''y'-x'y''}{x''-x'}\right) \\[2ex] q=\left(\dfrac{y''z'-y''z'}{z''-z'}\right);\ q_{,}=\left(\dfrac{y''z'-y'z''}{y''-y'}\right);\ q_{,,}=\left(\dfrac{x''z'-x'z''}{x''-x'}\right) \end{array}\right\}(1)$$

Oder, wenn man die Bezeichnungen der Projektionen der Dreiecke in den coordinirten Ebenen, wie sie in dem vorigen Art. gebraucht worden sind, beibehält:

$$\left.\begin{array}{l} p = -\frac{2.k_{,}}{z''-z'}\,;\; p_{,} = -\frac{2.k}{y''-y'}\,;\; p_{,,} = +\frac{2.k}{x''-x'}\,; \\ q = -\frac{2.k_{,,}}{z''-z'}\,;\; q_{,} = +\frac{2.k_{,,}}{y''-y'}\,;\; q_{,,} = +\frac{2.k}{x''-x'}\,; \end{array}\right\}(2)$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich von selbst nachstehende Relationen:

$$\frac{p}{p} = +\frac{k_{,}}{k_{,,}}\,;\; \frac{p_{,}}{q_{,}} = -\frac{k}{k_{,,}}\,;\; \frac{p_{,,}}{q_{,,}} = +\frac{k}{k_{,}}\,.\,.\,(3)$$

Sind $\vartheta\vartheta_{,}\vartheta_{,,}$ wieder die Neigungswinkel derjenigen Ebene, welche durch die gegebene Gerade und durch den Anfangspunkt gelegt wird, gegen die coordinirten Ebenen xy, xz, yz; so hat man:

$$k = K.\cos.\vartheta\,;\; k_{,} = K.\cos.\vartheta_{,}\,;\; k_{,,} = K.\cos.\vartheta_{,,}.$$

Anstatt der Gleichungen (3) wird man haben:

$$\frac{p}{q} = +\frac{\cos.\vartheta_{,}}{\cos.\vartheta_{,,}}\,;\; \frac{p_{,}}{q_{,}} = -\frac{\cos.\vartheta}{\cos.\vartheta_{,,}}\,;\; \frac{p_{,,}}{q_{,,}} = +\frac{\cos.\vartheta}{\cos.\vartheta_{,}}\;(4)$$

Mittelst der bekannten Gleichung:

$$\cos.^2\vartheta + \cos.^2\vartheta_{,} + \cos.^2\vartheta_{,,} = 1$$

und mit Hilfe der Gleichungen (4) findet man nun die Ausdrücke für die Cosinusse der Neigungswinkel $\vartheta\vartheta_{,}\vartheta_{,,}$ durch die Coordinaten pq etc. Diese werden nun seyn:

$$\left.\begin{array}{l} \cos.\vartheta = \frac{1}{\sqrt{\left\{1+\left(\frac{q_{,}}{p_{,}}\right)^2+\left(\frac{q_{,,}}{p_{,,}}\right)^2\right\}}}\,; \\ \cos.\vartheta_{,} = \frac{1}{\frac{p_{,,}}{q_{,,}}\sqrt{\left\{1+\left(\frac{q_{,}}{p_{,}}\right)^2+\left(\frac{q_{,,}}{p_{,,}}\right)^2\right\}}} = \frac{1}{\sqrt{\left\{1+\left(\frac{q}{p}\right)^2+\left(\frac{p_{,,}}{q_{,,}}\right)^2\right\}}} \\ \cos.\vartheta_{,,} = -\frac{1}{\frac{p_{,}}{q_{,}}\sqrt{\left\{1+\left(\frac{q_{,}}{p_{,}}\right)^2+\left(\frac{q_{,,}}{p_{,,}}\right)^2\right\}}} = \frac{1}{\sqrt{\left\{1+\left(\frac{p}{q}\right)^2+\left(\frac{p_{,}}{q_{,}}\right)^2\right\}}} \end{array}\right\}(5)$$

Will man anstatt der Coordinaten $pqp_{,}q_{,}p_{,,}q_{,,}$ die Coordinaten $fgf_{,}g_{,}f_{,,}g_{,,}$ Art. 90 einführen; so findet man

$$\left.\begin{aligned}\cos.\vartheta &= \frac{1}{\sqrt{\left\{1+\left(\frac{f_{\prime}}{f}\right)^2+\left(\frac{f_{\prime\prime}}{g}\right)^2\right\}}};\\ \cos.\vartheta_{\prime} &= \frac{-1}{\sqrt{\left\{1+\left(\frac{f}{f_{\prime}}\right)^2+\left(\frac{g_{\prime\prime}}{g_{\prime}}\right)^2\right\}}};\\ \cos.\vartheta_{\prime\prime} &= \frac{1}{\sqrt{\left\{1+\left(\frac{g}{f_{\prime\prime}}\right)^2+\left(\frac{g_{\prime}}{g_{\prime\prime}}\right)^2\right\}}};\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (6)$$

Setzt man in diese Ausdrücke für $f f_{\prime} f_{\prime\prime} g\, g_{\prime} g_{\prime\prime}$ ihre Werthe aus den Gleichungen (1) Art. 90; so wird man nach einigen einfachen Reduktionen nachstehende allgemeine Ausdrücke finden:

$$\left.\begin{aligned}\cos.\vartheta &= \frac{b}{\sqrt{\{b^2+b_{\prime}^2+(ab_{\prime}-a_{\prime}b)^2\}}};\\ \cos.\vartheta_{\prime} &= \frac{-b_{\prime}}{\sqrt{\{b^2+b_{\prime}^2+(ab_{\prime}-a_{\prime}b)^2\}}};\\ \cos.\vartheta_{\prime\prime} &= \frac{ab_{\prime}-a_{\prime}b}{\sqrt{\{b^2+b_{\prime}^2+(ab_{\prime}-a_{\prime}b)^2\}}};\end{aligned}\right\} \quad \ldots (7)$$

Der Nenner in diesen Ausdrücken ist genau die nemliche Grösse, welche im Zähler des Ausdruckes für L Art. 94 Gleichung (2) steht, und daselbst mit G bezeichnet worden ist. Man hat also, wenn man diese Abkürzung gebraucht:

$$\cos.\vartheta = \frac{b}{G};\quad \cos.\vartheta_{\prime} = \frac{-b_{\prime}}{G};\quad \cos.\vartheta_{\prime\prime} = \frac{ab_{\prime}-a_{\prime}b}{G}\ . \ (8)$$

Oder da:

$$G = L.\sqrt{1+a^2+a_{\prime}^2};$$

so werden die Formeln (8) ferner in nachstehende übergehen:

$$\left.\begin{aligned}&\cos.\vartheta = \frac{b}{L}.\frac{1}{\sqrt{1+a^2+a_{\prime}^2}};\quad \cos.\vartheta_{\prime} = \frac{-b_{\prime}}{L}.\frac{1}{\sqrt{1+a^2+a_{\prime}^2}}\\ &\cos.\vartheta_{\prime\prime} = \frac{b_{\prime}}{L}.\frac{a}{\sqrt{1+a^2+a_{\prime}^2}} - \frac{b}{L}.\frac{a_{\prime}}{\sqrt{1+a^2+a_{\prime}^2}}\end{aligned}\right\} \ (9)$$

Oder endlich, mit Rücksicht auf die Gleichung (1) Art. 89:

$$\left.\begin{aligned}\cos.\vartheta &= \frac{b}{L}.\cos.(1.x)\;;\\ \cos.\vartheta_{,} &= -\frac{b_{,}}{L}.\cos.(1.x)\;;\\ \cos.\vartheta_{,,} &= \frac{b_{,}.\cos.(1.y)-b.\cos.(1.z)}{L}\;;\end{aligned}\right\}\;.\;.\;.\;.\;(10)$$

102. Setzt man die für $a\,a_{,}\,b\,b_{,}$ gefundenen Werthe in die Gleichungen (2) (4) (6) Art. 96; so findet man:

$$\left.\begin{aligned}d_{,,} &= \frac{y'z''-y''z'}{\sqrt{\{(y''-y')^2+(z''-z')^2\}}};\\ d_{,} &= \frac{x''z'-x'z''}{\sqrt{\{(x''-x')^2+(z''-z')^2\}}};\\ d &= \frac{x''y'-x'y''}{\sqrt{\{(x''-x')^2+(y''-y')^2\}}};\end{aligned}\right\}\;.\;.\;.\;(1)$$

Nennt man die Projektionen des Abstandes $m'm''$ in den coordinirten Ebenen xy, xz, yz respektive $r\,r_{,}\,r_{,,}$; dann hat man aus den Gleichungen (1):

$$\left.\begin{aligned}d_{,,}.r_{,,} &= y'z''-y''z' = 2.k_{,,}\;;\\ d_{,}.r_{,} &= x''z'-x'z'' = 2.k_{,}\;;\\ d.r &= x''y'-x'y'' = 2.k\;;\end{aligned}\right\}\;.\;.\;.\;.\;.\;(2)$$

Diese Gleichungen enthalten einen sehr merkwürdigen Lehrsatz der Geometrie. Das halbe Rechteck aus dem kürzesten Abstand der Linie $m'm''$ von der Achse der x und der Projektion der Entfernung $m'm''$ in der Ebene yz ist der Projektion des Dreieckes $m'Am''$ in der Ebene yz gleich. Ebenso ist das halbe Rechteck aus der kürzesten Distanz der Geraden $m'm''$ von der Achse der y und der Projektion der Entfernung $m'm''$ in der Ebene xz der Projektion des Dreieckes $m'Am''$ in der Ebene xz gleich. Endlich ist das halbe Rechteck aus dem kürzesten Abstande der Geraden $m'm''$ von der Achse der z und der Projektion der Geraden $m'm''$ in der Ebene xy der Projektion des Dreieckes $m'Am''$ in der Ebene xy gleich.

Setzt man die Werthe von $a\,a_{,}\,b\,b_{,}$ in den Ausdruck für L Art. 94 Gleichung (2); so findet man:

$$L = \frac{\sqrt{\{(x''y'-x'y'')^2+(x''z'-x'z'')^2+(y'z''-y''z')^2\}}}{\sqrt{\{(x''-x')^2+(y''-y')^2+(z''-z')^2\}}}$$

ein Ausdruck, der, wenn man den Nenner $= D$ setzt, in folgenden übergeht:

$$L = \frac{2.\sqrt{(k^2+k_{,}^2+k_{,,}^2)}}{D},$$

wo D der Abstand $m'm''$ ist, oder, weil

$$K = \sqrt{(k^2+k_{,}^2+k_{,,}^2)};$$

$$L = \frac{2K}{D} \text{ und } K = \frac{1}{2}.L.D.$$

Alle diese Ausdrücke haben wir bereits im ersten Capitel schon entwickelt. Hier ist bloss die Methode gezeigt worden, wie man die einfachen Grundsätze der analytischen Geometrie zur Lösung dieser Fragen anwenden soll.

DRITTES CAPITEL.

Analytische Bestimmungsarten der Lagen einer Ebene.

Methoden, die Gleichung einer Ebene zu finden, deren Lage gegen ein System rechtwinklichter coordinirter Achsen bestimmt wird.

103. Nachdem wir in den vorhergehenden zwei Capiteln die Methoden entwickelt haben, um die Lage der Punkte im Raume überhaupt, und die Lagen einer unendlichen Menge von Punkten, die in einerlei Richtung liegen, analytisch zu bestimmen; so setzen wir in diesem gegenwärtigen diese Entwicklung der Methoden weiter fort, um auf ähnliche Art die Lagen einer unendlichen Menge von Punkten im Raume zu bestimmen, welche in einer und derselben Ebene liegen. Das einfachste Mittel, die Lage einer Geraden im Raume zu bestimmen, besteht darin, dass man aus der Bedingung: *sämmtliche Punkte des Raumes liegen in einer und derselben Richtung:* eine Relation zwischen den Coordinaten dieser Punkte ableite, wodurch jene Gerade charakterisirt werde; so zwar, dass die Werthe der Coordinaten aller Punkte jener Geraden dieser Relation ein Genüge leisten. Das einfachste Mittel, die Lage einer Ebene zu bestimmen, wird nun gleichfalls darin bestehen,

eine Relation zwischen den Coordinaten eines Punktes von der Beschaffenheit zu suchen, dass die Werthe der Coordinaten eines jeden Punktes dieser Ebene jener Relation entsprechen. Die Bestimmungen der Lagen der Punkte, Linien und Ebenen werden daher auf die Bestimmungen gewisser Gleichungen zurückgeführt. Die Form dieser Gleichungen entspricht stets dem Gesetze, nach welchem die Punkte in einer räumlichen Grösse angeordnet sind. Zu den die Form der Gleichungen bestimmenden Stücken gehören nur die veränderlichen Grössen d. i. die Coordinaten der verschiedenen Punkte der ausgedehnten Grösse (der Linie oder Fläche); die übrigen in diesen Gleichungen noch vorkommenden Grössen sind die, in Bezug auf die Coordinaten, beständigen Stücke, und diese beziehen sich auf die verschiedenen Lagen jener Systeme von Punkten (der Linien oder Flächen) gegen das coordinirte Achsensystem.

Wenn es sich nun um die Bestimmung der Gleichung einer Ebene, als desjenigen Mittels handelt, wodurch wir die Lage einer Ebene analytisch bestimmen; so will man darunter verstehen, dass man eine Relation zwischen den Coordinaten eines Punktes suche, welche die Eigenschaft hat, dass die Werthe der Coordinaten eines jeden Punktes derselben fixen Ebene dieser Relation ein Genüge leiste. Die Art und Weise der Verbindung der Coordinaten in dieser Relation d. i. ihre Form hängt von dem Gesetze ab, dass die Punkte des Raumes in einer Ebene liegen. Die beständigen Grössen welche in dieser Relation vorkommen, sind wieder diejenigen Stücke, von denen die Lage dieses Systems von Punkten d. i. der Ebene gegen das Achsensystem abhängt.

104. Es ist im ersten Capitel gelehrt worden, dass drei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a; \\ y_1 &= b; \\ z_1 &= c; \end{aligned}\right\}$$

die Lage eines Punktes im Raume bestimmen. Daselbst ist ferner bemerkt worden, dass die Gleichung

$$x_{,} = a;$$

an und für sich betrachtet, allen denjenigen Punkten zugehöre, welche von der coordinirten Ebene $y_{,}z_{,}$ den Abstand a haben. Sie ist also die Gleichung einer Ebene, welche zur Ebene $y_{,}z_{,}$ parallel ist, und von ihr den Abstand a hat.

Eben so gehört die Gleichung

$$y_{,} = b;$$

zu einer Ebene, welche zur coordinirten Ebene $x_{,}z_{,}$ parallel ist, und von ihr den Abstand b hat.

Endlich wird die Gleichung

$$z_{,} = c; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

für sich betrachtet, die Gleichung einer Ebene seyn, welche zur Ebene $x_{,}y_{,}$ parallel ist, und von ihr den Abstand c hat.

Zwei dieser Gleichungen zusammen betrachtet, gehören für den Durchschnitt der zwei Ebenen, welche zu denselben gehören; alle drei Gleichungen, zusammen betrachtet, gehören aber für den Durchschnitt jener drei Ebenen d. i. für einen Punkt.

Um die allgemeine Gleichung einer Ebene zu finden, wollen wir diese letzte Gleichung (1) insbesondere betrachten. Wir wollen uns itzt vorstellen, dass durch den Anfangspunkt der Coordinaten $x_{,}y_{,}z_{,}$ drei andere auf einander senkrechte Linien gezogen sind, welche wir für die Achsen der xyz annehmen, und gegen welches neue Achsensystem die Punkte jener Ebene, die zur Ebene $x_{,}y_{,}$ parallel ist, bezogen werden. Es seyen also xyz die neuen Coordinaten eines Punktes, dessen vorige Coordinaten $x_{,}y_{,}z_{,}$ sind. Man hat nun, nach den Formeln der Transformation der rechtwinklichten Coordinaten, welche wir im ersten Capitel gegeben haben,

$$z_{,} = \{ x.\cos.(z_{,}.x) + y.\cos.(z_{,}.y) + z.\cos.(z_{,}.z) \}$$

Diese Formel drückt nemlich den Abstand eines jeden Punktes im Raume von der Ebene $x_{,}y_{,}$ aus. Die Gleichung der Ebene, welche daher von der coordinirten Ebene den Ab-

stand c hat, wird demnach, in Bezug auf das System der Achsen xyz seyn.

$$c = x.\cos.(z_{,}.x) + y.\cos.(z_{,}.y) + z.\cos.(z_{,}.z).$$

Man kann hier bemerken, dass, weil $z_{,}$ auf dieser Ebene senkrecht steht (indem sie zur coordinirten Ebene $x_{,}y_{,}$ parallel ist), die Winkel $(z_{,}.x)$, $(z_{,}.y)$, $(z_{,}.z)$ nichts anders sind, als die Neigungen dieser Ebenen (der in Rede stehenden Ebene oder der Ebene $x_{,}y_{,}$) gegen die coordinirten Ebenen yz, xz, xy. Bezeichnet man die Ebene mit I; so sind diese Winkel respektive dieselben, als die man mit $(I.yz)$, $(I.xz)$, $(I.xy)$ bezeichnet; denn $z_{,}$ steht auf der Ebene I, und xyz stehen auf den Ebenen yz, xz, xy senkrecht.

Die Gleichung der Ebene I gegen das Achsensystem xyz ist daher

$$c = x.\cos.(I.yz) + y.\cos.(I.xz) + z.\cos.(I.xy); \quad . \quad (2)$$

wo c der Abstand des Anfangspunktes von der Ebene I ist.

Man sieht aus dieser Gleichung, auf welche Art nicht bloss die veränderlichen xyz darin mit einander, sondern auch die beständigen Grössen, welche die Lage der Ebene bestimmen, mit den veränderlichen verbunden sind.

Weil die Winkel $(I.yz)$, $(I.xz)$, $(I.xy)$, welche die Ebene I mit den coordinirten Ebenen yz, xz, xy macht, respektive die Ergänzungswinkel von den Winkeln $(I.x)$, $(I.y)$, $(I.z)$, (womit man die Winkel bezeichnet, welche die Ebene I mit den coordinirten Achsen xyz macht) zu einem Rechten sind; so ist die Gleichung der Ebene I auch noch:

$$c = x.\sin.(I.x) + y.\sin.(I.y) + z.\sin.(I.z) \quad . \quad . \quad (3)$$

Multiplizirt man die Gleichung (2) mit einer willkührlichen Grösse N; und setzt

$$N.\cos.(I.yz) = A;\ N.\cos.(I.xz) = B;\ N.\cos.(I.xy) = C; \quad . \ (\alpha)$$

und

$$-N.c = D; \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (\beta)$$

so geht die Gleichung (2) in folgende über:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (4)$$

und diese ist die allgemeine Form, worauf sich die Gleichung einer jeden Ebene zurückführen lässt. Wie man sieht,

so enthält diese Relation zwischen xyz nur die **ersten** Potenzen dieser Coordinaten. Die beständigen Grössen $ABCD$ in dieser Gleichung sind diejenigen, von welchen, oder vielmehr von deren gegenseitigem Verhältnisse **die Lage** der Ebene gegen das System der coordinirten Achsen xyz abhängt.

Da $\cos^2(I.yz)+\cos^2(I.xz)+\cos^2(I.xy) = 1$;

so folgt aus den Gleichungen (α):

$$N = \sqrt{(A^2+B^2+C^2)}.$$

Diese Gleichungen (α) (β) geben nun:

$$\left.\begin{aligned} \cos.(I.yz) &= \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}; \\ \cos.(I.xz) &= \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}; \\ \cos.(I.xy) &= \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}; \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (5)$$

$$c = \frac{-D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (6)$$

Sind nun die Grössen $ABCD$ gegeben, so sieht man hier die Formeln, welche durch sie die Neigungen der von ihnen bestimmten Ebene gegen die coordinirten Ebenen, und den Abstand des Anfangspunktes von dieser Ebene, ausdrücken. Ich habe sie hier desswegen angeführt, weil sie sich unmittelbar und gleichsam von selbst aus dem Verfahren ergeben, nach welchem die Gleichung der Ebene gefunden worden ist. In der Folge werden wir noch eine andere Methode, diese Ausdrücke zu finden, kennen lernen.

105. Die Gleichung einer Ebene kann man noch auf mannigfaltige Arten finden. So z. B. haben wir, im ersten Capitel Art. 48. Gl. (a) (b), eine Relation zwischen den Coordinaten xyz eines Punktes gefunden, welcher die Coordinaten aller Punkte einer Ebene Genüge leisten, welche durch die Geraden AQ und AR (nach dortiger Bezeichnung) gelegt wird, und welche Relation folglich die Gleichung dieser Ebene seyn wird.

Es ist nemlich daselbst gezeigt worden, dass

$$z = y.\,\mathrm{tg.}(YAR) + x.\,\mathrm{tg.}(QAX).$$

Setzt man tg. $(YAR) = b$; tg. $(QAX) = a$; so wird

$$z = ax + by;$$

die Gleichung einer Ebene seyn, welche durch die in den Ebenen xz und yz gezogene gerade Linien AQ und AR gelegt wird. Geht diese Ebene nicht durch den Punkt A; so kann man sich doch immer durch A eine Ebene gelegt denken, welche zur vorigen parallel ist, und für diese gilt die Gleichung $z = ax + b$. Nun ist aber jedes z für jene Ebene um einen beständigen Theil c grösser, als das z für diese (denn diese Ebenen sind einander parallel angenommen); es wird daher

$$z = ax + by + c$$

die Gleichung für jede Ebene seyn.

Um diese Gleichung auf die vorhin erhaltene Form der Gleichungen einer Ebene zurückzuführen, multiplizirt man sie mit irgend einer Grösse C, und setze hierauf:

$$-a.C = A;\ -b.C = B;\ -c.C = D;$$

dadurch wird diese Gleichung in nachstehende verwandelt:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

106. Die Erklärung der Art und Weise, auf welche eine Gerade im Raume eine Ebene beschreibt, führt auf eine sehr elegante und einfache Methode, den analytischen Ausdruck der durch die Bewegung der Geraden entstandenen Ebene daraus herleiten.

Unter den verschiedenen Arten, auf welche man sich eine Ebene entstanden denken kann, ist die am einfachsten, gemäss welcher man die Ebene durch die Bewegung einer unbestimmt verlängerten Geraden im Raume auf einer andern von der Beschaffenheit erzeugt werden lässt, dass sich die bewegliche Gerade, die immer durch eine feste Gerade geht, sich selbst immer parallel bleibe. So z. B. wenn BCD (Fig. 44.) eine Ebene ist, welche die Ebenen xy, xz, yz in den Linien BC, BD, CD, und die Achsen in den Punkten BCD schneidet, so kann man sich diese so entstanden denken, als ob eine bewegliche

Gerade CD sich auf einer andern fixen Geraden BD beständig fortbewegt; so zwar, dass sie sich stets parallel bleibt. Man kann sich also eine Folge von Geraden vorstellen, als $C'D'$, $C''D''$, . . . welche der CD parallel sind.

Diese Folge der geraden Linien gehört nun zu derjenigen Ebene, oder ist in derjenigen Ebene enthalten, welche wir eben betrachten wollen. Die Methode, der ich mich hier bediene, um die Gleichung einer Ebene zu finden, ist hier um so bemerkenswerther, weil die hier anzuwendenden Schlussarten gerade solche sind, welche als der analytischen Geometrie eigenthümliche angesehen werden können.

Weil die Gerade BD sich ganz in der Ebene xz befindet; so haben ihre Gleichungen offenbar die Form:

$$\left.\begin{array}{l} y = 0; \\ z = ax+b; \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

Aus gleichem Grunde sind die Gleichungen der Durchschnittslinie CD:

$$\left.\begin{array}{l} x = 0; \\ z = a_{,}y+b; \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\beta)$$

wo die Grösse b in beiden Gleichungen (α) (β) dieselbe seyn muss, nemlich $b = AD$.

Betrachten wir itzt DC in was immer für einer andern Lage, z.B. in der Lage $D'C'$. Man hat nun zu den Gleichungen dieser Geraden $C'D'$, welche zur CD parallel ist, offenbar:

$$\left.\begin{array}{l} x = M; \\ z = a_{,}y+N; \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\gamma)$$

wo MN zwar für alle Punkte der Linie $C'D'$ beständig, aber von einer Lage dieser beweglichen Geraden zur andern veränderlich sind.

Es bleibt itzt nur noch übrig, die Bedingung, dass die fixe und die bewegliche Gerade stets sich durchschneiden, analytisch auszudrücken.

Dieses geschieht alsogleich durch die Annahme, dass die Gleichungen (α) (γ) als zu gleicher Zeit statt findend, (coëxistirend) zu betrachten sind; dadurch wird eine Rela-

tion zwischen den unbestimmten Grössen MN und den bekannten $a a_{,} b$ zu Stande gebracht.

Diesem gemäss wird man zur verlangten Relation erhalten:

$$N = aM + b \quad \ldots\ldots \quad (\delta)$$

so dass für jede Lage der beweglichen Geraden der Gleichungen (γ) (δ) zugleich Genüge geschieht.

Wenn man diese Werthe von N in der vorigen Gleichung substituirt; so wird man die Gleichungen dieser beweglichen Geraden in irgend einer ihrer Lagen erhalten; sie sind also:

$$\left.\begin{array}{l} x = M; \\ z = a_{,}y + (aM + b); \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Die Lage dieser Geraden hängt von dem Werthe ab, den man der willkührlichen Grösse M beilegt. Diesen beiden Gleichungen leisten also die Coordinaten aller Punkte Genüge, die sich auf der beweglichen Geraden in jeder ihrer Lagen, d. h. auf der von ihr beschriebenen Ebene befinden. Eliminirt man also die Grösse M; so erhält man die Relation:

$$z = a_{,} \cdot y + ax + b \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

welche die Stelle der zwei vorigen Gleichungen vertreten kann. Diese Gleichung ist also die gesuchte Gleichung der beschriebenen Ebene.

Eine durch den Anfangspunkt der Coordinaten gelegte Ebene, welche zu derjenigen parallel ist, deren Gleichung ist:

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

wollen wir die correlative Ebene derselben Ebene nennen. Sie hat zur Gleichung:

$$Ax + By + Cz = 0$$

oder überhaupt:

$$x \cdot \cos.(I.yz) + y \cdot \cos.(I.xz) + z \cdot \cos.(I.xy) = 0.$$

Man kann diese Ebene zu der Absicht einführen, um alle Winkel, welche aus den Beziehungen einer Ebene gegen das Achsensystem entspringen, auf den Anfang der Coordinaten zu reduziren.

Von den Knotenlinien einer Ebene in den coordinirten Ebenen. Winkel, welche sie mit den coordinirten Achsen und unter einander machen. Entfernungen der Punkte, in welchen die Achsen von der Ebene geschnitten werden, vom Anfangspunkte der Coordinaten. Abstände des Anfangspunktes von den drei Knotenlinien.

107. Wir sind nun durch die bisherigen Betrachtungen zu der allgemeinen Ansicht gelangt, dass jede Relation zwischen den drei Coordinaten xyz von der Form:

$$Ax+By+Cz+D=0$$

zu einer bestimmten Ebene im Raume gehöre, wenn $ABCD$ bestimmte Grössen sind.

Es wird daher $x=0$ nicht bloss die Gleichung irgend eines Punktes der Achse y oder z seyn, sondern die Gleichung der Ebene yz; und $x=a$ ist die Gleichung einer Ebene, welche zur Ebene yz parallel ist, und den Abstand a von derselben hat.

Eben so wird $y=0$ die Gleichung der Ebene xz seyn, so wie $y=b$ die Gleichung einer Ebene ist, welche zur Ebene xz parallel ist, und von ihr um b absteht.

Ferner ist $z=0$ die Gleichung der Ebene xy, und $z=c$ die Gleichung einer zu xy parallelen Ebene, welche um c von ihr absteht.

Weiter ist $ax+by+c=0$, nicht bloss die Gleichung einer Geraden in der Ebene xy; sondern überhaupt die Gleichung einer Ebene, welche durch diese Gerade geht, und auf der Ebene xy senkrecht steht.

Eben so ist $ax+bz+c=0$ nicht bloss die Gleichung einer Geraden in der Ebene xz; sondern auch noch die Gleichung einer Ebene, welche durch diese Gerade senkrecht auf die Ebene xz gelegt wird.

Auf gleiche Art ist $ay+bz+c=0$ die Gleichung einer Geraden in der Ebene yz; aber auch, überhaupt betrachtet, die Gleichung einer Ebene, so durch diese Gerade geht, und auf der Ebene yz senkrecht steht.

Alle diese besondern Fälle sind in der allgemeinen Glei-

chung der Ebene enthalten, die man erhält, wenn man darin den einen oder andern Coëffizienten gleich Null setzt.

Jetzt wird es nun einleuchtend seyn, wie ein System zweier solcher Gleichungen einer Geraden im Raume angehörig betrachtet wird. Wenn man nemlich zwei solche Gleichungen als coëxistirend betrachtet, so will man damit alle jene Punkte des Raumes fixiren, welche in den beiden Ebenen zugleich liegen; diese Punkte können aber keine andern seyn, als die in der Durchschnittslinie der zwei Ebenen liegen.

Die Durchschnittslinien einer Ebene mit den coordinirten Ebenen nennt man insbesondere die Knotenlinien dieser Ebene. Es ist nun leicht, aus den hier entwickelten Grundsätzen ihre Gleichungen in den coordinirten Ebenen zu finden, wenn die Gleichung der Ebene gegeben ist.

108. Es sey wieder

$$Ax+By+Cz+D=0 \quad \ldots\ldots \quad (I)$$

die allgemeine Gleichung einer Ebene. Um ihre Knotenlinie in der Ebene xy zu finden, verbinde man die Gleichungen dieser beiden Ebenen. Die zwei Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{r} Ax+By+D=0 \\ z=0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (\alpha)$$

gehören also für die Durchschnittslinie der Ebene I mit der coordinirten Ebene xy. Die Gleichung, welche die Lage der Knotenlinie in dieser Ebene bestimmt, ist demnach

$$y=-\frac{A}{B}\cdot x-\frac{D}{B}; \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Um die Knotenlinie der Ebene I in der Ebene xz zu finden, verbinde man die Gleichungen beider Ebenen. Die zwei Gleichungen

$$\left.\begin{array}{r} Ax+Cz+D=0 \\ y=0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (\beta)$$

zusammengenommen, gehören also für die Durchschnittslinie der Ebene I mit der coordinirten Ebene xz. Die Gleichung, welche die Lage der Knotenlinie in dieser Ebene bestimmt, wird daher seyn:

$$z = -\frac{A}{C} \cdot x - \frac{D}{C} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Um endlich die Gleichung der Knotenlinie der Ebene I in der Ebene yz zu finden, verbinde man die Gleichungen dieser Ebenen d. i.

$$\left.\begin{array}{r} By + Cz + D = 0\,; \\ x = 0\,; \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (\gamma)$$

und die Gleichung der Knotenlinie der Ebene I in der Ebene yz wird seyn:

$$z = -\frac{B}{C} \cdot y - \frac{D}{C} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Wir werden in der Folge die Knotenlinien der Ebene I in den Ebenen yz, xz, xy respektive mit $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ bezeichnen, so dass (1) die Gleichung der Knotenlinie $\bar{z}$: ferner (2) die Gleichung der Linie $\bar{y}$; und (3) die Gleichung der Linie $\bar{x}$ ist.

Die Winkel, welche eine Knotenlinie mit einer Achse macht, werden wir auf eine ähnliche Art, wie sie im ersten und zweiten Capitel angenommen wurde, bezeichnen. So bezeichnet z. B. $(\bar{x}.\,y)$ den Winkel, den die Knotenlinie in der Ebene yz mit der Achse der y macht; $(\bar{x}.\,z)$ bezeichnet den Winkel, welchen die Knotenlinie in der Ebene yz mit der Achse der z macht; $(\bar{y}.\,x)$ bezeichnet den Winkel, welchen die Knotenlinie in der Ebene xz mit der Achse der x macht, u. s. w. Aus diesen Erklärungen ist es ferner leicht einzusehen, dass die Winkel $(\bar{x}.\,x)$, $(\bar{y}.\,y)$, $(\bar{z}.\,z)$ rechte Winkel sind.

Alle Winkel, welche aus den Beziehungen einer geraden Linie oder einer Ebene gegen das System der coordinirten Achsen entspringen, werden hier durch die Sinusse, Cosinusse oder Tangenten gegeben. Weil nun einem jedem Sinusse zwei Winkel zugehören, deren einer der Ergänzungswinkel des andern zu 180° ist; so kann hieraus in der Bestimmung der Lage einer geraden Linie oder einer Ebene gegen das System der coordinirten Achsen eine Ungewissheit entstehen.

Ehe ich mich nun in die weitern Untersuchungen einlasse, finde ich für nöthig, diese Zweideutigkeit gänzlich zu besei-

tigen, indem ich hier die Art und Weise festsetzen will, auf welche wir die Lagen der geraden Linien und Ebenen gegen die Achsen beziehen wollen.

109. Schon im ersten Capitel ist es gezeigt worden, dass man zur Bestimmung der Lage eines Punktes im Raume nicht bloss die absoluten Abstände dieses Punktes von drei gegenseitig auf einander senkrechten Ebenen kenne, sondern auch wisse, auf welcher Seite von jeder dieser drei Ebenen der Punkt zu liegen habe. Um dieses letzte Erforderniss analytisch auszudrücken, sind wir übereingekommen, die Abstände, die sich auf der einen Seite einer dieser Ebenen befinden, als positive Abstände anzusehen, und die auf der entgegengesetzten Seite als negative zu betrachten, und vor die absolute Grösse des Abstandes das Zeichen $+$ oder $-$ zu setzen, je nachdem der Punkt auf der Seite der positiven oder negativen Abstände sich befindet. Oder auch, (was auf dasselbe hinauskömmt), wenn man anstatt der drei Ebenen ihre gegenseitigen Durchschnittslinien betrachtet, und die Lage des Punktes gegen dieses System dreier rechtwinklicht coordinirter Achsen bezieht; so wird dieselbe nicht bloss durch die absoluten Werthe der Coordinaten bestimmt; sondern man muss auch wissen, in welcher Richtung auf den coordinirten Achsen die Coordinaten zu nehmen sind. Um diess analytisch ausdrücken zu können, sind wir übereingekommen, alle Längen, welche auf einer geraden Linie, von einem bestimmten Punkte an gerechnet, nach einerlei Gegend hin, genommen werden, als positiv, und diejenigen, welche von jenem fixen Punkte nach der entgegengesetzten Richtung auf dieser geraden Linie abgeschnitten werden, als negativ zu betrachten. Wenn man sich also durch einen Punkt A des Raumes drei aufeinander senkrecht stehende Achsen gelegt denkt; so sondert dieser Punkt A auf einer jeden der drei Achsen die positiven Coordinaten von den negativen. Wir wollen, wie gewöhnlich, diese drei Achsen die der x, der y, und der z nennen. Von dem Punkte A gehen eigentlich sechs Achsen aus, die der $+x$, $-x$; der $+y$, und

$-y$; der $+z$ und $-z$; davon die gleichnamigen, in einerlei gerader Linie liegen. Es bleibt übrigens willkührlich, welche von den sechs Achsen als die positiven anzunehmen sind. Denkt man sich die Achsen der $+z$, $-z$ als eine vertikale Linie, und folglich die Ebene, worin die andern Achsen liegen, als eine horizontale Ebene: denkt man sich ferner die Achse der $+y$, $-y$ in der Richtung der Mittagslinie genommen; so soll die Achse über der Horizontal-Ebene, (welche durch den Zenith-Punkt geht), die der positiven Coordinaten oder die Achse $+z$ seyn; und die unter der Horizontal-Ebene, (welche durch den Nadir-Punkt geht), die der negativen Coordinaten oder die Achse $-z$ seyn. Ferner werden wir denjenigen Theil der Achse, der nach dem Südpunkt gerichtet ist, als die Achse der positiven Coordinaten, oder zur Achse $+y$; und den andern Theil derselben, welcher nach dem Nordpunkt gerichtet ist, als die Achse der negativen Coordinaten, oder zur Achse $-y$ annehmen. Endlich werden wir die Achse, welche durch den Westpunkt geht, zur Achse der positiven Coordinaten d. i. zur Achse $+x$, und folglich jene, welche durch den Ostpunkt geht, zur Achse der negativen Coordinaten d. i. zur Achse $-x$ annehmen. Um mit der gehörigen Deutlichkeit von den Lagen der geraden Linien gegen diese Achsen sprechen zu können, werde ich die positiven Achsen der xyz mit x^+, y^+, z^+ bezeichnen; hingegen die negativen Achsen der xyz mit x^-, y^-, z^-.

Wenn wir itzt eine durch den Punkt A gehende, und in der Ebene xy liegende gerade Linie betrachten, welche wir die Linie 1 nennen wollen, so wird diese entweder durch die Quadranten (x^+y^+) und (x^-y^-) oder durch die Quadranten

(x^-y^+) und (x^+y^-)

gehen. In diesem Falle ist ihre Gleichung:

$$y = -a.x; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (I)$$

in jenem aber ist sie:

$$y = +a.x \quad \ldots\ldots\ldots \quad (II)$$

Aus dem Vorzeichen des Coëffizienten a, welcher die trigonometrische Tangente des Winkels ist, den die Gerade mit der Achse der x macht, wird man nun schliessen können, ob dieser Winkel spitzig oder stumpf ist, und in welche Quadranten die Gerade falle.

Wir wollen den Theil der Linie, der im ersten oder andern Falle in den Quadranten (x^+, y^+) oder (x^-, y^+) liegt, mit 1^+, und den entgegengesetzten Theil dieser Geraden mit 1^- bezeichnen.

Wir wollen nun hier überhaupt festsetzen, dass, wenn man sagt: *Winkel, den die Gerade* 1 *mit der Achse der x macht*, kein anderer Winkel gemeint werde, als dessen Schenkel die Linien 1^+ und x^+ sind.

Es ist also im ersten Falle:

$$\left.\begin{array}{l} \text{tg.}(1^+x^+) = -a\,; \\ \sin.(1^+x^+) = \dfrac{-a}{\sqrt{1+a^2}}\,;\ \cos.(1^+x^+) = \dfrac{+1}{\sqrt{1+a^2}}\,; \end{array}\right\} \text{Wenn } y = -ax$$

Und im zweiten Falle:

$$\left.\begin{array}{l} \text{tg.}(1^+x^+) = +a\,; \\ \sin.(1^+x^+) = \dfrac{+a}{\sqrt{1+a^2}}\,;\ \cos.(1^+x^+) = \dfrac{+1}{\sqrt{1+a^2}}\,; \end{array}\right\} \text{Wenn } y = +ax$$

Wenn man ferner sagt: *Winkel, den die Gerade* 1 *mit der Achse der y macht*; so will man darunter den Winkel verstanden wissen, dessen Schenkel die Linien 1^+ und y^+ sind.

Dann ist im ersten Falle:

$$\left.\begin{array}{l} \text{tg.}(1^+y^+) = +\dfrac{1}{a}\,; \\ \sin.(1^+y^+) = \dfrac{-1}{\sqrt{1+a^2}}\,;\ \cos.(1^+y^+) = \dfrac{-a}{\sqrt{1+a^2}}\,; \end{array}\right\} \text{Wenn } y = -ax$$

und im andern Falle:

$$\left.\begin{array}{l} \text{tg.}(1^+y^+) = +\dfrac{1}{a}\,; \\ \sin.(1^+y^+) = \dfrac{+1}{\sqrt{1+a^2}}\,;\ \cos.(1^+y^+) = \dfrac{+a}{\sqrt{1+a^2}}\,; \end{array}\right\} \text{Wenn } y = +ax$$

In beiden Fällen hat man nun:

$$(1^{+} x^{-}) = \{180^{0} - (1^{+} x^{+})\}; \quad (1^{+} y^{-}) = \{180^{0} - (1^{+} y^{+})\}:$$
$$(1^{-} x^{+}) = \{180^{0} - (1^{+} x^{+})\}; \quad (1^{-} y^{+}) = \{180^{0} - (1^{+} y^{+})\};$$
$$(1^{-} x^{-}) = (1^{+} x^{+}); \quad (1^{-} y^{-}) = (1^{+} y^{+}).$$

Diese Grundsätze sind nun hinreichend, aus dem Vorzeichen der Formel, durch welche der Sinuss, Cosinuss oder die Tangente eines Winkels ausgedrückt wird, zu beurtheilen, gegen welche der Achsen die Linie 1^{+} oder 1^{-} bezogen wird.

Ist z. B. (I) die Gleichung der Geraden $(1^{+} 1^{-})$; und es wird unentschieden gelassen, welcher Winkel mit dem Ausdrucke $(1.x)$ gemeint sey; aber man giebt:

$$\text{tg.}(1.x) = +a;$$

so ist:
$$-\text{tg.}(1.x) = -a = \text{tg.}(1^{+} x^{+}) \quad \text{oder}$$
$$\text{tg.}(1.x) = \text{tg.}\{180^{0} - (1^{+} x^{+})\}$$

Man erkennt also hieraus, dass $(1.x)$ der Ergänzungswinkel des Winkels $(1^{+} x^{+})$ zu 180^{0} sey, oder dass $(1.x)$ der Winkel $(1^{+} x^{-})$ sey.

Ist (I) die gegebene Gleichung, und man gibt

$$\text{tg.}(1.y) = -\frac{1}{a};$$

so ist $(1.y) = (1^{+} y^{-}) = (1^{-} y^{+})$.

Wenn endlich für dieselbe Gerade (I) gegeben wird:

$$\sin.(1.y) = \frac{+1}{\sqrt{1+a^{2}}};$$

so findet sich $(1.y) = -\sin.(1^{+} y^{+})$; und hieraus

$$(1.y) = 360^{0} - (1^{+} y^{+}),$$

d. i. $(1.y)$ ist der stumpfe Winkel $(1^{+} y^{+})$.

Zur leichtern Auffindung dieser Winkel setze ich nun folgende Formeln her:

$$\sin.(180^{0} - i) = +\sin.i; \quad \sin.(i - 180) = -\sin.i;$$
$$\sin.(180^{0} + i) = -\sin.i; \quad \sin.(360^{0} - i) = -\sin.i;$$
$$\cos.(180^{0} - i) = -\cos.i; \quad \cos.(180^{0} + i) = -\cos.i;$$
$$\cos.(i - 180^{0}) = -\cos.i; \quad \cos.(360^{0} - i) = +\cos.i;$$
$$\text{tg.}(180 - i) = -\text{tg.}i; \quad \text{tg.}(i - 180) = +\text{tg.}i;$$
$$\text{tg.}(180 + i) = +\text{tg.}i; \quad \text{tg.}(360 - i) = -\text{tg.}i;$$

Itzt wird sich auch leicht beurtheilen lassen, in welchen der acht körperlichen Winkel, welche die coordinirten Ebenen mit einander machen, eine Gerade liegen werde. Dieses lässt sich leicht aus den Gleichungen der Projektionen dieser Geraden in den coordinirten Ebenen erkennen.

Es sind in dieser Hinsicht vier Fälle möglich, als:

I.	II.	III.	IV.
$y = +ax$,	$y = -ax$,	$y = +ax$,	$y = -ax$,
$z = +a_{\prime}x$,	$z = +a_{\prime}x$,	$z = -a_{\prime}x$,	$z = -a_{\prime}x$,

welchen Fällen vier verschiedene Lagen der Geraden im Raume entsprechen:

Im 1. Falle liegt sie in den Winkeln: $(x^+y^+z^+)$ und $(x^-y^-z^-)$;
im 2. : $(x^+y^-z^+)$ und $(x^-y^+z^-)$;
im 3. : $(x^-y^-z^+)$ und $(x^+y^+z^-)$;
im 4. : $(x^-y^+z^+)$ und $(x^+y^-z^-)$;

Derjenige Theil der Geraden im Raume, der auf der Seite der z^+ fällt, soll mit 1^+ und der andere mit 1^- bezeichnet werden. Wenn nun von Winkeln die Rede ist, welche eine Gerade im Raume mit den Achsen der $x\,y\,z$ macht, so versteht man darunter die Winkel, welche 1^+ und die Achsen x^+, y^+, z^+, zu Schenkeln haben, d. i. die Winkel (1^+x^+), (1^+y^+), (1^+z^+).

Nach eben diesen Grundsätzen wird man nun sehr leicht auch auf die Lage einer Ebene gegen das System der coordinirten Achsen schliessen, und diess aus den Lagen der Knotenlinien.

So z. B. werden die Knotenlinien der Ebene, deren Gleichung ist:

$$Ax + By + Cz = 0$$

in folgende Quadranten fallen.

Die Knotenlinie in der Ebene xy in die Quadr. (x^-y^+), (x^+y^-);
. xz (x^-z^+), (x^+z^-);
. yz (y^-z^+), (y^+z^-).

110. Wir wollen nun nach diesen Erörterungen die Ausdrücke für die Sinusse, Cosinusse und Tangenten der Winkel

welche die Knotenlinien mit den coordinirten Achsen machen, aus den Formeln entwickeln, welche oben Art. 79. Gl. (a) gegeben worden sind, und auf die im vorigen Art. erwähnten Umstände Rücksicht nehmen. Man findet also:

$$\left.\begin{array}{l} \text{tg.}(\bar{z}.x) = -\frac{A}{B};\ \text{tg.}(\bar{z}.y) = +\frac{B}{A};\\ \text{tg.}(\bar{y}.x) = -\frac{A}{C};\ \text{tg.}(\bar{y}.z) = +\frac{C}{A};\\ \text{tg.}(\bar{x}.y) = -\frac{B}{C};\ \text{tg.}(\bar{x}.z) = +\frac{C}{B}; \end{array}\right\} \ldots (1)$$

Ferner:

$$\left.\begin{array}{l} \cos.(\bar{z}.x) = \frac{+B}{\sqrt{A^2+B^2}};\ \cos.(\bar{z}.y) = \frac{-A}{\sqrt{A^2+B^2}};\\ \cos.(\bar{y}.x) = \frac{+C}{\sqrt{A^2+C^2}};\ \cos.(\bar{y}.z) = \frac{-A}{\sqrt{A^2+C^2}};\\ \cos.(\bar{x}.y) = \frac{+C}{\sqrt{B^2+C^2}};\ \cos.(\bar{x}.z) = \frac{-B}{\sqrt{B^2+C^2}}; \end{array}\right\} (2)$$

$$\left.\begin{array}{l} \sin.(\bar{z}.x) = \frac{-A}{\sqrt{A^2+B^2}};\ \sin.(\bar{z}.y) = \frac{+B}{\sqrt{A^2+B^2}};\\ \sin.(\bar{y}.x) = \frac{-A}{\sqrt{A^2+C^2}};\ \sin.(\bar{y}.z) = \frac{+C}{\sqrt{A^2+C^2}};\\ \sin.(\bar{x}.y) = \frac{-B}{\sqrt{B^2+C^2}};\ \sin.(\bar{x}.z) = \frac{+C}{\sqrt{B^2+C^2}}; \end{array}\right\} (3)$$

111. Die Knotenlinien durchschneiden die coordinirten Achsen in Punkten, welche mit denen einerlei sind, in welchen sie von der Ebene geschnitten werden. Nennt man ihre Entfernungen auf den Achsen $x y z$ vom Anfangspunkte respektive $f f_{,} f_{,,}$; alsdann bekömmt man, wenn man in der Gleichung der Ebene immer zwei Coordinaten zugleich verschwinden lässt, die Ausdrücke:

$$\left.\begin{array}{l} f = -\frac{D}{A};\\ f_{,} = -\frac{D}{B};\\ f_{,,} = -\frac{D}{C}; \end{array}\right\} \ldots\ldots (1)$$

Da man aus diesen Gleichungen erhält:

$$A = -\frac{D}{f};\ B = -\frac{D}{f_{,}};\ C = -\frac{D}{f_{,,}};$$

so wird die Gleichung der Ebene:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

wenn man in sie für ABC diese Werthe bringt, werden

$$\frac{x}{f} + \frac{y}{f_{,}} + \frac{z}{f_{,,}} = 1 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

oder

$$f_{,}.f_{,,}.x + f.f_{,,}.y + f.f_{,}.z = f.f_{,}.f_{,,}; \quad \ldots \quad (3)$$

Diese ist eine merkwürdige Gleichung, in welcher bloss die Grössen $f\,f_{,}f_{,,}$ vorkommen, wo f die Entfernung des Punktes, in welchem die Ebene I die Achse der x schneidet, vom Anfangspunkte der Coordinaten ist, u. s. w. Diese ist also die Gleichung derjenigen Ebene, welche durch drei auf den coordinirten Achsen gegebene Punkte gelegt wird.

Nennt man diese Punkte auf den Achsen, wie ihre Entfernungen vom Anfangspunkte, gleichfalls $f\,f_{,}f_{,,}$, und bezeichnet die Entfernungen je zwei dieser Punkte: $f_{,}f_{,,}$; $f\,f_{,,}$; $f\,f_{,}$ respektive mit $h\,h_{,}h_{,,}$; so erhält man:

$$\left.\begin{aligned}
h &= \sqrt{f_{,}^2 + f_{,,}^2} = -D.\sqrt{\left\{\frac{1}{B^2} + \frac{1}{C^2}\right\}} = \frac{-D.\sqrt{B^2 + C^2}}{B.C};\\
h_{,} &= \sqrt{f^2 + f_{,,}^2} = -D.\sqrt{\left\{\frac{1}{A^2} + \frac{1}{C^2}\right\}} = \frac{-D.\sqrt{A^2 + C^2}}{A.C};\\
h_{,,} &= \sqrt{f^2 + f_{,}^2} = -D.\sqrt{\left\{\frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2}\right\}} = \frac{-D.\sqrt{A^2 + B^2}}{A.B};
\end{aligned}\right\} (4)$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks $f\,f_{,}f_{,,}$ aus seinen drei Seiten $h\,h_{,}h_{,,}$ ergiebt sich nun aus nachstehendem Ausdrucke:

$$F = \tfrac{1}{4}.\sqrt{\{2.h^2.h_{,}^2 + 2.h^2.h^2_{,,} + 2.h_{,}^2.h^2_{,,} - h^4 - h_{,}^4 - h^4_{,,}\}},$$

oder nachdem man für $h\,h_{,}h_{,,}$ ihre Werthe aus (4) in diesen Ausdruck gebracht, und ihn gehörig reduzirt hat:

$$F = \frac{D^2.\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{2.A.B.C} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{und hieraus noch} & F = \tfrac{1}{2}.f.f_{,}.f_{,,}\sqrt{\dfrac{1}{f^2}+\dfrac{1}{f_{,}^2}+\dfrac{1}{f_{,,}^2}}\,; \\ \text{oder} & F = \tfrac{1}{2}.\sqrt{f_{,}^2 f_{,,}^2 + f^2 f_{,,}^2 + f^2 f_{,}^2}\,; \end{array}\right\} \quad . \quad , (6)$$

Bezeichnet man die drei Höhen des Dreiecks $f f_{,} f_{,,}$ respektive mit $g\, g_{,} g_{,,}$; nemlich ist g das Perpendikel vom Punkte f auf die Seite $f_{,} f_{,,}$; u. s. w. Dann ist weiter:

$$\left.\begin{array}{l} g = \dfrac{2.F}{h} = \dfrac{-D.\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{A.\sqrt{B^2+C^2}} \\ g_{,} = \dfrac{2.F}{h_{,}} = \dfrac{-D.\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{A.\sqrt{A^2+C^2}} \\ g_{,,} = \dfrac{2.F}{h_{,,}} = \dfrac{-D.\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{C.\sqrt{A^2+B^2}} \end{array}\right\} \quad . \quad . (7)$$

112. Da die Winkel in dem Dreiecke $f f_{,} f_{,,}$, welches die drei Seiten oder Knotenlinien $h\, h_{,} h_{,,}$ bilden, zugleich die Winkel sind, welche die Knotenlinien mit einander machen; so können wir nun hieraus diese Winkel finden.

Sie werden nun wieder auf eine analoge Art durch $(\bar{x}.\bar{y})$, $(\bar{x}.\bar{z})$, $(\bar{y}.\bar{z})$ bezeichnet. Im Dreiecke $f f_{,} f_{,,}$ hat man nun:

$$\left.\begin{array}{l} h^2 = h_{,}^2 + h^2_{,,} - 2.h_{,}.h_{,,}.\cos.(\bar{y}.\bar{z})\,; \\ h_{,}^2 = h^2 + h^2_{,,} - 2.h.h_{,,}.\cos.(\bar{x}.\bar{z})\,; \\ h_{,,}^2 = h^2 + h_{,}^2 - 2.h.h_{,}.\cos.(\bar{x}.\bar{y})\,; \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (1)$$

Aus diesen Gleichungen erhält man die Cosinusse dieser drei Winkel durch die Seiten $h\, h_{,} h_{,,}$; wenn man darin für $h\, h_{,} h_{,,}$ die Werthe aus den Gleichungen (4) des vorigen Art. substituirt; so erhält man sie durch ABC ausgedrückt. Die gehörige Entwicklung dieser Ausdrücke giebt:

$$\left.\begin{array}{l} \cos.(\bar{y}.\bar{z}) = \dfrac{f^2}{h_{,}.h_{,,}} = \dfrac{B.C}{\sqrt{(A^2+B^2)(A^2+C^2)}}\,; \\ \cos.(\bar{x}.\bar{z}) = \dfrac{f_{,}^2}{h.h_{,,}} = \dfrac{A.C}{\sqrt{(B^2+A^2)(B^2+C^2)}}\,; \\ \cos.(\bar{x}.\bar{y}) = \dfrac{f_{,,}^2}{h.h_{,}} = \dfrac{A.B}{\sqrt{(C^2+A^2)(C^2+B^2)}}\,; \end{array}\right\} (2)$$

Aus diesen Gleichungen findet man zunächst die Sinusse dieser drei Winkel, nemlich:

$$\left.\begin{aligned}\sin.(\bar{y}.\bar{z}) &= A.\frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{\sqrt{(A^2+B^2)(A^2+C^2)}}\,;\\ \sin.(\bar{x}.\bar{z}) &= B.\frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{\sqrt{(B^2+A^2)\,(B^2+C^2)}}\,;\\ \sin.(\bar{x}.\bar{y}) &= C.\frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{\sqrt{(C^2+A^2)\,(C^2+B^2)}}\,;\end{aligned}\right\}\ldots (3)$$

Diese Ausdrücke lassen sich noch auf eine andere Art erhalten, indem man betrachtet, dass

$$\left.\begin{aligned}F &= \tfrac{1}{2}.h_{,}.h_{,,}.\sin.(\bar{y}.\bar{z})\;;\\ F &= \tfrac{1}{2}.h.\,h_{,,}.\sin.(\bar{x}.\bar{z})\;;\\ F &= \tfrac{1}{2}.h.\,h_{,}.\sin.(\bar{x}.\bar{y})\;;\end{aligned}\right\}$$

Bringt man in diese Gleichungen die in dem vorigen Art. für $Fhh_{,}h_{,,}$ gefundenen Ausdrücke; so geben diese Gleichungen dieselben Formeln (3).

Verbindet man die Gleichungen (2) und (3); so ergeben sich die Ausdrücke für die Tangenten dieser Winkel. Es ist:

$$\left.\begin{aligned}\text{tg.}(\bar{y}.\bar{z}) &= \frac{A}{B.C}.\sqrt{A^2+B^2+C^2}\;;\\ \text{tg.}(\bar{x}.\bar{z}) &= \frac{B}{A.C}.\sqrt{A^2+B^2+C^2}\;;\\ \text{tg.}(\bar{x}.\bar{y}) &= \frac{C}{A.B}.\sqrt{A^2+B^2+C^2}\;;\end{aligned}\right\}\ldots (4)$$

Mit Anwendung der Gleichungen (1) und (5) erhält man noch einige andere merkwürdige Ausdrücke dafür, nemlich:

$$\left.\begin{aligned}\text{tg.}(\bar{y}.\bar{z}) &= 2.\left(\frac{A}{D}\right)^2.F = 2.\left(\frac{F}{f^2}\right)\;;\\ \text{tg.}(\bar{x}.\bar{z}) &= 2.\left(\frac{B}{D}\right)^2.F = 2.\left(\frac{F}{f_{,}^2}\right)\;;\\ \text{tg.}(\bar{x}.\bar{y}) &= 2.\left(\frac{C}{D}\right)^2.F = 2.\left(\frac{F}{f_{,,}^2}\right)\;;\end{aligned}\right\}\ldots (5)$$

Wenn man von den Gleichungen (3) je zwei durch einander dividirt; dann erhält man:

$$\left.\begin{array}{ll}\frac{\sin.(y.z)}{\sin.(x.z)} = \frac{B.\sqrt{A^2+C^2}}{A.\sqrt{B^2+C^2}}; & \frac{\sin.(y.z)}{\sin.(x.y)} = \frac{C.\sqrt{A^2+B^2}}{A.\sqrt{B^2+C^2}}; \\ & \frac{\sin.(x.z)}{\sin.(x.y)} = \frac{C.\sqrt{A^2+B^2}}{B.\sqrt{A^2+C^2}};\end{array}\right\} (6)$$

Dividirt man auf ähnliche Art die Gleichungen (2) durch einander; dann erhält man:

$$\left.\begin{array}{ll}\frac{\cos.(y.z)}{\cos.(x.z)} = \frac{B.\sqrt{B^2+C^2}}{A.\sqrt{A^2+C^2}}; & \frac{\cos.(y.z)}{\cos.(x.y)} = \frac{C.\sqrt{B^2+C^2}}{A.\sqrt{A^2+B^2}}; \\ & \frac{\cos.(x.z)}{\cos.(x.y)} = \frac{C.\sqrt{C^2+A^2}}{B.\sqrt{B^2+A^2}};\end{array}\right\} (7)$$

Endlich dividire man eben so je zwei der Gleichungen (4) durch einander, und man wird erhalten:

$$\frac{\mathrm{tg}.(y.z)}{\mathrm{tg}.(x.z)} = \frac{A^2}{B^2}; \quad \frac{\mathrm{tg}.(y.z)}{\mathrm{tg}.(x.z)} = \frac{A^2}{C^2}; \quad \frac{\mathrm{tg}.(x.z)}{\mathrm{tg}.(x.y)} = \frac{B^2}{C^2}. \quad (8)$$

Aus den Gleichungen (4) und (5) kann man noch einen sehr merkwürdigen Ausdruck für das Verhältniss $\left(\frac{F}{D}\right)$ finden. Die Gleichungen (4) geben nemlich, wenn man jede von ihnen auf das Quadrat erhebt, und hierauf in eine Summe bringt,

$$B^2C.^2h^2 + A^2C.^2h_{\prime}^2 + A^2B^2h_{\prime}^2 = 2.D^2(A^2+B^2+C^2);$$

dividirt man diese Gleichung durch

$$4.A^2B^2C.^2F^2 = D^4(A^2+B^2+C^2);$$

so erhält man:

$$\frac{F^2}{D^2} = \frac{1}{8}.\left\{\frac{h^2}{A^2} + \frac{h_{\prime}^2}{B^2} + \frac{h_{\prime\prime}^2}{C^2}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

Oder auch, wenn man für $h\,h_{\prime}\,h_{\prime\prime}$ die Werthe aus den Gleichungen (7) setzt:

$$\frac{1}{D^2} = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{A.g}\right)^2 + \left(\frac{1}{B.g_{\prime}}\right)^2 + \left(\frac{1}{C.g_{\prime\prime}}\right)^2\right\} \quad \ldots \quad (10)$$

113. Bezeichnet man die Perpendikel, welche vom Anfangspunkte der Coordinaten auf die Knotenlinien $h\,h_{\prime}\,h_{\prime\prime}$ gefällt

werden, mit $l\,l_{\prime}l_{\prime\prime}$; so findet man, aus den Gleichungen der Knotenlinien, und mit Hilfe der Ausdrücke des zweiten Capitels Art. 92 Gleichung (1):

$$l = \frac{-D}{\sqrt{C^2+B^2}}\,;\quad l_{\prime} = \frac{-D}{\sqrt{A^2+C^2}}\,;\quad l_{\prime\prime} = \frac{-D}{\sqrt{B^2+A^2}} \Big\} \,.\,(1)$$

Diese Gleichungen geben die Relation:

$$4.(A^2+B^2+C^2) = D^2.\left\{\frac{1}{l^2}+\frac{1}{l_{\prime}^2}+\frac{1}{l_{\prime\prime}^2}\right\} \;.\;.\;.\;(2)$$

und umgekehrt:

$$\left.\begin{aligned} C.\sqrt{2} &= -D.\sqrt{\left\{+\frac{1}{l^2}+\frac{1}{l_{\prime}^2}-\frac{1}{l_{\prime\prime}^2}\right\}} \\ B.\sqrt{2} &= -D.\sqrt{\left\{+\frac{1}{l^2}-\frac{1}{l_{\prime}^2}+\frac{1}{l_{\prime\prime}^2}\right\}} \\ A.\sqrt{2} &= -D.\sqrt{\left\{-\frac{1}{l^2}+\frac{1}{l_{\prime}^2}+\frac{1}{l_{\prime\prime}^2}\right\}} \end{aligned}\right\} \;.\;.\;.\;(3)$$

Die Einführung der Grössen $l\,l_{\prime}l_{\prime\prime}$ in die Ausdrücke des vorhergehenden Art. erzeugt neue Relationen, die eben symmetrisch und einfach sind. So z. B. geben die Gleichungen (2):

$$\left.\begin{aligned} \cos.(\bar{y}.\bar{z}) &= \frac{B.C.l_{\prime}.l_{\prime\prime}}{D^2}\,; \\ \cos.(\bar{x}.\bar{z}) &= \frac{A.C.l.l_{\prime\prime}}{D^2}\,; \\ \cos.(\bar{x}.\bar{y}) &= \frac{A.B.l.l_{\prime}}{D^2}\,; \end{aligned}\right\} \;.\;.\;.\;.\;(4)$$

und hieraus hat man:

$$\frac{\cos.(\bar{y}.\bar{z})}{\cos.(\bar{x}.\bar{z})} = \frac{B.l_{\prime}}{A.l}\,;\quad \frac{\cos.(\bar{y}.\bar{z})}{\cos.(\bar{x}.\bar{y})} = \frac{C.l_{\prime\prime}}{A.l}\,;\quad \frac{\cos.(\bar{x}.\bar{z})}{\cos.(\bar{x}.\bar{y})} = \frac{C.l_{\prime\prime}}{B.l_{\prime}} \,.\,(5)$$

Die Gleichungen (4) Art. 111 geben:

$$h = \frac{+D^2}{l.B.C}\,;\quad h_{\prime} = \frac{+D^2}{l_{\prime}.A.C}\,;\quad h_{\prime\prime} = \frac{+D^2}{l_{\prime\prime}.A.B} \;.\;(6)$$

Die Gleichungen (3) des vorigen Art. geben:

$$\left.\begin{aligned}
\sin.(\bar{y}.\bar{z}) &= \frac{l_{,}l_{,,}}{D^2}.A.\sqrt{A^2+B^2+C^2}\;;\\
\sin.(\bar{x}.\bar{z}) &= \frac{l.l_{,,}}{D^2}.B.\sqrt{A^2+B^2+C^2}\;;\\
\sin.(\bar{x}.\bar{y}) &= \frac{l.l_{,}}{D^2}.C.\sqrt{A^2+B^2+C^2}\;;
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (7)$$

und hieraus ist:

$$\frac{\sin.(\bar{y}.\bar{z})}{\sin.(\bar{x}.\bar{z})} = \frac{A.l_{,}}{B.l}\;;\quad \frac{\sin.(\bar{y}.\bar{z})}{\sin.(\bar{x}.\bar{y})} = \frac{A.l_{,,}}{C.l}\;;\quad \frac{\sin.(\bar{x}.\bar{z})}{\sin.(\bar{x}.\bar{y})} = \frac{B.l_{,,}}{C.l_{,}} \quad (8)$$

Setzt man in diese fünf Systeme der Gleichungen (4) (5) (6) (7) (8) für ABC die Werthe aus Art. 111 Gleichung (1) so ergeben sich noch folgende merkwürdige Ausdrücke:

$$\cos.(\bar{y}.\bar{z}) = \left(\frac{l_{,}l_{,,}}{f_{,}f_{,,}}\right);\; \cos.(\bar{x}.\bar{z}) = \left(\frac{l.l_{,,}}{f.f_{,,}}\right);\; \cos.(\bar{x}.\bar{y}) = \left(\frac{l.l_{,}}{f.f_{,}}\right).(9)$$

$$\frac{\cos.(\bar{y}.\bar{z})}{\cos.(\bar{x}.\bar{z})} = \left(\frac{l_{,}.f}{l.f_{,}}\right);\; \frac{\cos.(\bar{y}.\bar{z})}{\cos.(\bar{x}.\bar{y})} = \left(\frac{l_{,,}.f}{l.f_{,,}}\right);\; \frac{\cos.(\bar{x}.\bar{z})}{\cos.(\bar{x}.\bar{y})} = \left(\frac{l_{,,}.f_{,}}{l_{,}.f_{,,}}\right). \quad (10)$$

$$h = \left(\frac{f_{,}f_{,,}}{l}\right);\quad h_{,} = \left(\frac{f.f_{,,}}{l_{,}}\right);\quad h_{,,} = \left(\frac{f.f_{,}}{l_{,}}\right). \; . \; (11)$$

$$\left.\begin{aligned}
\sin.(\bar{y}.\bar{z}) = -\left(\frac{l_{,}l_{,,}}{f}\right).V;\quad \sin.(\bar{x}.\bar{z}) &= -\left(\frac{l.l_{,,}}{f_{,}}\right)V\\
\sin.(\bar{x}.\bar{y}) &= -\left(\frac{l.l_{,}}{f_{,,}}\right)V
\end{aligned}\right\} \; . \; . \; (12)$$

$$\text{wo } V = \sqrt{\left\{\frac{1}{l^2}+\frac{1}{l^2_{,}}+\frac{1}{l^2_{,,}}\right\}}.$$

$$\frac{\sin.(\bar{y}.\bar{z})}{\sin.(\bar{x}.\bar{z})} = \left(\frac{l_{,}.f_{,}}{l.f}\right);\; \frac{\sin.(\bar{y}.\bar{z})}{\sin.(\bar{x}.\bar{y})} = \left(\frac{l_{,,}.f_{,,}}{l.f}\right);\; \frac{\sin.(\bar{x}.\bar{z})}{\sin.(\bar{x}.\bar{y})} = \left(\frac{l_{,,}.f_{,,}}{l_{,}f_{,}}\right) \quad (13)$$

Aus den Gleichungen (10) und (13) folgt ferner:

$$\frac{\text{tg.}(\bar{y}.\bar{z})}{\text{tg.}(\bar{x}.\bar{z})} = \left(\frac{f_{,}}{f}\right)^2;\; \frac{\text{tg.}(\bar{y}.\bar{z})}{\text{tg.}(\bar{x}.\bar{y})} = \left(\frac{f_{,,}}{f}\right)^2;\; \frac{\text{tg.}(\bar{x}.\bar{z})}{\text{tg.}(\bar{x}.\bar{y})} = \left(\frac{f_{,,}}{f_{,}}\right)^2. \quad (14)$$

Alle diese Relationen, welche schon ihrer symmetrischen Formen wegen an und für sich merkwürdig sind, verdienen noch besondere Aufmerksamkeit wegen der wichtigen Sätze, welche in ihnen enthalten sind.

Gleichung einer Ebene, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten und durch eine gegebene Gerade im Raume gelegt wird. Neigung einer Ebene gegen die coordinirten Ebenen und Achsen. Ebene, welche durch zwei Punkte im Raume und den Anfangspunkt gelegt wird.

114. Bis jetzt haben wir für einige der Grössen, welche aus den verschiedenen Beziehungen einer Ebene gegen das System rechtwinklichter coordinirter Achsen entspringen, als da sind die Grössen, welche wir mit $f\ f_{,} f_{,,} h\ h_{,} h_{,,} F\ l\ l_{,} l_{,,}$ u.s.w. bezeichnet haben, und die Winkel, welche die Knotenlinien mit den Achsen und mit einander machen, die allgemeinen Ausdrücke entwickelt, welche insgesammt Funktionen der die Lage der Ebene bestimmenden Coëffizienten $ABCD$ ihrer Gleichung sind. Es ist bereits angemerkt worden, (was auch schon aus der Art und Weise einleuchtend ist, auf welche man die allgemeine Form der Gleichung einer Ebene gefunden hat), dass man zur Kenntniss ihrer Lage gegen das System der rechtwinklichten coordinirten Achsen nicht geradezu nöthig hat, die absoluten Werthe der Coëffizienten $ABCD$ zu wissen; sondern es ist zu dieser Kenntniss der Lage einer Ebene hinreichend, ihre gegenseitigen Verhältnisse, also etwa nur die absoluten Werthe der drei Grössen $\frac{A}{D}, \frac{B}{D}, \frac{C}{D}$, zu kennen. Wenn nun gewisse Bedingungen gegeben sind, welchen die Lage einer Ebene Genüge zu leisten hat; so wird sie dadurch vollkommen bestimmt seyn, wenn man Gleichungen aus ihnen herleiten kann, welche gerade hinreichend sind, jene drei Grössen zu bestimmen. Umgekehrt wird man, wenn man bereits aus Grundsätzen der Geometrie weis, dass die Lage einer Ebene durch die in gewissen Bedingungen gegebenen Stücke vollständig bestimmt werde, aus diesen Bedingungen gerade so viele Gleichungen ableiten können, als hinreichend sind, die drei Verhältnisse $\frac{A}{D}, \frac{B}{D}, \frac{C}{D}$ durch jene in den Bedingungen gegebenen Stücke auszudrücken. Durch dieses Mittel wird

man nun auf eine ähnliche Art, wie im vorhergehenden Capitel, die bisher betrachteten Grössen und ihre durch $ABCD$ ausgedrückten Werthe jedesmal in Funktionen derjenigen Stücke finden können, durch welche die Lage der Ebene bestimmt wird. Man nimmt nun hieraus sehr leicht den Weg gewahr, welchen man bei Auflösung der Probleme, so die Bestimmung der Lage einer Ebene gegen ein System coordinirter Achsen und der aus ihren gegenseitigen Beziehungen entspringenden Grössen betreffen, einzuschlagen hat.

Einen einfachen Fall dieser Bestimmungen der Lagen der Ebenen werden wir nun in diesem Absatze betrachten. Man verlangt hier die Gleichung derjenigen Ebene, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten und durch eine der Lage nach gegebene Gerade des Raumes geht, also einer Ebene, davon schon Art. 100 und 101 Erwähnung geschehen ist. Weil hier $D = 0$ ist, oder weil die Gleichung einer Ebene, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht, die allgemeine Form hat:

$$A.x + B.y + C.z = 0 ;$$

so reicht es hin, nur die Verhältnisse der drei Coöffizienten ABC oder die zwei Grössen $\frac{A}{C}, \frac{B}{C}$ zu kennen. Man wird nun aus den Bedingungen, durch welche die Lage einer solchen Ebene bestimmt wird, zwei Gleichungen erhalten, aus welchen diese zwei Verhältnisse $\frac{A}{C}, \frac{B}{C}$ gefunden werden können. Wenn nun verlangt wird, die Ebene soll durch diejenige Gerade des Raumes gehen, deren Gleichungen sind:

$$y = a x + b ;$$
$$z = a_{,} x + b_{,} ;$$

so wird man aus dieser Bedingung zwischen ABC und den gegebenen Grössen $a a_{,} b b_{,}$ zwei Gleichungen herleiten, aus denen man A und B durch $C a a_{,} b b_{,}$; oder die Verhältnisse $\frac{A}{C}, \frac{B}{C}$ durch die Stücke $a a_{,} b b_{,}$ wird bestimmen können.

Man sehe nun die Schlüsse, durch weche man auf die gesuchten Gleichungen gelangt.

Wir müssen ausdrücken, dass die gegebene Gerade ganz in der gesuchten Ebene sich befinde. Dazu ist nothwendig, dass die Coordinaten aller Punkte der Geraden die Gleichung der Ebene identisch machen. Substituirt man also für yz die Werthe aus den gegebenen Gleichungen der Geraden in die der Ebene; so erhält man:

$$(A+B.a+C.a_{,}).x+(B.b+C.b_{,})=0.$$

Diese Gleichung soll nun für jeden möglichen Werth von x statt finden; dazu ist nothwendig, dass sowohl der von x *abhängige* als *unabhängige* Theil dieser Gleichung, und zwar *jeder für sich* gleich Null sey. Die gesuchten zwei Gleichungen sind also:

$$\left.\begin{aligned} A+B.a+C.a_{,} &= 0\,; \\ B.b+C.b_{,} &= 0\,; \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

welche nichts anderes sind, als der analytische Ausdruck der gegebenen Bedingung, dass die Ebene durch die gegebene Gerade im Raume gehe. Diese zwei Gleichungen geben:

$$\frac{A}{C}=\left(\frac{ab_{,}-a_{,}b}{b}\right);\quad \frac{B}{C}=-\frac{b_{,}}{b} \quad . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Weil nun eine dieser drei Grössen ABC willkührlich ist; so kann man annehmen, dass $C=b$ sey; also dass:

$$A=(ab_{,}-a_{,}b)\,;\quad B=-b_{,}\,;\quad C=+b \quad . \; . \quad (3)$$

die gesuchte Gleichung ist demnach

$$(ab_{,}-a_{,}b).x-b_{,}.y+b_{,}.z=0 \quad . \; . \; . \; . \quad (4)$$

115. Wir haben Art. 101 Gl. (7) allgemeine Formeln gefunden, durch welche wir die Cosinusse der Neigungswinkel der Ebene gegen die Ebenen der xy, xz, yz, welche Winkel mit $\vartheta\,\vartheta_{,}\,\vartheta_{,,}$ bezeichnet wurden, ausgedrückt haben. Bezeichnet man diese Winkel auf die gebräuchliche Art durch $(I.xy)$, $(I.xz)$, $(I.yz)$; so findet man unmittelbar:

$$\left.\begin{aligned}\cos.(I.xy) &= \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,;\\ \cos.(I.xz) &= \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,;\\ \cos.(I.yz) &= \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,;\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (5)$$

Um bei Bestimmung der Winkel aus ihren Sinussen, Cosinussen oder Tangenten auch hier alle Zweideutigkeiten aus dem Wege zu schaffen, werde ich nun folgendes darüber festsetzen. Bekanntlich wird die Neigung zweier Ebenen gegen einander durch den Winkel bestimmt, dessen Scheitel in einem Punkte ihrer Durchschnittslinie liegt, und davon der eine Schenkel in der einen und der andere Schenkel in der andern Ebene senkrecht auf dieser Durchschnittslinie steht.

Will man nun die Neigung einer Ebene gegen die Ebene xy bestimmen, von der wir annehmen können, dass sie durch den Anfangspunkt gehe, oder die correlative Ebene einer andern sey, welche nicht durch den Anfangspunkt geht; so ziehe man in dieser Ebene durch den Anfangspunkt und senkrecht auf die Knotenlinie z eine Gerade; und eben so in der Ebene der xy eine auf z gleichfalls senkrechte Linie. Der Winkel, den diese zwei Linien mit einander machen, ist dann der Neigungswinkel der Ebene I gegen die Ebene xy. Dabei wird unentschieden gelassen, welcher der beiden Winkel der spitzige oder stumpfe sey, davon ein jeder des andern Ergänzungswinkel zu 180° ist. Die Neigung zweier Ebenen gegen einander wird auch noch durch den Winkel gemessen, den die in einem Punkte ihrer Durchschnittslinie auf sie errichteten Perpendikel mit einander machen. Denkt man sich also durch den Anfangspunkt der Coordinaten senkrecht auf die Ebene I eine Gerade gezogen, welche wir die Linie 1 nennen wollen, und bezeichnet man mit 1^+ denjenigen Theil dieser Linie, der in einen der vier Winkel fällt, welche an z^+ liegen; so setzen wir fest, dass die Neigungswinkel $(I.xy)$, $(I.xz)$, $(I.yz)$ diejeni-

gen Winkel seyn sollen, welche 1^+ respektive mit den Achsen $z^+ y^+ x^+$ macht; also $(I.xy) = (1^+ z^+)$; $(I.xz) = (1^+ y^+)$; $(I.yz) = (1^+ x^+)$.

Die Ausdrücke, welche wir nun für die Cosinusse dieser Winkel erhalten haben, lassen sich auch noch durch nachfolgende Schlüsse auf eine sehr einfache Weise entwickeln.

Wenn die Linie 1 auf der Ebene I senkrecht steht; so werden auch die Projektionen der Linie 1 in den Ebenen xy, xz, yz auf den Knotenlinien $\bar{z}$, $\bar{y}$, $\bar{x}$ senkrecht stehen.

Es sey nun:

$$y = ax;$$

die Gleichung der Projektion der in Rede stehenden Geraden 1 in der Ebene xy, während

$$y = -\frac{A}{B} \cdot x;$$

die Gleichung der Knotenlinie der Ebene I in der Ebene xy ist.

Sollen nun diese beiden Geraden auf einander in der Ebene xy senkrecht stehen, so muss, vermöge Gl. (2) Art. 84:

$$a = +\frac{B}{A}.$$

Es folgt also hieraus, dass:

$$y = +\frac{B}{A} \cdot x$$

die Gleichung der auf dieser Knotenlinie $\bar{z}$ senkrechten Linie oder der Projektion der Geraden 1 in der Ebene xy sey.

Aus eben dem Grunde ist

$$z = +\frac{C}{A} \cdot x$$

die Gleichung der auf die Knotenlinie der Ebene I in der coordinirten Ebene xz senkrechten Geraden, oder die Gleichung der Projektion der Geraden 1 in der Ebene xz.

Die zwei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} y &= +\frac{B}{A} \cdot x; \\ z &= +\frac{C}{A} \cdot x; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (6)$$

sind also die Gleichungen derjenigen Geraden im Raume, welche durch den Anfangspunkt geht, und auf der Ebene I senkrecht steht. Man sieht, dass, wenn ABC positiv sind, diese Gerade 1^+ in den körperlichen Winkel $x^+ y^+ z^+$ falle; indem die Knotenlinien dieser Ebene, d. i. $\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}$ respektive in die Quadranten $(y^- z^+)$, $(x^- z^+)$, $(x^- y^+)$ fallen.

Bezeichnet man die Winkel, welche sie mit den coordinirten Achsen xyz macht, mit $\pi \pi_{,} \pi_{,,}$, d. i. $\pi = (1^+ x^+)$, u. s. w.; so werden ihre Cosinusse mittelst der Formel (1) Art. 47 gefunden werden. Setzt man nemlich daselbst:

$$y' = + \frac{B}{A} . x'; \quad z' = + \frac{C}{A} . x';$$

und nimmt an: $y'' = 0$, $z'' = 0$; so ist:

$$\cos. \pi = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}};$$

Setzt man aber: $x'' = 0$, $z'' = 0$; so ist:

$$\cos. \pi_{,} = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}};$$

Ist endlich: $x'' = 0$, $y'' = 0$; so hat man:

$$\cos. \pi_{,,} = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Vermöge der Erklärung ist aber:

$$\pi_{,,} = (I. xy); \quad \pi_{,} = (I. xz); \quad \pi = (I. yz).$$

Nachdem wir nun die Ausdrücke kennen, durch welche die Cosinusse der Winkel gefunden werden, welche eine Ebene mit den coordinirten Ebenen xy, xz, yz macht; so ist es leicht, hieraus die Ausdrücke für die Sinusse und Tangenten eben dieser Winkel zu finden. Man erhält:

$$\left.\begin{aligned}
\sin. (I. xy) &= \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}; \\
\sin. (I. xz) &= \frac{\sqrt{A^2 + C^2}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}; \\
\sin. (I. yz) &= \frac{\sqrt{B^2 + C^2}}{\sqrt{A^2 + B + C^2}};
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (7)$$

Und

$$\left.\begin{aligned} \text{tg.}(I.xy) &= \frac{\sqrt{A^2+B^2}}{C}\,; \\ \text{tg.}(I.xz) &= \frac{\sqrt{A^2+C^2}}{B}\,; \\ \text{tg.}(I.yz) &= \frac{\sqrt{B^2+C^2}}{A}\,; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

Die Winkel, welche die Ebene I mit den Achsen x, y, z macht, d. i. die Neigungen dieser Achsen gegen die Ebene I sind die Ergänzungswinkel der Neigungen $(I.yz)$, $(I.xz)$, $(I.xy)$ zu 90°. Es ist also:

$$\left.\begin{aligned} &\sin.(I.x) = \text{cs.}(I.yz)\,;\ \text{cs.}(I.x) = \sin.(I.yz)\,;\ \text{tg.}(I.x) = \frac{1}{\text{tg.}(I.yz)} \\ &\sin.(I.y) = \text{cs.}(I.xz)\,;\ \text{cs.}(I.y) = \sin.(I.xz)\,;\ \text{tg.}(I.y) = \frac{1}{\text{tg.}(I.xz)} \\ &\sin.(I.z) = \text{cs.}(I.xy)\,;\ \text{cs.}(I.z) = \sin.(I.xy)\,;\ \text{tg.}(I.z) = \frac{1}{\text{tg.}(I.xy)} \end{aligned}\right\} (9)$$

116. Mit Hilfe der Gleichungen, welche wir im Art. 111 gefunden haben, lassen sich den für die Cosinusse, Sinusse und Tangenten der Neigungswinkel einer Ebene gegen die coordinirten Ebenen entwickelten Ausdrücken noch andere Formen ertheilen.

So z. B. giebt die Einführung der Werthe ABC aus den Gl. (1) in diese Ausdrücke (5) des vorigen Art.

$$\left.\begin{aligned} \cos.(I.xy) &= \frac{-1}{f_{,,}\sqrt{\frac{1}{f^2}+\frac{1}{f_{,}^2}+\frac{1}{f_{,,}^2}}}\,; \\ \cos.(I.yz) &= \frac{-1}{f_{,}\sqrt{\frac{1}{f^2}+\frac{1}{f_{,}^2}+\frac{1}{f_{,,}^2}}}\,; \\ \cos.(I.yz) &= \frac{-1}{f.\sqrt{\frac{1}{f^2}+\frac{1}{f_{,}^2}+\frac{1}{f_{,,}^2}}}\,; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Und die Gleichungen (8) Art. 115 werden mittelst Gl. (1) (4) Art. 111:

$$\left.\begin{aligned} \text{tg.}(I.\,xy) &= \frac{A.\,B.\,h_{\prime\prime}}{C.\,D} = -\frac{f_{\prime\prime}.\,h_{\prime\prime}}{f.\,f_{\prime}}; \\ \text{tg.}(I.\,xz) &= \frac{A.\,C.\,h_{\prime}}{B.\,D} = -\frac{f_{\prime}.\,h_{\prime}}{f.\,f_{\prime\prime}}; \\ \text{tg.}(I.\,yz) &= \frac{B.\,C.\,h}{A.\,D} = -\frac{f.\,h}{f_{\prime}.\,f_{\prime\prime}}; \end{aligned}\right\} \;\ldots\ldots (2)$$

Die Gleichungen (7) des vorigen Art. gehen mittelst der Gl. (7) Art. 111 in folgende über:

$$\left.\begin{aligned} \sin.(I.\,xy) &= \frac{A.\,g}{D} = -\frac{g}{f}; \\ \sin.(I.\,xz) &= \frac{B.\,g_{\prime}}{D} = -\frac{g_{\prime}}{f_{\prime}}; \\ \sin.(I.\,yz) &= \frac{C.\,g_{\prime\prime}}{D} = -\frac{g_{\prime\prime}}{f_{\prime\prime}}; \end{aligned}\right\} \;\ldots\ldots (3)$$

Mit Hülfe der Gleichung (5) Art. 111. erhält man aus den Gl. (5) und (7) des vorigen Art.:

$$\left.\begin{aligned} \cos.(I.\,xy) &= \frac{D^2}{2A\,B.\,F} = \frac{f.\,f_{\prime}}{2F}; \\ \cos.(I.\,xz) &= \frac{D^2}{2A\,C.\,F} = \frac{f.\,f_{\prime\prime}}{2F}; \\ \cos.(I.\,yz) &= \frac{D^2}{2B\,C.\,F} = \frac{f_{\prime}.\,f_{\prime\prime}}{2F}; \end{aligned}\right\} \;\ldots\ldots (4)$$

$$\left.\begin{aligned} \sin.(I.\,xy) &= \frac{D^2\sqrt{A^2+B^2}}{2.\,A.\,B.\,C.\,F} = \frac{D.\,h_{\prime\prime}}{2C.\,F} = -\frac{h_{\prime\prime}.\,f_{\prime\prime}}{F}; \\ \sin.(I.\,xz) &= \frac{D^2\sqrt{A^2+C^2}}{2.\,A.\,B.\,C.\,F} = \frac{D.\,h_{\prime}}{2.\,B.\,F} = -\frac{h_{\prime}.\,f_{\prime}}{F}; \\ \sin.(I.\,yz) &= \frac{D^2\sqrt{B^2+C^2}}{2.\,A.\,B.\,C.\,F} = \frac{D.\,h}{2A.\,F} = -\frac{h.\,f}{F}; \end{aligned}\right\} . (5)$$

Wendet man die Gleichung (1) Art. 113 zur Umformung der Gl. (8) des vorhergehenden Art. an; so findet man:

$$\left.\begin{aligned} \text{tg.}(I.xy) &= \frac{-D}{C.l_{\prime\prime}} = \frac{f_{\prime\prime}}{l_{\prime\prime}}; \\ \text{tg.}(I.xz) &= \frac{-D}{B.l_{\prime}} = \frac{f_{\prime}}{l_{\prime}}; \\ \text{tg.}(I.yz) &= \frac{-D}{A.l} = \frac{f}{l}; \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (6)$$

Setzt man die Ausdrücke (6) Art. 113 für $h\,h_{\prime}h_{\prime\prime}$ in die Gl. (5) des gegenwärtigen Art.; so findet man:

$$\left.\begin{aligned} \sin.(I.xy) &= \frac{D^2 f_{\prime\prime}}{A.B.l_{\prime\prime}F} = \left(\frac{f.f_{\prime}f_{\prime\prime}}{l_{\prime\prime}.F}\right); \\ \sin.(I.xz) &= \frac{D^2 f_{\prime}}{A.C.l_{\prime}.F} = \left(\frac{f.f_{\prime}f_{\prime\prime}}{l_{\prime}.F}\right); \\ \sin.(I.yz) &= \frac{D^2 f}{B.C.l.F} = \left(\frac{f.f_{\prime}.f_{\prime\prime}}{l.F}\right); \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (7)$$

Aus den hier erhaltenen Formeln, deren noch eine Menge von gleicher Symmetrie auf diese Art entwickelt werden können, ergeben sich wieder Ausdrücke für die Verhältnisse der Sinusse, Cosinusse und Tangenten, die eben so einfach sind. So hat man z. B.

$$\frac{\cos.(I.yz)}{\cos.(I.xz)} = \frac{f_{\prime}}{f}; \quad \frac{\cos.(I.yz)}{\cos.(I.xy)} = \frac{f_{\prime\prime}}{f}; \quad \frac{\cos.(I.xz)}{\cos.(I.xy)} = \frac{f_{\prime\prime}}{f_{\prime}}; \quad \ldots (8)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\sin.(I.yz)}{\sin.(I.xz)} &= \left(\frac{f_{\prime}\,g_{\prime\prime}}{f_{\prime\prime}g_{\prime}}\right) = \left(\frac{h.f}{h_{\prime}f_{\prime}}\right) = \frac{l_{\prime}}{l}; \\ \frac{\sin.(I.yz)}{\sin.(I.xy)} &= \left(\frac{f.\,g_{\prime\prime}}{f_{\prime\prime}.g}\right) = \left(\frac{h_{\prime}.f}{h_{\prime\prime}.f_{\prime}}\right) = \frac{l_{\prime\prime}}{l}; \\ \frac{\sin.(I.xz)}{\sin.(I.xy)} &= \left(\frac{f.g_{\prime}}{f_{\prime}.g}\right) = \left(\frac{h_{\prime}.f_{\prime}}{h_{\prime\prime}.f_{\prime\prime}}\right) = \frac{l_{\prime\prime}}{l_{\prime}}; \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (9)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\text{tg.}(I.yz)}{\text{tg.}(I.xz)} &= \left(\frac{f.^2 h}{f_{\prime}^2 h_{\prime}}\right) = \left(\frac{l_{\prime}.f}{l.f_{\prime}}\right); \\ \frac{\text{tg.}(I.yz)}{\text{tg.}(I.xy)} &= \left(\frac{f.^2 h}{f_{\prime\prime}^2.h_{\prime\prime}}\right) = \left(\frac{l_{\prime\prime}.f}{l.f_{\prime\prime}}\right); \\ \frac{\text{tg.}(I.xz)}{\text{tg.}(I.xy)} &= \left(\frac{f_{\prime}^2.h_{\prime}}{f_{\prime\prime}^2.h_{\prime\prime}}\right) = \left(\frac{l_{\prime\prime}.f_{\prime}}{l_{\prime}.f_{\prime\prime}}\right); \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (10)$$

Diese hier entwickelten Relationen (1) . . . (10) sind nicht nur an und für sich, wegen ihrer Symmetrie, bemerkenswerth,

sondern auch noch wegen der eleganten Sätze der Geometrie, welche in ihnen enthalten sind, und welche man nur durch Worte auszudrücken braucht.

117. Wenn die Lage einer Ebene durch gewisse Bedingungen bestimmt wird, oder wenn die Coëffizienten $ABCD$ Funktionen von andern gegebenen Grössen sind; (wie dies der Fall in dem eben betrachteten Beispiele ist, da man ABC durch $a a_{,} b b_{,}$ bestimmt hat); so wird man die Ausdrücke für diejenigen Grössen, welche aus den verschiedenen Beziehungen einer Ebene gegen ein System coordinirter Achsen hervorgehen, in Funktionen der gegebenen Stücke erhalten; wenn man nur die für $ABCD$ gegebenen Funktionen an ihre Stelle in die allgemeinen Ausdrücke bringt, welche wir bisher als Funktionen der Grössen $ABCD$ dargestellt haben.

So z. B. haben wir in dem Falle, da die Ebene I durch den Anfangspunkt der Coordinaten und durch eine gegebene Gerade im Raume geht, $D = 0$, und $A = (ab_{,} - a_{,}b)$; $B = -b_{,}$; $C = +b$; Art. 114 Gl. (2). Setzt man nun für ABC diese Werthe in die Gl. (1) (2) (3) Art. 110; so erhält man die Sinusse, Cosinusse und Tangenten der Winkel, welche die Knotenlinien dieser Ebene mit den coordinirten Achsen machen, in Funktionen der gegebenen Stücke $a a_{,} b b_{,}$. So z. B. ist:

$$\left.\begin{aligned} \text{tg.}(\bar{z}.x) &= \left(\frac{ab_{,}-a_{,}b}{b_{,}}\right); \quad \text{tg.}(\bar{z}.y) = \left(\frac{b_{,}}{a_{,}b-ab_{,}}\right); \\ \text{tg.}(\bar{y}.x) &= \left(\frac{a_{,}b-ab_{,}}{b}\right); \quad \text{tg.}(\bar{y}.z) = \left(\frac{b}{ab_{,}-a_{,}b}\right); \\ \text{tg.}(\bar{x}.y) &= \frac{b_{,}}{b}; \quad \text{tg.}(\bar{x}.z) = -\frac{b}{b_{,}}; \end{aligned}\right\} \quad . \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} \cos.(\bar{z}.x) &= \frac{-b_{,}}{\sqrt{(ab_{,}-a_{,}b)^2+b_{,}^2}}; \quad \cos.(\bar{z}.y) = \frac{(a_{,}b-ab_{,})}{\sqrt{(a_{,}b-ab_{,})^2+b_{,}^2}} \\ \cos.(\bar{y}.x) &= \frac{+b}{\sqrt{(ab_{,}-a_{,}b)^2+b^2}}; \quad \cos.(\bar{y}.z) = \frac{(a_{,}b-ab_{,})}{\sqrt{(a_{,}b-ab_{,})^2+b^2}} \\ \cos.(\bar{x}.y) &= \frac{+b}{\sqrt{b^2+b_{,}^2}}; \quad \cos.(\bar{x}.z) = \frac{+b_{,}}{\sqrt{b^2+b_{,}^2}}; \end{aligned}\right\} (2)$$

Und setzt man:

$$\sqrt{\{(a_{,}b-ab_{,})^2+b^2+b_{,}^2\}} = P;$$

dann findet man aus der Gl. (4) Art. 112:

$$\left.\begin{array}{l} \text{tg.}(y.z)=\dfrac{(a_{,}b-a.b).P}{b.b_{,}}; \\ \text{tg.}(x.z)=\dfrac{b_{,}.P}{b(a_{,}b-ab_{,})}; \text{tg.}(x.y)=\dfrac{b.P}{b_{,}(a_{,}b-a.b_{,})}; \end{array}\right\} . (3)$$

Endlich geben die Gl. Art. 115:

$$\cos.(I.yz) = \frac{b}{P}; \cos.(I.xz)=\frac{-b_{,}}{P}; \cos.(I.xy)=\frac{(ab_{,}-a_{,}b)}{P}; \quad (4)$$

Gleichungen, welche schon Art. 101. gefunden worden sind.

118. Wir wollen itzt annehmen, dass die Lage der Geraden, durch welche man eine Ebene legen soll, durch die Lage zweier Punkte im Raume bestimmt werde. Die Frage, die Gleichung der Ebene zu finden, so durch diese Gerade und durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht, reduzirt sich nun darauf, die Gleichung einer Ebene zu finden, welche durch drei gegebene Punkte geht, davon der eine der Anfangspunkt der Coordinaten selbst ist.

Sind $x'y'z'$ die Coordinaten des einen, und $x''y''z''$ die des andern Punktes im Raume; dann hat man, nach Art. 99:

$$\left.\begin{array}{l} a = \left(\dfrac{y''-y'}{x''-x'}\right); \; b = \left(\dfrac{x''y'-x'y''}{x''-x'}\right); \\ a_{,} = \left(\dfrac{z''-z'}{x''-x'}\right); \; b_{,} = \left(\dfrac{x''z'-x'z''}{x''-x'}\right); \end{array}\right\}$$

Bringt man diese Werthe in die Gleichungen (2) Art. 114; dann hat man:

$$\frac{A}{C} = -\left(\frac{y'z''-y''z'}{x''y'-x'y''}\right); \; \frac{B}{C} = -\left(\frac{x''z'-x'z''}{y'x''-x'y''}\right)\}$$

Man kann also annehmen:

$$A=-(y'z''-y''z'); B=-(x''z'-x'z''); C=+(x''y'-x'y'') \; (1)$$

Die Gleichung der gesuchten Ebene ist also:

$$-(y'z''-y''z').x-(x''z'-x'z'').y+(x''y'-x'y'').z=0. . (2)$$

Diese Gleichung hätte man auch noch unmittelbar durch folgende Schlüsse erhalten können.

Da in der Ebene, deren Gleichung man annehmen kann:

$$A.x+B.y+C.z=0$$

indem sie durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehen soll, sowohl der Punkt $(x'y'z')$, als auch der Punkt $(x''y''z'')$ liegen soll; so muss die angenommene oder gesuchte Gleichung der Ebene so beschaffen seyn, dass sie in diesen beiden Fällen identisch wird, man mag sowohl $x=x'$, $y=y'$, $z=z'$; als auch $x=x''$, $y=y''$, $z=z''$ annehmen. Diese Bedingungen geben daher nachstehende zwei Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} A.x'+B.y'+C.z'=0 \\ A.x''+B.y''+C.z''=0 \end{array}\right\}$$

und diese sind zur Bestimmung der Verhältnisse $\frac{A}{B}$, $\frac{B}{C}$ hinreichend. Man findet nun die für ABC annehmbaren Werthe aus diesen zwei Gleichungen, wie in (1).

Die Bedeutung der Ausdrücke, welche sich hier als Coëffizienten von xyz in der Gleichung für diese Ebene darstellen, wurde schon Art. 47 erklärt. Haben $k\,k'\,k''$ die Werthe aus den Gl. (6) daselbst; dann hat man zur Gleichung der gesuchten Ebene:

$$k.z=k'.y+k''.x \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Man kann also annehmen:

$$A=k''; \; B=k'; \; C=-k;$$

Setzt man diese Werthe in die Gl. (1) (2) (3) des Art. 110; dann erhält man:

$$\left.\begin{array}{l} \text{tg.}(\bar{z}.x)=-\frac{k''}{k'}; \; \text{tg.}(\bar{y}.x)=\frac{k''}{k}; \; \text{tg.}(\bar{x}.y)=\frac{k'}{k}; \\ \text{tg.}(\bar{z}.y)=+\frac{k'}{k''}; \; \text{tg.}(\bar{y}.z)=-\frac{k}{k''}; \; \text{tg.}(\bar{x}.z)=-\frac{k}{k'}; \end{array}\right\} \quad (4)$$

Unter diesen Gleichungen sind die zwei:

$$\text{tg.}(\bar{y}.x)=\frac{k''}{k}; \; \text{tg.}(\bar{x}.y)=\frac{k'}{k};$$

bereits im Art. 48 Gl. (1) (2) gefunden worden; so wie die Gl. (3) des gegenwärtigen Art. eben daselbst schon angeführt wurde.

Ferner ist: $\cos.(z.x) = \frac{k'}{\sqrt{k'^2 + k''^2}}$; etc.

Setzt man die Werthe für ABC in die Gl. (4) Art. 112., so erhält man:

$$\mathrm{tg.}(y.z) = -\frac{k''.K}{k.k'}, \ \mathrm{tg.}(x.z) = -\frac{k'.K}{k.k''}, \ \mathrm{tg.}(x.y) = -\frac{k.K}{k'.k''}, \quad (5)$$

Die Gl. (5) Art. 115 geben:

$$\cos.(I.xy) = \frac{-k}{K}, \ \cos.(I.xz) = \frac{k'}{K}, \ \cos.(I.yz) = \frac{k''}{K}; \quad . \ . \quad (6)$$

wo $K = \sqrt{(k^2 + k'^2 + k''^2)}$ ist.

Diese Gleichungen (6) fanden wir schon Art. 48 Gl. (6), wo $\delta = \{180^\circ - (I.xy)\}$, $\delta' = (I.xz)$, $\delta'' = (I.yz)$.

Relationen zwischen den Sinussen, Cosinussen und Tangenten der Winkel, welche eine Ebene und ihre Knotenlinien mit den coordinirten Achsen und Ebenen und die Knotenlinien selbst unter einander machen.

119. Nachdem wir Art. 110 Gl. (1) (2) (3); Art. 112. Gl. (2) (3) (4); und Art. 115 Gl. (5) (7) (8) allgemeine Ausdrücke für die Sinusse, Cosinusse und Tangenten der Winkel gefunden haben, welche die Knotenlinien einer Ebene mit den coordinirten Achsen sowohl, als auch unter einander, und die Ebene mit den coordinirten Ebenen machen, und nachdem diese Ausdrücke sich insgesammt als Funktionen der Grössen ABC darstellen; so wird man aus diesen neun Systemen von Gleichungen durch geschickte Verbindungen, welche man unter denselben vornimmt, mehrere unter andern sehr merkwürdige Relationen zwischen den Sinussen, Cosinussen und Tangenten der eben aufgezählten Winkel, entwickeln können. Ich werde hier bloss die vorzüglichsten anführen:

$$\left.\begin{array}{l} \sin.(x.y) = -\dfrac{\cos.(I.xz)}{\sin.(I.yz)}; \ \sin.(x.z) = +\dfrac{\cos.(I.xy)}{\sin.(I.yz)}; \\ \sin.(y.z) = +\dfrac{\cos.(I.xy)}{\sin.(I.xz)}; \ \sin.(y.x) = -\dfrac{\cos.(I.yz)}{\sin.(I.xz)}; \\ \sin.(z.x) = -\dfrac{\cos.(I.yz)}{\sin.(I.xy)}; \ \sin.(z.y) = +\dfrac{\cos.(I.xz)}{\sin.(I.xy)}; \end{array}\right\} \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{ll}\cos.(\bar{x}.y) = +\dfrac{\cos.(I.xy)}{\sin.(I.yz)}; & \cos.(\bar{x}.z) = -\dfrac{\cos.(I.xz)}{\sin.(I.yz)};\\ \cos.(\bar{y}.z) = -\dfrac{\cos.(I.yz)}{\sin.(I.xz)}; & \cos.(\bar{y}.x) = +\dfrac{\cos.(I.xy)}{\sin.(I.xz)};\\ \cos.(\bar{z}.x) = +\dfrac{\cos.(I.xz)}{\sin.(I.xy)}; & \cos.(\bar{z}.y) = -\dfrac{\cos.(I.yz)}{\sin.(I.xy)};\end{array}\right\} \quad (2)$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{tg.}(\bar{x}.y) = -\dfrac{\cos.(I.xz)}{\cos.(I.xy)}; & \text{tg.}(\bar{x}.z) = +\dfrac{\cos.(I.xy)}{\cos.(I.xz)};\\ \text{tg.}(\bar{y}.z) = +\dfrac{\cos.(I.xy)}{\cos.(I.yz)}; & \text{tg.}(\bar{y}.x) = -\dfrac{\cos.(I.yz)}{\cos.(I.xy)};\\ \text{tg.}(\bar{z}.x) = -\dfrac{\cos.(I.yz)}{\cos.(I.xz)}; & \text{tg.}(\bar{z}.y) = +\dfrac{\cos.(I.xz)}{\cos.(I.yz)};\end{array}\right\} \quad (3)$$

Für die Sinusse, Cosinusse und Tangenten der Winkel, welche die Knotenlinien mit einander machen, erhält man durch ähnliche Combinationen der gedachten Formeln:

$$\left.\begin{array}{l}\sin.(\bar{x}.\bar{y}) = \dfrac{\cos.(I.xy)}{\sin.(I.xz).\ \sin.(I.yz)} = \dfrac{\sin.(I.z)}{\cos.(I.y).\ \cos.(I.x)};\\ \sin.(\bar{x}.\bar{z}) = \dfrac{\cos.(I.xz)}{\sin.(I.xy).\ \sin.(I.yz)} = \dfrac{\sin.(I.y)}{\cos.(I.z).\ \cos.(I.x)};\\ \sin.(\bar{y}.\bar{z}) = \dfrac{\cos.(I.yz)}{\sin.(I.xy).\ \sin.(I.xz)} = \dfrac{\sin.(I.x)}{\cos.(I.z).\ \cos.(I.y)};\end{array}\right\} \quad (4)$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{1}{\cos.(\bar{x}.\bar{y})} = \text{tg.}(I.xz).\ \text{tg.}(I.yz);\\ \dfrac{1}{\cos.(\bar{x}.\bar{z})} = \text{tg.}(I.xy).\ \text{tg.}(I.yz);\\ \dfrac{1}{\cos.(\bar{y}.\bar{z})} = \text{tg.}(I.xy).\ \text{tg.}(I.xz);\end{array}\right\} \quad .\ .\ .\ (5)$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{tg.}(\bar{x}.\bar{y}) = \dfrac{\cos.(I.xy)}{\cos.(I.xz).\ \cos.(I.yz)} = \dfrac{\sin.(I.z)}{\sin.(I.y).\ \sin.(I.x)};\\ \text{tg.}(\bar{x}.\bar{z}) = \dfrac{\cos.(I.xz)}{\cos.(I.xy).\ \cos.(I.yz)} = \dfrac{\sin.(I.y)}{\sin.(I.z).\ \sin.(I.x)};\\ \text{tg.}(\bar{y}.\bar{z}) = \dfrac{\cos.(I.yz)}{\cos.(I.xy).\ \cos.(I.xz)} = \dfrac{\sin.(I.x)}{\sin.(I.y).\ \sin.(I.z)};\end{array}\right\} \quad (6)$$

$$\left.\begin{aligned}
\sin.(\bar{x}.\bar{z}) &= +\frac{\sin.(\bar{y}.\bar{z})}{\sin.(I.yz)} = +\frac{\cos.(\bar{x}.y)}{\sin.(I.xz)};\\
\sin.(\bar{x}.\bar{z}) &= -\frac{\sin.(\bar{x}.y)}{\sin.(I.xy)} = +\frac{\cos.(\bar{z}.y)}{\sin.(I.yz)};\\
\sin.(\bar{y}.\bar{z}) &= -\frac{\sin.(\bar{z}.x)}{\sin.(I.xz)} = -\frac{\cos.(\bar{y}.z)}{\sin.(I.xy)};
\end{aligned}\right\}\ldots(7)$$

$$\left.\begin{aligned}
\text{tg}.(\bar{x}.\bar{y}) &= +\frac{\text{tg}.(\bar{y}.z)}{\cos.(I.xz)} = -\frac{1}{\cos.(I.yz).\,\text{tg}.(\bar{x}.y)};\\
\text{tg}.(\bar{x}.\bar{z}) &= -\frac{\text{tg}.(\bar{x}.y)}{\cos.(I.yz)} = -\frac{1}{\cos.(I.xy).\,\text{tg}.(\bar{z}.x)};\\
\text{tg}.(\bar{y}.\bar{z}) &= -\frac{\text{tg}.(\bar{z}.x)}{\cos.(I.xy)} = +\frac{1}{\cos.(I.xz).\,\text{tg}.(\bar{y}.z)};
\end{aligned}\right\}(8)$$

Endlich lassen sich noch die Verhältnisse der Grössen ABC durch die Winkel ausdrücken:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{A}{B} = -\text{tg}.(\bar{z}.x) = \frac{\cos.(I.yz)}{\cos.(I.xz)} =\\
&+\text{tg}.(I.xz).\,\text{cs}.(\bar{y}.z) = \text{tg}.(\bar{z}.\bar{y}).\,\text{cs}.(I.xy) = \frac{+1}{\sin.(\bar{x}.y).\text{tg}.(I.xz)};\\
&\frac{C}{A} = +\text{tg}.(\bar{y}.z) = \frac{\cos.(I.xy)}{\cos.(I.yz)} =\\
&+\text{tg}.(I.yz).\,\text{cs}.(\bar{x}.y) = \text{tg}.(\bar{x}.\bar{y}).\text{cs}.(I.xz) = \frac{-1}{\sin.(\bar{z}.x).\text{tg}.(I.xy)};\\
&\frac{B}{C} = +\text{tg}.(\bar{x}.y) = \frac{\cos.(I.xz)}{\cos.(I.xy)} =\\
&+\text{tg}.(I.xy).\text{cs}.(\bar{z}.x) = \text{tg}.(\bar{x}.\bar{z}).\,\text{cs}.(I.yz) = \frac{+1}{\sin.(\bar{y}.z).\,\text{tg}.(I.xz)};
\end{aligned}\right\}(9)$$

Ferner hat man:

$$\left.\begin{aligned}
\text{tg}.(I.z) &= -\sin.(\bar{z}.x).\,\text{tg}.(\bar{y}.z) = -\frac{\cos.(\bar{z}.x)}{\text{tg}.(\bar{x}.y)};\\
\text{tg}.(I.y) &= -\sin.(\bar{y}.z).\,\text{tg}.(\bar{x}.y) = +\frac{\cos.(\bar{y}.z)}{\text{tg}.(\bar{z}.x)};\\
\text{tg}.(I.x) &= +\sin.(\bar{x}.y).\,\text{tg}.(\bar{z}.x) = +\frac{\cos.(\bar{x}.y)}{\text{tg}.(\bar{y}.z)};
\end{aligned}\right\}(10)$$

Eine jede dieser Relationen ist nichts anders, als eine Gleichung der sphärischen Trigonometrie; und in der That muss

sich auch eine jede von ihnen mit Hülfe der in der sphärischen Trigonometrie gegebenen Gleichungen finden lassen.

Am zweckmässigsten gelangt man zu solchen rationalen Gleichungen, wie wir hier einige angeführt haben, wenn man aus den eben angeführten neun Systemen von Gleichungen die Grössen:

$$A, B, C, \sqrt{A^2+B^2+C^2},$$

und $$\sqrt{A^2+B^2}; \sqrt{A^2+C^2}; \sqrt{B^2+C^2};$$

eliminirt.

Obgleich diese Relationen an sich wegen ihres Gebrauches, der sich von ihnen etwa machen liesse, nicht so merkwürdig sind, als vorzüglich wegen den Beziehungen der Winkel und der symmetrischen Formen; so verdient doch das Verfahren, durch welches man diese Relationen erhält, unsere ganze Aufmerksamkeit, und es liegt hierin der Keim derjenigen Methode, die ich in der Folge anwenden werde, um nicht nur alle Gleichungen der sphärischen Trigonometrie, sondern auch noch eine Menge anderer brauchbarer Relationen zu entwickeln.

Noch einige Bestimmungsarten der Lage einer Ebene. Gleichung der Ebene, welche durch eine gegebene Gerade, und durch einen gegebenen Punkt geht. Ebene, welche durch drei gegebene Punkte geht. Bedeutung ihrer Gleichung.

120. Wir wollen itzt noch einige der vornehmsten Bestimmungsarten der Lage einer Ebene gegen ein System rechtwinklicht coordinirter Achsen bestimmen.

Es sey nun in der Ebene xy eine durch den Anfangspunkt gehende Gerade gegeben, welche die Achse der x unter dem Winkel η schneide. Durch diese Gerade soll nun eine Ebene gelegt werden, die gegen die Ebene xy unter dem Winkel ϑ geneigt sey. Man sucht die Gleichung dieser Ebene.

Sie sey: $$Ax+By+Cz = 0.$$

Aus den gegebenen Bedingungen der Aufgabe wird man nun zwei Gleichungen herzuleiten haben, aus denen die Verhältnisse $\frac{A}{C}$, $\frac{B}{C}$ und die für ABC annehmbaren Werthe gefunden werden können. Da $\eta\vartheta$ die gegebenen Stücke sind, durch welche die Lage der Ebene bestimmt wird, und weil:

$$\eta = (z.x); \quad \vartheta = (I.xy);$$

so wird man folgende zwei Gleichungen haben:

$$\left.\begin{array}{l} \text{tg.}\,\eta = -\frac{A}{B} \\ \cos.\,\vartheta = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}; \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \quad (1)$$

Für ABC wird man nun solche Werthe anzunehmen haben, welche diesen Gleichungen ein Genüge leisten.

Da nun $\quad \text{tg.}\,\vartheta = \frac{\sqrt{A^2+B^2}}{C}$,

und $\quad A = -B.\,\text{tg.}\,\eta$;

so erhält man, nach gehöriger Substitution:

$$\text{tg.}\,\vartheta = \frac{-B}{C.\cos.\eta};$$

folglich: $\frac{A}{C} = \text{tg.}\,\vartheta.\,\sin.\,\eta$; $\frac{B}{C} = -\,\text{tg.}\,\vartheta.\,\cos.\,\eta$.

Die gesuchte Gleichung der Ebene ist dann:

$$x.\,\text{tg.}\,\vartheta.\,\sin.\,\eta - y.\,\text{tg.}\,\vartheta.\,\cos.\,\eta + z = 0;$$

oder, wenn man diese Gleichung mit $\cos.\,\vartheta$ multiplizirt:

$$x.\sin.\vartheta.\sin.\eta - y.\sin.\vartheta.\cos.\eta + z.\cos.\vartheta = 0 \quad . \; . \quad (2)$$

Man kann also annehmen:

$$A = \sin.\vartheta.\sin.\eta; \quad B = -\sin.\vartheta.\cos.\eta; \quad C = \cos.\vartheta \quad . \; . \quad (3)$$

Geht die in der Ebene xy gegebene Gerade, durch welche man eine Ebene legen soll, nicht durch den Anfangspunkt der Coordinaten, sondern durchschneidet sie die Achse der x in einem Punkte, dessen Entfernung vom Anfangspunkte $= c$ sey; so ist ihre Gleichung:

$$y = (x-c).\,\text{tg.}\,\eta.$$

Die Gleichung der auf diese Art bestimmten Ebene wird dann seyn:

$$(x-c).\sin.\vartheta.\sin.\eta - y.\sin.\vartheta.\cos.\eta + z.\cos.\vartheta = 0 \quad . \quad . \quad (4)$$

Setzt man die für ABC gefundenen Werthe in die Formeln Art. 112. Gl. (2) (3) (4), Art. 115. Gl. (5) (7) (8); so erhält man die Winkel, welche die Knotenlinien dieser Ebene unter einander machen, und die Neigungen der Ebene gegen die coordinirten Ebenen in Funktionen der gegebenen Stücke $\vartheta\,\eta$. So z. B. ist:

$$\left.\begin{aligned}
\cos.(\bar{y}.\bar{z}) &= \frac{-\cos.\eta.\cos.\vartheta}{\sqrt{\cos.^2\vartheta+\sin.^2\vartheta.\sin.^2\eta}} = \frac{+\cos.\eta.\cos.\vartheta}{\sqrt{1-\sin.^2\vartheta.\cos.^2\eta}};\\
\cos.(\bar{x}.\bar{z}) &= \frac{+\sin.\eta.\cos.\vartheta}{\sqrt{\cos.^2\vartheta+\sin.^2\vartheta.\cos.^2\eta}} = \frac{+\sin.\eta.\cos.\vartheta}{\sqrt{1-\sin.^2\vartheta.\sin.^2\eta}};\\
\cos.(\bar{x}.\bar{y}) &= \frac{-\sin.\eta.\cos.\eta.\sin.^2\vartheta}{\sqrt{(1-\sin.^2\vartheta.\sin.^2\eta)(1-\sin.^2\vartheta.\cos.^2\eta)}};
\end{aligned}\right\}(5)$$

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{tg}.(\bar{y}.\bar{z}) &= -\frac{\mathrm{tang}.\eta}{\cos.\vartheta};\\
\mathrm{tg}.(\bar{x}.\bar{z}) &= -\frac{\cot.\eta}{\cos.\vartheta};\\
\mathrm{tg}.(\bar{x}.\bar{y}) &= -\frac{\cot.\vartheta}{\sin.^2\vartheta.\sin.\eta.\cos.\eta}
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (6)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\cos.(I.xy) = \cos.\vartheta;\ \cos.(I.xz) = -\sin.\vartheta.\cos.\eta;\\
&\cos.(I.yz) = \sin.\vartheta.\sin.\eta;
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (7)$$

$$\left.\begin{aligned}
\cos.(\bar{y}.\bar{z}) &= \frac{-\cos.\eta.\cos.\vartheta}{\sin.(I.xz)};\\
\cos.(\bar{x}.\bar{z}) &= \frac{+\sin.\eta.\cos.\vartheta}{\sin.(I.yz)};\\
\cos.(\bar{x}.\bar{y}) &= \frac{-\sin.\eta.\cos.\eta.\sin.^2\vartheta}{\sin.(I.xz).\sin.(I.yz)};
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (8)$$

121. *Wir wollen itzt die Gleichung einer Ebene suchen, welche dadurch bestimmt wird, dass sie auf einer Geraden senkrecht steht, welche vom Anfangspunkte zu einem gegebenen Punkte des Raumes gezogen wird.*

Es werde erstlich die Ebene betrachtet, welche durch den Anfangspunkt gelegt wird. Sind $x'y'z'$ die Coordinaten des gegebenen Punktes m'; und man nennt die Gerade Am' die Linie 1; so hat man, nach Art. 14 Gl. (3):

$$\cos.(1.x) = \cos.(I.yz) = \frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}} = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};$$

$$\cos.(1.y) = \cos.(I.xz) = \frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}} = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};$$

$$\cos.(1.z) = \cos.(I.xy) = \frac{z'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}} = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Denn weil die Gerade 1 auf der Ebene I, und die Achse x auf der Ebene yz senkrecht steht, so ist der Winkel $(1.x)$ gleich dem Neigungswinkel $(I.yz)$; und eben so ist $(1.y) = (I.xz)$; $(1.z) = (I.xy)$. Aus diesen Ausdrücken schliesst man unmittelbar, dass $A = x'$; $B = y'$; $C = z'$ sey.

Die gesuchte Gleichung der Ebene ist also:

$$x'.x + y'.y + z'.z = 0 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Wenn die Lage der Geraden Am' durch Gleichungen gegeben wird, und wenn diese sind:

$$\left.\begin{array}{l} y = ax; \\ z = a_{,}x; \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (a)$$

so wird folglich, wenn $y' = ax'$ und $z' = a_{,}x'$ in die Gl. (1) gesetzt wird, die Gleichung der auf diese Gerade senkrechten Ebene seyn:

$$x + a.y + a_{,}.z = 0 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Betrachten wir nun die Ebene, welche durch den Punkt m' gelegt wird; ist

$$Ax + By + Cz + D = 0;$$

die Gleichung dieser Ebene; so werden ABC die schon gefundenen Werthe haben. Um D zu finden, hat man noch die beigefügte Bedingung, dass die Ebene durch den Punkt m' gehen solle, auszudrücken; diess geschieht durch die Gleichung:

$$Ax' + By' + Cz' + D = 0.$$

Zieht man diese Gleichung von der vorigen ab; so hat man:

$$A.(x-x')+B.(y-y')+C.(z-z')=0 \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

und setzt man für ABC die schon erhaltenen Werthe; so ist die gesuchte Gleichung der Ebene:

$$x'.(x-x')+y'.(y-y')+z'.(z-z')=0 \quad . \quad . \quad (4)$$

Soll die Ebene durch einen Punkt m'' gehen, dessen Coordinaten $x''y''z''$ sind, und der nicht in der Geraden Am' liegt; so ist ihre Gleichung:

$$x'.(x-x'')+y'.(y-y'')+z'.(z-z'')=0 \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Wird die Lage der Geraden Am' durch Gleichungen (a) bestimmt; so ist die Gleichung der durch den Punkt $(x''y''z'')$ gelegten, und auf dieser Geraden senkrecht stehenden Ebene:

$$(x-x'')+a.(y-y'')+a_{,}.(z-z'')=0 \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Diese Gleichung für die Ebene wird auch noch dann statt haben, wenn die Gerade, auf der sie senkrecht stehen soll, nicht durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht, und wenn überhaupt ihre Gleichungen sind:

$$\left.\begin{array}{l} y=a\,x+b \\ z=a_{,}x+b_{,} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

Die Gleichung (3) ist, so wie die Art. 84 Gl. (1) in der analytischen Geometrie ebenfalls von grosser Wichtigkeit. Sie ist nemlich die gemeinschaftliche Form der Gleichungen aller derjenigen Ebenen, welche durch den Punkt des Raumes gehen, dessen Coordinaten $x'y'z'$ sind. Um die Lage einer solchen Ebene zu bestimmen, hat man ausser dieser noch zwei Bedingungen nöthig, woraus man die für ABC annehmbaren Werthe finden kann. Alle diese Ebenen, welche durch den gemeinschaftlichen Punkt m' gehen, unterscheiden sich also von einander bloss durch die Verschiedenheit der beiden Verhältnisse $\frac{A}{C}, \frac{B}{C}$.

122. Wir wollen itzt die Lage einer Ebene, welche durch einen gegebenen Punkt des Raumes gehen soll, auf die Art bestimmen, dass man die Lage einer Geraden im Raume mittelst

ihrer Gleichungen giebt, und die Bedingung festsetzt, dass die Ebene durch diese Gerade gelegt werden soll.

Es seyen nun $x'y'z'$ die Coordinaten des gegebenen Punktes, durch welche die Ebene gelegt wird, also:

$$A.(x-x')+B.(y-y')+C.(z-z') = 0 \quad . \quad . \quad (a)$$

die Gleichung dieser Ebene. Ferner seyen

$$\left.\begin{array}{l} y = ax+b\,; \\ z = a_{,}x+b_{,}\,; \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

die Gleichungen der gegebenen Geraden des Raumes, durch welche die Ebene gehen soll. Es wird nun, um die Gleichung dieser Ebene zu finden, nothwendig seyn, die für ABC annehmbaren Werthe aus dieser Bedingung in Funktionen der gegebenen Grössen $aa_{,}bb_{,}$ auszudrücken. Weil alle Punkte der gegebenen in der gesuchten Ebene liegen sollen, so müssen die Werthe der Coordinaten y und z für jeden Werth von x die Gleichung (a) identisch machen. Setzt man sie also in die Gleichung (a); so erhält man:

$$A.(x-x')+B.(ax+b-y')+C.(a_{,}x+b_{,}-z') = 0,$$

oder $(A+B.a+C.a_{,}).x-\{Ax'+B(y'-b)+C.(z'-b')\} = 0.$

Weil diese Gleichung für jeden Werth von x identisch werden soll, so muss sowohl der von x abhängige als unabhängige Theil, und zwar jeder für sich verschwinden; es folgt also, dass man für ABC solche Werthe anzunehmen hat, dass

$$\left.\begin{array}{r} A+B.a+C.a_{,} = 0\,; \\ A.x'+B(y'-b)+C.(z'-b) = 0\,; \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

Diese zwei Gleichungen sind hinreichend, um aus ihnen die Verhältnisse $\frac{A}{C}$, $\frac{B}{C}$ zu finden; die Auflösung zeigt, dass:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{A}{C} = \left\{\dfrac{a.(z'-b_{,})-a_{,}.(y'-b)}{y'-ax'-b}\right\}; \\ \dfrac{B}{C} = -\left\{\dfrac{z'-a_{,}x-b_{,}}{y'-ax'-b}\right\}; \end{array}\right\}$$

Die für ABC annehmbaren Werthe werden also seyn:

$$\left.\begin{aligned} A &= \{a.(z'-b_{,})-a_{,}(y'-b)\}; \\ B &= -\{z'-a_{,}x'-b_{,}\}; \\ C &= +\{y'-ax'-b\}; \end{aligned}\right\} \quad \ldots, \quad (1)$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung (q), so findet man die gesuchte Gleichung der Ebene:

$$(x-x')\{a(z'-b_{,})-a_{,}(y'-b)\}-(y-y')\{z'-a_{,}x'-b_{,}\}$$
$$+(z-z')\{y'-ax'-b\} = 0 \,. \quad (2)$$

Die Entwicklung dieser Gleichung zeigt, dass:

$$D = \{b.z'-b_{,}.y'+(ab_{,}-a_{,}b).x'\} \quad \ldots \quad (3)$$

Setzt man diese Werthe von $ABCD$ in die allgemeinen Ausdrücke, welche wir Art. 110. u. s. f. entwickelt haben; so wird man dieselben in Funktionen der gegebenen Stücke $aa_{,}bb_{,}$ und $x'y'z'$ erhalten. So z. B. findet man die Winkel, welche die Knotenlinien dieser Ebene mit den coordinirten Achsen machen, durch die Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} \text{tg.}(z.x) &= \left\{\frac{a.(z'-b_{,})-a_{,}.(y'-b)}{z'-a_{,}.x'-b_{,}}\right\}; \\ \text{tg.}(y.x) &= -\left\{\frac{a.(z'-b_{,})-a_{,}.(y'-b)}{y'-ax'-b}\right\}; \\ \text{tg.}(x.y) &= -\left\{\frac{z'-a_{,}x'-b_{,}}{y'-a\,x'-b}\right\}; \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (4)$$

Die Entfernungen der Punkte, in welchen die coordinirten Achsen von dieser Ebene geschnitten werden, vom Anfangspunkte der Coordinaten werden ferner durch nachstehende Ausdrücke gegeben:

$$\left.\begin{aligned} f &= -\left[\frac{b.z'-b_{,}.y'+(a.b_{,}-a_{,}.b)\,x'}{a.z'-a_{,}.y'-(a.b_{,}-a_{,}.b)}\right]; \\ f_{,} &= +\left[\frac{b.z'-b_{,}.y'+(a.b_{,}-a_{,}.b)\,x'}{z'-a_{,}.x'-b_{,}}\right], \\ f_{,,} &= -\left[\frac{b.z'-b_{,}.y'+(a.b_{,}-a_{,}.b)\,x'}{y'-ax'-b}\right]; \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (5)$$

123. Wenn die Lage der Geraden, durch welche die Ebene gelegt werden soll, durch zwei Punkte des Raumes bestimmt wird, durch welche sie gehen soll, deren Coordinaten

$x''y''z''$ und $x'''y'''z'''$ sind; oder wenn aa_ibb_i in Funktionen von diesen Grössen gegeben werden, so dass:

$$\left.\begin{array}{ll} a=\left(\dfrac{y'''-y''}{x'''-x''}\right); & a_i=\left(\dfrac{z'''-z''}{x'''-x''}\right); \\ b=\left(\dfrac{x'''y''-x''y'''}{x'''-x''}\right); & b_i=\left(\dfrac{x'''z''-x''z'''}{x'''-x''}\right); \end{array}\right\} \quad . \quad (1)$$

und man setzt diese Ausdrücke in die Gleichungen (1) (3) des vorigen Art.; so wird man die Grössen $ABCD$ in Funktionen der neun Coordinaten $x'y'z'$, $x''y''z''$, $x'''y'''z'''$ erhalten. Die Lage dieser Ebene wird also durch die Lage dreier Punkte bestimmt, durch welche sie gehen soll.

Die für $ABCD$ in diesem Falle annehmbaren Werthe können auch unmittelbar aus diesen drei Bedingungen gefunden werden, indem man sie analytisch durch Gleichungen ausdrückt, und die Gleichungen auflösst. Ist also

$$Ax+By+Cz+D=0$$

die Gleichung der Ebene, welche durch die gegebenen drei Punkte gehen soll; so folgt hieraus, dass diese Gleichung in folgenden drei Fällen identisch werden soll:

wenn $x=x'$, $y=y'$, $z=z'$, gesetzt wird;
. . $x=x''$, $y=y''$, $z=z''$;
. . $x=x'''$, $y=y'''$, $z=z'''$;

Diese Bedingungen geben nun nachstehende Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} A.x'+B.y'+C.z'+D=0; \\ A.x''+B.y''+C.z''+D=0; \\ A.x'''+B.y'''+C.z'''+D=0; \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

Zieht man die erste von der zweiten und dritten ab; so hat man;

$$\left.\begin{array}{l} A.(x''-x')+B.(y''-y')+C.(z''-z')=0; \\ A.(x'''-x')+B.(y'''-y')+C.(z'''-z')=0; \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (b)$$

Aus diesen zwei Gleichungen lassen sich die für ABC annehmbaren Werthe, und hierauf aus einer der Gleichungen (a) noch der Werth für D finden. Man mag nun die Entwicklung dieser Ausdrücke für $ABCD$ auf diese oder auf die vorgenannte Art vornehmen; in beiden Fällen findet man ABC die Funktionen:

$$\left.\begin{aligned} A &= \tfrac{1}{2}.\{(y'''z'-y'z''')+(y''z'''-y'''z'')+(y'z''-y''z')\}; \\ B &= \tfrac{1}{2}.\{(x'z'''-x'''z')+(x'''z''-x''z''')+(x''z'-x'z'')\}; \\ C &= \tfrac{1}{2}.\{(x'''y'-x'y''')+(x''y'''-x'''y'')+(x'y''-x''y')\}; \end{aligned}\right\} . \quad (1)$$

Für die Grösse D findet man den Ausdruck:

$$D = \{x'''y''z'+x'y'''z''+x''y'z'''-x''y'''z'-x'''y''z'-x'y''z'''\},$$

und dieser kann noch durch mancherlei Formen dargestellt werden, als:

$$\left.\begin{aligned} D &= -\tfrac{1}{2}\{x'.(y''z'''-y'''z'')+x''.(y'''z'-y'z''')+x'''.(y'z''-y''z')\} \\ D &= -\tfrac{1}{2}\{y'.(x'''z''-x''z''')+y''.(x'z'''-x'''z')+y'''.(x''z'-x'z'')\} \\ D &= -\tfrac{1}{2}\{z'.(x''y'-x'''y'')+z''.(x'''y'-x'y''')+z'''.(x'y''-x''y')\} \end{aligned}\right\} (2)$$

Oder auch noch:

$$\left.\begin{aligned} D &= -\tfrac{1}{2}\{x'.(y''z'''-y'''z'')+y'.(x'''z''-x''z''')+z'.(x''y'''-x'''y'')\} \\ D &= -\tfrac{1}{2}\{x''.(y'''z'-y'z''')+y''.(x'z'''-x'''z')+z''.(x'''y'-x'y''')\} \\ D &= -\tfrac{1}{2}\{x'''.(y'z''-y''z')+y'''.(x''z'-x'z'')+z'''.(x'y''-x''y')\} \end{aligned}\right\} (3)$$

Wenn man auf das Rücksicht nimmt, was Art. 54 gesagt worden ist; so wird man leicht die Bedeutung dieser Ausdrücke $ABCD$ im Raume finden. Bedient man sich nemlich der dortigen Bezeichnungsart der Projektionen der Dreiecke in den coordinirten Ebenen durch $k_{,}k_{,,}k_{,,,}$ u. s. w.; so lassen sich $ABCD$ auf folgende Weise ausdrücken:

$$\left.\begin{aligned} A &= \{k''_{,,}-k''_{,}+k''_{,,,}\}; \\ B &= \{-k'_{,,}+k'_{,}+k'_{,,,}\}; \\ C &= \{k_{,,}+k_{,}-k_{,,,}\}; \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; (4)$$

$$\left.\begin{aligned} D &= \{-k''_{,,}.x'+k''_{,}.x''-k''_{,,,}.x'''\}; \\ D &= \{+k'_{,,}.y'-k'_{,}.y''-k'_{,,,}.y'''\}; \\ D &= \{-k_{,,}.z'-k_{,}.z''+k_{,,,}.z'''\}; \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (5)$$

Oder endlich:

$$\left.\begin{aligned} D &= \{-k''_{,,}.x'+k'_{,,}.y'-k_{,,}.z'\}; \\ D &= \{+k''_{,}.x''-k'_{,}.y''-k_{,}.z''\}; \\ D &= \{-k''_{,,,}.x'''-k'_{,,,}.y'''+k_{,,,}.z'''\}; \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (6)$$

Nun sind die in den Gl. (4) innerhalb der Klammern sich befindlichen Ausdrücke genau diejenigen, welche Art. 54 Gl. (1) stehen, es ist also:

$$A = k'', \quad B = k', \quad C = k \quad . \; . \; . \; . \; (7)$$

Hieraus geht nun die sehr merkwürdige Folge hervor, *dass die Coëffizienten ABC der Gleichung einer Ebene, welche durch die drei Punkte m', m'', m''' gelegt wird, im allgemeinen in eben denselben Verhältnissen zu einander stehen, wie die Projektionen des Dreiecks m'm''m'' in den coordinirten Ebenen yz, xz, xy.*

Setzt man $\sqrt{A^2+B^2+C^2}=K=\sqrt{k^2+k'^2+k''^2}$, so findet man, mittelst der im Art. 54 Gl. (5) gefundenen Formeln, genau dieselben Ausdrücke, wie Art. 54 Gl. (3), wo $\vartheta=(I.xy)$, $\vartheta'=(I.xz)$, $\vartheta''=(I.yz)$.

Bringt man nun anstatt *ABCD* diese Ausdrücke in die Formeln, welche Art. 110 u. s. w. entwickelt wurden; so wird man sie in Funktionen der gegebenen Stücke $x'y'z'\,x''$ u. s. w. erhalten.

So z. B. geben die Gl. (1) Art. 110:

$$\text{tg.}(z.x)=-\frac{k''}{k'};\ \text{tg.}(y.x)=-\frac{k''}{k};\ \text{tg.}(x.z)=\frac{k}{k''}\ \ldots\ (8)$$

Die Gleichungen (1) Art. 111 geben für die Entfernungen der Durchschnittspunkte der Ebene $m'm''m'''$ mit den Achsen vom Anfange der Coordinaten:

$$f=-\frac{D}{k''};\ f_{,}=-\frac{D}{k'};\ f_{,,}=-\frac{D}{k};\ \Big\}\ \ldots\ (9)$$

Die Gl. (4) Art. 111 geben für die Entfernungen dieser Durchschnittspunkte von einander:

$$\left.\begin{aligned} h&=\frac{-D.\sqrt{k^2+k'^2}}{k.k'};\\ h_{,}&=\frac{-D.\sqrt{k^2+k''^2}}{k.k''};\\ h_{,,}&=\frac{-D.\sqrt{k'^2+k''^2}}{k'.k''};\end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots\ (10)$$

Die Gl. (5) giebt für die Fläche des Dreieckes, das diese drei Seiten bilden:

$$F=\frac{D^2\,K}{2.\,k.k'.k''}\ \ldots\ldots\ (11)$$

Die Gl. (4) Art. 112. geben ferner:

$$\left.\begin{aligned} \text{tg.}(y.z) &= \frac{k''}{k.k'}\,.\,K; \\ \text{tg.}(x.z) &= \frac{k'}{k.k''}\,.\,K; \\ \text{tg.}(x.y) &= \frac{k}{k'.k''}\,.\,K; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

Die Gleichungen (1) Art. 113 geben für die Längen der Lothe, welche vom Anfangspunkte der Coordinaten auf die Knotenlinien der Ebene $m'm''m'''$ in den Ebenen yz, xz, xy gefällt werden,

$$l = \frac{-D.}{\sqrt{k^2+k'^2}};\; l_{,} = \frac{-D.}{\sqrt{k^2+k''^2}};\; l_{,,} = \frac{-D.}{\sqrt{k'^2+k''^2}}; \quad \} \; (13)$$

124. Wir haben itzt noch die Bedeutung der Grösse D anzugeben. Vergleicht man den letzten Ausdruck in den Gl. (3) des vorigen Art. mit demjenigen, welcher Art. 55 Gl. (1) steht; so sieht man alsogleich, dass $-D$ nichts anders ist, als der Inhalt $\frac{1}{2}J$ des Parallelepipedes, das zwischen dem Anfangspunkte und den drei gegebenen Punkten $m'm''m'''$ liegt.

Werden nun für $ABCD$ gefundenen Werthe in der Gleichung der Ebene substituirt; so erhält man:

$$k''.x+k'.y+k.z = \tfrac{1}{2}J \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Bemerkt man, dass sich das Parallelepiped J in zwei gleiche Pyramiden zertheilen lässt, nemlich durch die Diagonal-Ebene $m'm''m'''$, so dass die eine Pyramide den Scheitel in A, und zur Basis das Dreieck $m'm''m''' = K$ hat, so ist, wenn man Π den körperlichen Inhalt dieser Pyramide nennt:

$$\Pi = \tfrac{1}{2}J.$$

Die Gleichung der Ebene $m'm''m'''$ wird nun werden:

$$\tfrac{1}{3}.k''.x+\tfrac{1}{3}.k'.y+\tfrac{1}{3}.k.z = \Pi \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Diese Gleichung enthält nun eine sehr merkwürdige Eigenschaft aller Punkte der Ebene $m'm''m'''$, die, in Worten ausgedrückt, folgendermassen lautet:

Wenn man auf was immer für einer Ebene ein Dreieck K annimmt, und dasselbe auf die drei coordinirten Ebenen proji-

zirt, so wird die Summe der körperlichen Inhalte der drei Pyramiden, deren Scheitel irgend ein willkührlicher Punkt jener Ebene, und deren Basis jene drei projizirten Dreiecke sind, dem körperlichen Inhalte der Pyramide gleich seyn, deren Scheitel im Anfangspunkte liegt, und deren Basis das Dreieck K in der gegebenen Ebene ist.

Setzt man itzt:

$$-D = \Pi$$

in die Gleichungen (9) (10) (11) (13); so findet man daraus folgende merkwürdige Relationen:

$$\left.\begin{aligned} f &= \frac{\Pi}{k''}, \\ f_{,} &= \frac{\Pi}{k'}, \\ f_{,,} &= \frac{\Pi}{k}, \end{aligned}\right\} \ldots (3);\quad \left.\begin{aligned} h &= \frac{\Pi.\sqrt{k^2+k'^2}}{k.k'}, \\ h_{,} &= \frac{\Pi.\sqrt{k^2+k''^2}}{k.k''}, \\ h_{,,} &= \frac{\Pi.\sqrt{k'^2+k''^2}}{k'.k''}, \end{aligned}\right\} \ldots (4)$$

$$F = \left(\frac{\Pi^2.K}{2.k.k'.k''}\right) \ldots\ldots (5)$$

$$l = \frac{\Pi}{\sqrt{k^2+k'^2}};\quad l_{,} = \frac{\Pi}{\sqrt{k^2+k''^2}};\quad l_{,,} = \frac{\Pi}{\sqrt{k'^2+k''^2}}; \ldots (6)$$

Diese Gleichungen enthalten e[illegible] merkwürdige Sätze. Unter andern giebt die Verbindung der Gleichungen (4) (6):

$$h = \frac{\Pi^2}{k.k'.l};\quad h_{,} = \frac{\Pi^2}{k.k''.l_{,}};\quad h_{,,} = \frac{\Pi^2}{k'.k''.l_{,,}}; \ldots (7)$$

Wenn man vom Anfangspunkte der Coordinaten auf die Ebene $m'm''m'''$ ein Loth fällt, und die Länge desselben mit E bezeichnet; so ist, wie bekannt:

$$\tfrac{1}{3}.K.E = \Pi \quad \text{oder}$$

$$E = \frac{-D}{K} = \frac{-D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \ldots\ldots (8)$$

Die Einführung dieser Grösse E in die bisher bereits entwickelten Formeln leiten auf noch manche andere merkwürdige Relationen.

So z. B. geben die Gl. (4) Art. 111:

$$\left.\begin{aligned}
k &= \frac{E.\sqrt{B^2+C^2}.\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{B.C} = \frac{\sin.(I.yz)}{\cos.(I.xy).\cos.(I.xz)} \\
&= E.\,\mathrm{tg.}(\bar{y}.\bar{z}).\,\mathrm{tg.}(I.yz)\,; \\
h_{\prime} &= \frac{E.\sqrt{A^2+C^2}.\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{A.C} = \frac{\sin.(I.xz)}{\cos.(I.xy).\cos.(I.yz)} \\
&= E.\,\mathrm{tg.}(\bar{x}.\bar{z}).\,\mathrm{tg.}(I.xz)\,; \\
h_{\prime\prime} &= \frac{E.\sqrt{A^2+B^2}.\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{A.B} = \frac{\sin.(I.xy)}{\cos.(I.xz).\cos.(I.yz)} \\
&= E.\,\mathrm{tg.}(\bar{x}.\bar{y}).\,\mathrm{tg.}(I.xy).
\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Die Gleichung (5) giebt:

$$F = \tfrac{1}{2}.E^2.\frac{(A^2+B^2+C^2)^{\frac{3}{2}}}{A.B.C}\,; \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

Aus den Gleichungen (4) Art. 112 erhält man ferner:

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{tg.}(\bar{y}.\bar{z}) &= -\frac{A.D}{B.C.E} = \left(\frac{f_{\prime}.f_{\prime\prime}}{f.E.}\right); \\
\mathrm{tg.}(\bar{x}.\bar{z}) &= -\frac{B.D}{A.C.E.} = \left(\frac{f.f_{\prime\prime}}{f_{\prime}.E}\right); \\
\mathrm{tg.}(\bar{x}.\bar{y}) &= -\frac{C.D}{A.B.E.} = \left(\frac{f.f_{\prime}}{f_{\prime\prime}.E}\right);
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (11)$$

Die Gleichungen (1) Art. 113 sind ferner:

$$\left.\begin{aligned}
l &= \frac{E.\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{\sqrt{B^2+C^2}} = \frac{E}{\cos.(I.x)}\,; \text{ oder } E = l.\cos.(E.l) \\
l_{\prime} &= \frac{E.\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{\sqrt{A^2+C^2}} = \frac{E}{\cos.(I.y)}\,; \text{ oder } E = l_{\prime}.\cos.(E.l_{\prime}) \\
l_{\prime\prime} &= \frac{E.\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{E}{\cos.(I.z)}\,; \text{ oder } E = l_{\prime\prime}.\cos.(E.l_{\prime\prime})
\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Diese Gleichungen zeigen, dass E die Projektion von $l\,l_{\prime}$ oder $l_{\prime\prime}$ auf der vom Anfangspunkte der Coordinaten auf die Ebene gefällten Perpendikel ist, ein Satz, der sich schon unmittelbar aus geometrischen Betrachtungen ergiebt.

Die Gleichungen (5) Art. 115 geben:

$$\left.\begin{aligned}\cos.(I.xy) &= \frac{-C.E}{D} = \frac{E}{f_{,,}}, \text{ oder } E = f_{,,}.\cos.(E.f_{,,});\\ \cos.(I.xz) &= \frac{-B.E}{D} = \frac{E}{f_{,}}, \text{ oder } E = f_{,}.\cos.(E.f_{,});\\ \cos.(I.yz) &= \frac{-A.E}{D} = \frac{E}{f}, \text{ oder } E = f.\cos.(E.f);\end{aligned}\right\} . (13)$$

d. i. E ist die Projektion von $ff_{,}$ oder $f_{,,}$ auf dem nemlichen Perpendikel.

Methoden, die Coordinaten des Punktes zu finden, in welchem das Loth, das man vom Anfangspunkte der Coordinaten auf eine Ebene herablässt, diese Ebene trifft. Länge dieses Lothes und seiner Projektionen in den coordinirten Ebenen. Abstand eines Punktes im Raume von einer gegebenen Ebene. Entwicklung noch einiger Sätze aus der Gleichung einer Ebene, welche durch drei gegebene Punkte geht.

125. Wir haben oben Art. 92 u. s. f. eine Methode erklärt, welche dazu gedient hat, die Abstände sowohl des Anfangspunktes der Coordinaten, als auch eines jeden andern Punktes von einer Geraden im Raume zu finden. Wir wollen hier die nemliche Methode anwenden, um die Ausdrücke zu erfahren, durch welche die Coordinaten desjenigen Punktes einer Ebene gegeben werden, in welchem sie von einem aus dem Anfangs- oder einem andern im Raume gegebenen Punkte getroffen wird.

Es sey nun überhaupt:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

die gegebene Gleichung irgend einer Ebene. Sind xyz die Coordinaten irgend eines Punktes m dieser Ebene; so ist seine Entfernung vom Anfangspunkte A der Coordinaten

$$(A.m) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (a)$$

Nun ist für diesen Punkt m:

$$z = -\left\{\frac{A}{C}.x + \frac{B}{C}.y + \frac{D}{C}\right\}; \quad . \; . \; . \; (b)$$

Setzt man diesen Werth von z in den Ausdruck (a); so erhält man:

$$(Am) = \sqrt{\left[x^2\left(1+\frac{A^2}{C^2}\right)+y^2\left(1+\frac{B^2}{C^2}\right)+\frac{2AB}{C^2}.xy\right.}$$
$$\overline{\left.+\frac{2AD}{C^2}.x+\frac{2BD}{C^2}.y+\frac{D^2}{C^2}\right]}; \quad . \quad . \quad . \ (c)$$

Die Grösse unter dem Wurzelzeichen wird am kleinsten, wenn man x und y so annimmt, dass sie den folgenden zwei Gleichungen ein Genüge leisten:

$$\left.\begin{array}{l}\left(1+\frac{A^2}{C^2}\right).x+\frac{A.B}{C^2}.y+\frac{A.D}{C^2}=0;\\ \left(1+\frac{B^2}{C^2}\right).y+\frac{A.B}{C^2}.x+\frac{B.D}{C^2}=0;\end{array}\right\} \quad . \quad . \ (d)$$

Die Entfernung Am ist aber nur damals am kleinsten, wann die Linie Am senkrecht auf der Ebene steht. Die Gleichungen (d) enthalten also die Coordinaten xy desjenigen Punktes der gegebenen Ebene, in welchem sie von dem Perpendikel getroffen wird, das man auf sie vom Anfangspunkte herablässt. Den Werth der Ordinate z findet man, mittelst den aus den Gl. (d) bereits ausgedrückten Werthen xy, aus der Gl. (b). Setzt man hierauf die Werthe dieser drei Coordinaten, welche wir insbesondere mit (x) (y) (z) bezeichnen wollen, in den Ausdruck (a); so erhält man die Länge dieses Lothes selbst.

Zur leichtern Auflösung des Systems der drei Gleichungen, (b) (d), kann bemerkt werden, dass man die Gleichungen (d) mit Hilfe der Gleichung (b) unter folgende Gestalt bringen könne:

$$C(x) = A(z); \quad C(y) = B(z).$$

Und hieraus folgt:

$$\frac{(x)}{(y)} = \frac{A}{B}; \quad (y) = \frac{B}{A}.x.$$

Setzt man diesen Werth von (y) in die eine oder andere der Gleichungen (d), so erhält man, z. B. aus der ersten:

$$(A^2+B^2+C^2).(x)+A.D=0; \quad . \quad . \quad . \ (\alpha)$$

Setzt man aber $(x) = \frac{A}{B} \cdot (y)$ in jene Gleichung; so erhält man:

$$(A^2 + B^2 + C^2).(y) + B.D = 0 \; ; \quad \ldots \quad (\beta)$$

Wird endlich in einer dieser letzten zwei Gleichungen

$$(x) = \frac{A}{C} \cdot (z) \text{ oder } (y) = \frac{B}{C} (z)$$

gesetzt; so erhält man:

$$(A^2 + B^2 + C^2).(z) + C.D = 0 \quad \ldots \ldots \quad (\gamma)$$

Drückt man (x) (y) (z) aus diesen drei Gleichungen (α) (β) (γ) aus, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} (x) &= \frac{-A.D}{A^2 + B^2 + C^2}, \\ (y) &= \frac{-B.D}{A^2 + B^2 + C^2}, \\ (z) &= \frac{-C.D}{A^2 + B^2 + C^2}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

und diese sind die gesuchten Ausdrücke für die Coordinaten desjenigen Punktes der Ebene, in welchem das Perpendikel durch den Anfangspunkt der Coordinaten auf ihr senkrecht steht. Die Lage dieses Lothes, E, ist sodann:

$$E = \sqrt{(x)^2 + (y)^2 + (z)^2} \; ;$$

oder, wenn man hierin die für (x) (y) (z) gefundenen Werthe substituirt:

$$E = \frac{-D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Wird E als bekannt vorausgesetzt, dann lassen sich die Coordinaten (x) (y) (z) durch E ausdrücken; diese Ausdrücke sind:

$$\left.\begin{aligned} (x) &= \frac{A.E}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \\ (y) &= \frac{B.E}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \\ (z) &= \frac{B.E}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

Auf denselben Ausdruck (2) führt noch eine andere sehr einfache Methode, welche in Folgendem besteht.

Wir haben oben Art. 103 Gl. (2) zur Gleichung einer jeden Ebene gefunden:

$$c = x.\cos.(I.yz) + y.\cos.(I.xz) + z.\cos.(I.xy);$$

wo c der Abstand des Anfangspunktes von der Ebene ist.

Aus dieser Gleichung erhält man nun:

$$\left.\begin{aligned} f &= \frac{c}{\cos.(I.yz)} = \frac{c.\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{A}, \\ f_{,} &= \frac{c}{\cos.(I.xz)} = \frac{c.\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{B}, \\ f_{,,} &= \frac{c}{\cos.(I.xy)} = \frac{c.\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{C}, \end{aligned}\right\}$$

Da $\quad f = -\frac{D}{A}; \; f_{,} = -\frac{D}{B}; \; f_{,,} = -\frac{D}{C};$

so giebt jede dieser drei Gleichungen:

$$c.\sqrt{A^2+B^2+C^2} = -D;$$

und wenn man E anstatt c schreibt:

$$E = \frac{-D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Die Gleichung (3) Art. 103 enthält noch einen andern Ausdruck für dieses Loth E, es ist nemlich:

$$E = \{x.\sin.(I.x) + y.\sin.(I.y) + z.\sin.(I.z)\} \quad . \quad . \quad (4)$$

Um die Bedeutung dieses Ausdruckes einzusehen, bemerke man Folgendes: Wenn man von irgend einem Punkte m der gegebenen Ebene auf die coordinirte Ebene xy ein Loth mn fällt, so ist $mn = z$. Fällt man vom Punkte n der Ebene xy ein Perpendikel wieder auf die gegebene Ebene zurück; z. B. np, so dass p der Punkt ist, in welchem die gegebene Ebene von diesem Perpendikel getroffen wird; so ist der Winkel $nmp = (I.z)$. Im rechtwinklichten Dreiecke mnp ist nun das zweite Perpendikel $np = mn.\sin.(nmp) = z.\sin.(I.z)$. Eben so sind $y.\sin.(I.y)$ und $x.\sin.(I.x)$ die Perpendikel, welche

man von den Projektionen des Punktes m in den Ebenen xz und yz auf die gegebene Ebene herablässt.

Die Gleichung (4) zeigt also an, dass die Summe der drei Lothe, welche von den Projektionen was immer für eines Punktes einer gegebenen Ebene auf diese Ebene herabgelassen werden, dem Perpendikel gleich ist, welches man von dem Anfangspunkte der Coordinaten gleichfalls auf diese Ebene gefällt hat.

Bei Gelegenheit zeige ich hier noch einen besondern Satz an, den die Gl. (4) enthält. Ist nemlich K der Flächeninhalt irgend eines Dreiecks oder überhaupt irgend einer Figur in der gegebenen Ebene, und man multiplizirt die Gl. (4) auf beiden Seiten mit $\frac{1}{3}.K$; so erhält man:

$$\tfrac{1}{3}.E.K = J = \tfrac{1}{3}.x.K.\sin.(I.x) + \tfrac{1}{3}.y.K.\sin.(I.y) + \tfrac{1}{3}.z.K.\sin.(I.z).$$

Diese Gleichung sagt aus: dass die Summe der drei Pyramiden, deren gemeinschaftliche Basis irgend eine Figur in einer gegebenen Ebene ist, und deren Scheitel in den drei Projektionen irgend eines Punktes dieser Ebene auf den coordinirten Ebenen liegen, dem körperlichen Inhalte der einzigen Pyramide gleich sey, welche dieselbe Basis, und zum Scheitel den Anfangspunkt der Coordinaten hat.

Bezeichnet man mit $e\ e_{,}e_{,,}$ die Projektionen des Lothes E in den coordinirten Ebenen, und mit $(E.xy)$, $(E.xz)$, $(E.yz)$ die Winkel, welche E mit diesen Ebenen macht; so ist, wegen:

$$(E.xy) = (I.z);\ (E.xz) = (I.y);\ (E.yz) = (I.x);$$

$$\left.\begin{aligned} e &= E.\cos.(E.xy) = \frac{-D.\sqrt{A^2+B^2}}{A^2+B^2+C^2}, \\ e_{,} &= E.\cos.(E.xz) = \frac{-D.\sqrt{A^2+C^2}}{A^2+B^2+C^2}, \\ e_{,,} &= E.\cos.(E.yz) = \frac{-D.\sqrt{B^2+C^2}}{A^2+B^2+C^2}, \end{aligned}\right\} \quad .\ .\ (5)$$

Verbindet man mit diesen Gleichungen die Gl. (1) Art. 113; so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} e &= \frac{D^2}{(A^2+B^2+C^2).l}; \text{ oder } e.\,l = \frac{D^2}{A^2+B^2+C^2} = E^2, \\ e_{,} &= \frac{D^2}{(A^2+B^2+C^2).l_{,}}; \ldots e_{,}.l_{,} = \frac{D^2}{A^2+B^2+C^2} = E^2, \\ e_{,,} &= \frac{D^2}{(A^2+B^2+C^2).l_{,,}}; \ldots e_{,,}.l_{,,} = \frac{D^2}{A^2+B^2+C^2} = E^2, \end{aligned}\right\} (6)$$

d. h. das Produkt aus der Projektion eines von irgend einem Punkte herabgelassenen Perpendikels, in was immer für einer andern Ebene, und aus dem Perpendikel, das von diesem Punkte auf die Durchschnittslinie der beiden Ebenen herabgelassen wird, ist stets einer beständigen Grösse gleich, und zwar dem Quadrate des Perpendikels vom fixen Punkte auf die eine Ebene. Der fixe Punkt muss in der zweiten Ebene liegen, auf welche dieses Perpendikel projizirt wird.

Die Coordinaten des Durchschnittspunktes des Lothes, vom Anfangspunkte auf eine gegebene Ebene, mit ihr, kann man endlich noch durch folgende Ausdrücke geben:

$$(x) = -\frac{A.E^2}{D}; \ (y) = -\frac{B.E^2}{D}; \ (z) = -\frac{C.E^2}{D}.$$

Die Einführung dieser Coordinaten in die allgemeinen Ausdrücke, die wir oben Art. 110 etc. entwickelt haben, bringt neue merkwürdige Relationen zum Vorschein, deren Entwicklung dem Leser überlassen wird.

126. Wenn das Loth aus irgend einem gegebenen Punkte des Raumes auf eine Ebene herabgelassen wird; so findet man die Länge desselben nach eben dieser Methode. Wir suchen nun zuerst die Coordinaten des Punktes, in welchem das Loth diese Ebene treffe. Es sey wieder

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

die gegebene Gleichung einer Ebene, und xyz die Coordinaten irgend eines Punktes m in der gegebenen Ebene; so wie $x_{,}y_{,}z_{,}$ die Coordinaten eines andern gegebenen Punktes $m_{,}$ ausserhalb der Ebene. Die Entfernung dieser zwei Punkte von einander ist:

$$mm_{,} = \sqrt{\{(x-x_{,})^2 + (y-y_{,})^2 + (z-z_{,})^2\}}, \quad . \ . \ (a)$$

oder weil der Punkt m in der gegebenen Ebene liegen soll, so hat man, wegen:

$$z = -\left(\frac{A}{C}.x + \frac{B}{C}.y + \frac{D}{C}\right) \quad . \; . \; . \quad (b)$$

wenn man diesen Werth von z in (a) substituirt:

$$mm' = \sqrt{\left\{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + \frac{(Ax+By+D+Cz_i)^2}{C^2}\right\}};$$

oder,

$$mm' = \frac{1}{C}.\sqrt{\{(Cx-Cx_i)^2 + (Cy-Cy_i)^2 + (Ax+By+Cz_i+D)^2\}}$$

Entwickelt man die Grösse unter dem Wurzelzeichen; so findet man:

$$mm' = \frac{1}{C}.\sqrt{\left\{(A^2+C^2)x^2 + (B^2+C^2).\ y^2 + 2AxBy \right.}$$
$$+2.(BD+BCz_i-C^2y_i)y + 2(AD+ACz_i-C^2x_i)x$$
$$\left. + C^2x_i^2 + C^2y_i^2 + (D+Cz_i)^2\right\}$$

Der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen wird nun damals am kleinsten, wenn man für xy solche Werthe annimmt, die nachstehenden zwei Gleichungen ein Genüge leisten:

$$\left.\begin{aligned}(A^2+C^2).x + A.B.y + A.D + ACz_i - C^2x_i &= 0,\\ (B^2+C^2).y + A.B.x + B.D + BCz_i - C^2y_i &= 0,\end{aligned}\right\} \quad (c)$$

Nun wird diese Länge mm_i nur dann am kleinsten, wenn diese Linie senkrecht auf der Ebene steht. Die Werthe von x und y aus den zwei Gleichungen (c), mit welchen man hierauf aus (b) den Werth von z findet, sind also zugleich die Werthe für die Coordinaten des Durchschnittspunktes dieser Senkrechten mit der gegebenen Ebene.

Verbindet man die Gleichung (b) vorerst mit jeder der Gleichungen (c); so findet man sehr leicht aus ihnen nachstehende zwei:

$$\left.\begin{aligned}A.(z-z_i) &= C.(x-x_i),\\ B.(z-z_i) &= C.(y-y_i);\end{aligned}\right\}$$

oder:

$$\left.\begin{aligned}(y-y_i) &= \frac{B}{A}.(x-x_i);\\ (z-z_i) &= \frac{C}{A}.(x-x_i);\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (d)$$

Setzt man nun aus diesen Gleichungen:

$$(x-x_{,})=\frac{A}{C}(z-z_{,});\ (y-y_{,})=\frac{B}{C}(z-z_{,});$$

in dem allgemeinen Ausdrücke (a); so erhält man:

$$mm_{,}=(z-z_{,})\cdot\sqrt{\left(\frac{A^2}{C^2}+\frac{B^2}{C^2}+1\right)}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{oder} & mm_{,}=\left(\frac{z-z_{,}}{C}\right)\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2};\\ \text{oder} & mm_{,}=\left(\frac{y-y_{,}}{B}\right)\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2};\\ \text{oder endlich} & mm_{,}=\left(\frac{x-x_{,}}{A}\right)\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2};\end{array}\right\}\ \ldots\ (e)$$

Verbindet man die Gleichungen (d) mit der Gleichung (b) so erhält man ein System von drei Gleichungen, aus denen man die drei Grössen $x\,y\,z$, welche wir zum Unterschiede der Coordinaten aller andern Punkte mit $(x)_{,}$ $(y)_{,}$ $(z)_{,}$ bezeichnen wollen, wird bestimmen können. Man findet:

$$\left.\begin{array}{l}(x)_{,}-x_{,}=-A\cdot\left(\frac{Ax_{,}+By_{,}+Cz_{,}+D}{A^2+B^2+C^2}\right);\\ (y)_{,}-y_{,}=-B\cdot\left(\frac{Ax_{,}+By_{,}+Cz_{,}+D}{A^2+B^2+C^2}\right);\\ (z)_{,}-z_{,}=-C\cdot\left(\frac{Ax_{,}+By_{,}+Cz_{,}+D}{A^2+B^2+C^2}\right);\end{array}\right\}\ \ldots\ (1)$$

Setzt man diese Werthe in die Gl. (e); so findet man aus jeder derselben die Länge des Lothes $E_{,}$:

$$E_{,}=-\frac{Ax_{,}+By_{,}+Cz_{,}+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\ \ldots\ (2)$$

Folgende sehr einfache Betrachtung führt unmittelbar auf eben diesen Ausdruck. Denkt man sich durch den Punkt $m_{,}$ eine zur gegebenen parallele Ebene gelegt; so ist ihre Gleichung:

$$A\cdot(x-x_{,})+B\cdot(y-y_{,})+C\cdot(z-z_{,})=0.$$

Wenn man vom Anfangspunkte auf die zwei parallele Ebenen Perpendikel herablässt; so ist der Abstand beider Ebenen

von einander gleich dem Unterschiede der beiden Perpendikel; nun ist die Länge des Perpendikels, das vom Anfangspunkte

auf die gegebene Ebene } herabgelassen wird $= \frac{-D}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}}$;

auf die durch $m_{,}$ gelegte Ebene } herabgelassen wird $= +\frac{Ax_{,}+By_{,}+Cz_{,}}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}}$;

Der Unterschied dieser beiden Perpendikel, d. i.

$$\frac{-(Ax_{,}+By_{,}+Cz_{,}+D)}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}},$$

wird der Abstand der beiden parallelen Ebenen von einander, oder die Länge des Lothes seyn, das vom Anfangspunkte auf die gegebene Ebene herabgelassen wird.

Die Gleichungen (d) zeigen offenbar, dass sie für eine Gerade im Raume gehören, welche durch den Punkt $m_{,}$ geht; dabei bemerke ich noch, dass sie zugleich für diejenige Gerade gehören, welche auf der Ebene senkrecht steht, deren Gleichung ist:

$$Ax+By+Cz+D = 0$$

Dieses lässt sich sehr leicht daraus einsehen, weil diese Gerade, welche wir die Linie 1 nennen wollen, mit den coordinirten Achsen $x\,y\,z$ dieselben Winkel macht, als die Ebene I mit den coordinirten Ebenen yz, xz, xy; es ist also:

$$(1.x) = (I.yz);\ (1.y) = (I.xz);\ (1.z) = (I.xy).$$

Nun sind die Gleichungen einer jeden Geraden, welche durch den Punkt $(x_{,}y_{,}z_{,})$ geht,

$$\left.\begin{aligned} (y-y_{,}) &= \frac{\cos.(1.y)}{\cos.(1.x)}.(x-x_{,}) \\ (z-z_{,}) &= \frac{\cos.(1.z)}{\cos.(1.x)}.(x-x_{,}) \end{aligned}\right\}$$

und da

$$\left.\begin{aligned} \frac{\cos.(1.y)}{\cos.(1.x)} &= \frac{\cos.(I.xz)}{\cos.(I.yz)} = \frac{+B}{A}; \\ \frac{\cos.(1.z)}{\cos.(1.x)} &= \frac{\cos.(I.xy)}{\cos.(I.yz)} = \frac{+C}{A}; \end{aligned}\right\}$$

so werden die Gleichungen der durch $m_{,}$ gehenden, und auf der Ebene I senkrechten Geraden seyn:

$$\left.\begin{aligned} y-y_1 &= \frac{B}{A}(x-x_1); \\ z-z_1 &= \frac{C}{A}(x-x_1); \end{aligned}\right\}$$

Es ist auch leicht begreiflich, warum man diese zwei Gleichungen mit der Gleichung (b) für die Ebene zu verbinden hat, und aus ihnen die Werthe des Durchschnittspunktes des Lothes mit der Ebene erhält; denn dieser Durchschnittspunkt liegt sowohl in der Ebene, als auch in der in Rede stehenden Geraden; seine Coordinaten müssen also die Beschaffenheit haben, dass sie sowohl der Gleichung der Ebene, als auch den Gleichungen jener Geraden ein Genüge leisten.

127. Soll itzt der Abstand des Anfangspunktes der Coordinaten, oder irgend eines andern Punktes m_1 im Raume von einer Ebene bestimmt werden, deren Lage durch gewisse Bedingungen bestimmt wird; so suche man zuerst die Gleichung dieser Ebene, oder was dasselbe ist, man drücke $ABCD$ in Funktionen der in den Bedingungen gegebenen Stücke aus, und setze sie in die allgemeinen Ausdrücke, welche wir in den vorhergehenden zwei Art. für die Längen dieser Lothe gefunden haben. Wird z. B. die Lage der Ebene auf die Art bestimmt, wie Art. 120 durch die Stücke $c\eta\vartheta$; so ist

$A = +\sin.\vartheta.\cos.\eta$; $B = -\sin.\vartheta.\sin.\eta$; $C = +\cos.\vartheta$; $D = -c.\sin.\vartheta.\cos.\eta$;

dann hat man, wenn ein Loth aus dem Anfangspunkte der Coordinaten auf diese so bestimmte Ebene herabgelassen wird,

$$\left.\begin{aligned} (x) &= c.\sin.^2\vartheta.\cos.^2\eta; \\ (y) &= -\tfrac{1}{2}c.\sin.^2\vartheta.\sin.2\eta; \\ (z) &= +\tfrac{1}{2}c.\sin.2\vartheta.\cos.\eta; \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Die Länge des Lothes selbst aber ist:

$$E = +c.\sin.\vartheta.\cos.\eta \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Wird die Lage einer Ebene auf die Art bestimmt, wie Art. 122 gelehrt worden ist; so wird man die Funktionen, welche man daselbst in der Gl. (1) (3) für $ABCD$ gefunden hat, nur in den Ausdrücken substituiren, welche in den vorigen zwei Art. für (x) (y) (z) und E entwickelt worden sind, um eben

diese Stücke in Funktionen der gegebenen Stücke $aa_{,}bb_{,}$ und und $x'y'z'$ auszudrücken.

Unter den mannigfaltigen Bestimmungsarten der Lage einer Ebene wollen wir noch die Art. 123 behandelte betrachten. Die Grössen, welche in diesem Falle $ABCD$ sind, stehen daselbst in den Gl. (7), und im Art. 124. Man hat also:

$$A = k''; \; B = k'; \; C = k; \; -D = \tfrac{1}{2}J;$$

folglich:

$$(x) = \frac{k''^2 J}{2K^2}; \; (y) = \frac{k'^2 J}{2K^2}; \; (z) = \frac{k^2 J}{2K}; \Big\} \quad . \quad . \; (3)$$

$$E = \frac{J}{2K} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

Diese Ausdrücke für (x) (y) (z) und E geben die Coordinaten des Durchschnittspunktes des Lothes aus dem Anfangspunkte mit der Ebene und die Länge dieses Lothes.

Wird das Loth auf die Ebene $m'm''m''$ aus einem ausserhalb ihr gegebenen Punkte $m_{,}$ gefällt; so erhält man:

$$\left.\begin{aligned}
(x)_{,} &= x_{,} - \frac{k''}{K^2}.\{k''.x_{,} + k'.y_{,} + k.z_{,} - \tfrac{1}{2}J\} \\
(y)_{,} &= y_{,} - \frac{k'}{K^2}.\{k''.x_{,} + k'.y_{,} + k.z_{,} - \tfrac{1}{2}J\} \\
(z)_{,} &= z_{,} - \frac{k}{K^2}.\{k''.x_{,} + k'.y_{,} + k.z_{,} - \tfrac{1}{2}J\}
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (5)$$

und:

$$E_{,} = \frac{\tfrac{1}{2}J - (k''.x_{,} + k'.y_{,} + k.z_{,})}{K} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (6)$$

Diese Gleichungen enthalten wieder ein paar merkwürdige Sätze der Geometrie.

Verbindet man die Gl. (3) Art. 124 mit den Gl. (3) des gegenwärtigen Art.; so findet man:

$$\left.\begin{aligned}
(x) &= \frac{J^3}{8(f.K)^3} = \left(\frac{f.\;k''^3}{8K^2}\right), \\
(y) &= \frac{J^3}{8(f_{,}.K)^2} = \left(\frac{f_{,}.\;k'^3}{8K^2}\right), \\
(z) &= \frac{J^3}{8(f_{,,}.K)^2} = \left(\frac{f_{,,}.\;k^3}{8K^2}\right),
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; (7)$$

Nennt man den Inhalt der Pyramide, deren Spitze der Anfangspunkt der Coordinaten, und deren Basis das Dreieck $f f_{,} f_{,,}$ ist, Q; so hat man:

$$Q = \tfrac{1}{3} E.F \quad \text{d. i.}$$

$$Q = \tfrac{1}{3}.E.\frac{D^2.\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{2.A.B.C} = \tfrac{1}{6}.E.K\frac{D^2}{A.B.C},$$

also: $$Q = -\frac{1}{6.8}.\frac{J^3}{A.B.C} = -\frac{1}{6.8}.\frac{J^3}{k.k'.k''} \quad \ldots (8)$$

oder auch: $$Q = +\tfrac{1}{6}.f.f_{,}.f_{,,} \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

Die Einführung dieser neuen Grösse unter unsern Gleichungen erzeugt neue, unter andern zuweilen sehr merkwürdige Relationen. So z. B. werden die Ausdrücke (2) Art. 116

$$\left.\begin{aligned} \text{tg.}(I.xy) &= -\frac{f_{,,}^2.h_{,,}}{6.Q}; \\ \text{tg.}(I.xz) &= -\frac{f_{,}^2.h_{,}}{6.Q}; \\ \text{tg.}(I.yz) &= -\frac{f^2.h}{6.Q}; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (10)$$

Den Ausdruck (9) für Q kann man auch noch auf folgende Art finden: Es sey m' ein Punkt auf der Achse der x m'' ein Punkt auf der Achse der y; m''' ein Punkt auf der Achse der z; und es sey: $x' = f$; $y'' = f_{,}$; $z''' = f_{,,}$; ferner $x'' = 0$, $x''' = 0$; $y' = 0$, $y''' = 0$; $z' = 0$, $z'' = 0$.

Die allgemeinen Gleichungen (1) (2) Art. 123 geben:

$$\left.\begin{aligned} A &= \tfrac{1}{2}y''z''' = \tfrac{1}{2}f_{,}f_{,,}; \\ B &= \tfrac{1}{2}x'z''' = \tfrac{1}{2}f f_{,,}; \\ C &= \tfrac{1}{2}x'y'' = \tfrac{1}{2}f f_{,}; \end{aligned}\right\}$$
$$D = -\tfrac{1}{2}x'y''z''' = -\tfrac{1}{2}f f_{,} f_{,,};$$

Die Gleichung dieser Ebene wird folglich seyn:

$$f_{,}f_{,,}.x + f.f_{,,}.y + f.f_{,}.z = f f_{,} f_{,,}$$

oder $$\frac{x}{f} + \frac{y}{f_{,}} + \frac{z}{f_{,,}} = 1,$$

eine Gleichung, welche wir schon Art. 111 gefunden haben.

Es ist folglich: $$E = \frac{f.f_{,}.f_{,,}}{\sqrt{f^2f_{,}^2 + f^2f_{,,}^2 + f_{,}^2f_{,,}^2}};$$

und weil: $F = \frac{1}{2} . \sqrt{f^2 f_{,}^2 + f^2 f_{,,}^2 + f_{,}^2 f_{,,}^2}$; Art. 111 Gl. (6);
so ist $Q = \frac{1}{3} . E . F = \frac{1}{6} . f . f_{,} . f_{,,}$.

Der Ausdruck (6) für die Länge $E_{,}$ des Lothes, das man von einem Punkte $m_{,}$ auf irgend eine der Lage nach gegebene Ebene herablässt, ist mannigfaltiger Umformungen fähig. Folgende Betrachtungen führen auf eine sehr merkwürdige Form desselben.

Wenn man sich den Punkt $m_{,}$ auf der Achse der x angenommen vorstellt; dann ist, wenn das Perpendikel in diesem Falle E' heisst, wegen $y_{,} = 0$, $z_{,} = 0$,

$$E' = -\left(\frac{Ax_{,} + D}{N}\right) \quad \ldots \ldots \quad (\alpha)$$

wo N der Nenner im Ausdrucke (2) Art. 126 ist.

Nimmt man $m_{,}$ auf der Achse der y an; dann ist $x_{,} = 0$, $z_{,} = 0$, und wenn man die Länge des von diesem Punkte auf die Ebene gefällten Perpendikels E'' nennt; dann hat man:

$$E'' = -\left(\frac{B . y_{,} + D}{N}\right) \quad \ldots \ldots \quad (\beta)$$

Liegt endlich $m_{,}$ auf der Achse der z; so dass $x_{,} = 0$, $y_{,} = 0$, und man nennt die Länge des Perpendikels, so von diesem Punkte der Achse z auf die Ebene gefällt wird, E'''; dann hat man

$$E''' = -\left(\frac{C . z_{,} + D}{N}\right) \quad \ldots \ldots \quad (\gamma)$$

E' E'' E''' sind also drei Perpendikel, welche von drei Punkten, davon jeder auf einer der coordinirten Achsen liegt, auf die gegebene Ebene gefällt werden; addirt man nun die drei Gleichungen (α) (β) (γ); so erhält man:

$$(E' + E'' + E''') = -\frac{Ax_{,} + By_{,} + Cz_{,} + 3.D}{N}$$

d. i. $$(E' + E'' + E''') = + E_{,} - \frac{2.D}{N} \quad \ldots \ldots \quad (\delta)$$

Nun ist $-\frac{D}{N}$ der Abstand des Anfangspunktes der Coordinaten von der nemlichen Ebene; daher hat man:

$$(E'+E''+E''') = E_{\prime} + 2.E$$

oder: $$E_{\prime} = \{(E'+E''+E''')-2.E\} \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Diese Gleichung lehrt also, *dass der Abstand was immer für eines Punktes $m_{\prime}$ im Raume von einer Ebene gleich sey dem Unterschiede aus der Summe der Abstände seiner drei Projektionen auf den coordinirten Achsen, und dem doppelten Abstande des Anfangspunktes der Coordinaten von dieser Ebene.*

Noch eine andere Umformung des Ausdruckes für $E_{\prime}$ lässt sich auf folgende Art erhalten: Man setze $\frac{2.A.B.C.F}{D^2}$ anstatt $\sqrt{A^2+B^2+C^2}$; so erhält man:

$$E_{\prime} = -\frac{D^2}{2F}.\left\{\frac{x_{\prime}}{BC}+\frac{y_{\prime}}{AC}+\frac{z_{\prime}}{AB}+\frac{D}{ABC}\right\} \quad . \quad . \quad (12)$$

Wenn man für ABC die Werthe $ff_{\prime}f_{\prime\prime}$ einführt; so hat man

$$E_{\prime} = -\frac{1}{2F}\{f_{\prime}.f_{\prime\prime}.x_{\prime}+f.f_{\prime\prime}.y_{\prime}+f.f_{\prime}.z_{\prime}-ff_{\prime}f_{\prime\prime}\} \quad . \quad (13)$$

oder $$E_{\prime} = -\frac{ff_{\prime}f_{\prime\prime}}{2F}\left\{\frac{x_{\prime}}{f}+\frac{y_{\prime}}{f_{\prime}}+\frac{z_{\prime}}{f_{\prime\prime}}-1\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Aus dieser letzten Gleichung lässt sich ein sehr merkwürdiger Satz herleiten. Man erhält nemlich

$$\frac{1}{3}.E_{\prime}.F = -\frac{1}{6}.ff_{\prime}f_{\prime\prime}.\left\{\frac{x_{\prime}}{f}+\frac{y_{\prime}}{f_{\prime}}+\frac{z_{\prime}}{f_{\prime\prime}}-1\right\}$$

oder $$P_{\prime} = -Q.\left\{\frac{x_{\prime}}{f}+\frac{y_{\prime}}{f_{\prime}}+\frac{z_{\prime}}{f_{\prime\prime}}-1\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

wo $P_{\prime}$ der Inhalt der Pyramide ist, deren Scheitel im gegebenen Punkte $m_{\prime}$ liegt, und deren Basis das Dreieck F ist. Nennt man itzt die körperlichen Inhalte der Pyramiden, deren gemeinschaftliche Basis die Fläche F ist, und die ihre Scheitel in den Projektions-Punkten des Punktes $m_{\prime}$ auf den coordinirten Achsen haben, $P'P''P'''$; so hat man:

$$\left.\begin{aligned} P' &= -Q.\left\{\frac{x_{\prime}}{f}-1\right\}; \\ P'' &= -Q.\left\{\frac{y_{\prime}}{f_{\prime}}-1\right\}; \\ P''' &= -Q.\left\{\frac{z_{\prime}}{f_{\prime\prime}}-1\right\}; \end{aligned}\right\}$$

Addirt man diese drei Gleichungen; so bekömmt man:

$$(P'+P''+P''') = -Q.\left\{\frac{x_{,}}{f}+\frac{y_{,}}{f_{,}}+\frac{z_{,}}{f_{,,}}-3\right\}$$

d. i. $(P'+P''+P''') = P_{,}+2.Q$;

folglich $P_{,} = \{(P'+P''+P''')-2.Q\}$ (16)

Diese Gleichung ergiebt sich unmittelbar aus der Gleichung (11), wenn man sie mit F multiplizirt.

128. Wenn die Ebene durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht; alsdann ist:

$$D = 0.$$

Die Ausdrücke für die Coordinaten des Punktes, in welchem das aus einem gegebenen Punkte $m_{,}$ auf diese Ebene gefällte Perpendikel dieselbe trifft, und der Abstand dieses Punktes $m_{,}$ von der gegebenen Ebene werden dann:

$$\left.\begin{aligned}(x)_{,} &= \left\{x_{,}-A.\left(\frac{Ax_{,}+By_{,}+Cz_{,}}{A^2+B^2+C^2}\right)\right\}\\(y)_{,} &= \left\{y_{,}-B.\left(\frac{Ax_{,}+By_{,}+Cz_{,}}{A^2+B^2+C^2}\right)\right\}\\(z)_{,} &= \left\{z_{,}-C.\left(\frac{Ax_{,}+By_{,}+Cz_{,}}{A^2+B^2+C^2}\right)\right\}\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (1)$$

$$E_{,} = -\left(\frac{Ax_{,}+By_{,}+Cz_{,}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

Mit Rücksicht auf die Gl. (5) Art. 115 erhält man:

$$E_{,} = -\{x_{,}.\cos.(I.yz)+y_{,}.\cos.(I.xz)+z_{,}.\cos.(I.xy)\}$$

oder $E_{,} = +\{x_{,}.\cos.(E_{,}.x_{,})+y_{,}.\cos.(E_{,}.y_{,})+z_{,}.\cos.(E_{,}.z_{,})\}$. (3)

d. h. der Abstand eines Punktes von einer Ebene, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht, ist gleich der Summe der Projektionen der drei Coordinaten $x_{,}y_{,}z_{,}$ dieses Punktes $m_{,}$ auf der Geraden, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht, und senkrecht auf der Ebene steht: ein Satz der bereits im ersten Capitel erwiesen worden ist, und den wir angewandt haben, um die allgemeine Form der Gleichung einer Ebene zu finden. Aus ihm fliesst unmittelbar die bekannte Gleichung:

$$1 = \cos.^2(E_{,}.x_{,})+\cos.^2(E_{,}.y_{,})+\cos.^2(E_{,}.z_{,});$$

wenn man $x_{\prime} = E_{\prime}.\cos.(E_{\prime}.x_{\prime})$; $y_{\prime} = E_{\prime}.\cos.(E_{\prime}.y_{\prime})$; $z_{\prime} = E_{\prime}.\cos.(E_{\prime}.z_{\prime})$; in diese Gleichung (3) setzt.

Wenn die Ebene dergestalt bestimmt wird, dass man die Gleichungen einer Geraden im Raume giebt, durch welche sie gelegt werden soll; so findet man, wenn

$$\left.\begin{array}{l} y = ax+b \;; \\ z = a_{\prime}x+b_{\prime} \;; \end{array}\right\}$$

die Gleichungen dieser Geraden sind,

$$E_{\prime} = -\left\{\frac{(ab_{\prime}-a_{\prime}b)x_{\prime}-b_{\prime}y_{\prime}+bz_{\prime}}{\sqrt{[(ab_{\prime}-a_{\prime}b)^2+b_{\prime}^2+b^2]}}\right\} \quad . \; . \; . \quad (4)$$

Wenn $b = 0$ ist, dann geht diese Ebene durch die Achse der z; und man hat:

$$E_{\prime} = -\frac{ax_{\prime}-y_{\prime}}{\sqrt{1+a^2}}$$

oder $$E_{\prime} = \left(\frac{y_{\prime}-ax_{\prime}}{\sqrt{1+a^2}}\right);$$

ein Ausdruck, den wir schon im zweiten Capitel gefunden haben. Uiberhaupt lassen sich die Ausdrücke, welche wir daselbst für den Abstand des Anfangspunktes oder irgend eines andern gegebenen Punktes von einer geraden Linie, in einer Ebene oder im Raume, erhalten haben, auch aus dem allgemeinen Ausdrucke, den wir oben für $E_{\prime}$ fanden, entwickeln.

Von den Projektionen der coordinirten Achsen in einer Ebene.

129. Wir wollen itzt die Ebene in einer neuen Beziehung gegen das System der coordinirten Ebenen betrachten, indem wir die Ebene zur Projektions-Ebene der drei coordinirten Achsen annehmen wollen. Werden die Punkte einer jeden der drei coordinirten Achsen in einer Ebene projizirt; so entstehen in dieser Ebene gerade Linien, welche die Projektionen der coordinirten Achsen sind. Da diese letztern in einem einzigen Punkte, dem Anfangspunkte nemlich, zusammen treffen; so

werden auch die Projektionen dieser Achsen in der Ebene in einem einzigen Punkte zusammen stossen, und dieser Punkt ist die Projektion des Anfangspunktes in dieser Ebene. Ferner durchschneiden sich die Projektionen und Achsen in denselben Punkten der Achse, in welchen sie von der Ebene getroffen werden.

Dieses vorausgesetzt, seyen AX, AY, AZ (Fig. 46) die drei rechtwinklichten coordinirten Achsen, und $f\ f_{,}f_{,,}$ die Durchschnitts-Punkte derselben mit der Ebene, deren Gleichung seyn soll:

$$Ax+By+Cz=D=0.$$

Wenn nun AS ein vom Anfangspunkte der Coordinaten auf die Ebene gefälltes Perpendikel ist, das sie im Punkte O trifft; so werden, dem Vorhergehenden zu Folge die gezogenen Geraden Of, $Of_{,}$, $Of_{,,}$ die Projektionen der Achsen in dieser Ebene seyn. Um die Gleichungen dieser drei Geraden zu finden, braucht man nur die allgemeinen Formeln Art. 99 auf den gegenwärtigen Fall anzuwenden. Sind

$$\left.\begin{array}{l} y = ax+b\ ; \\ z = a_{,}x+b_{,}\ ; \end{array}\right\} \ldots\ldots\ (\alpha)$$

die Gleichungen der Geraden Of, und nennt man (x) (y) (z) die Coordinaten des Punktes O; so hat man durch Vergleichung

$$\left.\begin{array}{l} x' = (x)\ ;\ y' = (y)\ ;\ z' = (z)\ ; \\ x'' = f\ ;\ y'' = 0\ ;\ z'' = 0\ ; \end{array}\right\}$$

Setzt diese Werthe in die Gl. (a) (b) Art. 99; so findet man:

$$\left.\begin{array}{l} a = \dfrac{(y)}{(x)-f}\ ;\quad a_{,} = \dfrac{(z)}{(x)-f}\ ; \\ b = \dfrac{-(y).f}{(x)-f}\ ;\quad b_{,} = \dfrac{-(z).f}{(x)-f}\ ; \end{array}\right\}$$

und die Gleichungen der Geraden Of werden seyn:

$$\left.\begin{array}{l} y = \left\{\dfrac{(y)}{(x)-f}\right\}.x - \left\{\dfrac{(y).f}{(x)-f}\right\}\ ; \\ z = \left\{\dfrac{(z)}{(x)-f}\right\}.x - \left\{\dfrac{(z).f}{(x)-f}\right\}\ ; \end{array}\right\} \ldots\ (\beta)$$

Setzt man nun in diesen Gleichungen die für (x) (y) (z) und f bereits gefundenen Werthe, nemlich:

$$(x) = -\frac{A.D}{N}\,;\quad (y) = -\frac{B.D}{N}\,;\quad (z) = -\frac{C.D}{N}\,;$$

wo: $$N = (A^2+B^2+C^2)\,;$$

und $$f = -\frac{D}{A}\,;$$

so werden diese Gleichungen (β) nach gehöriger Reduktion:

$$\left.\begin{aligned} y &= -\left(\frac{A.B}{B^2+C^2}\right).x+\left(\frac{B.D}{B^2+C^2}\right);\\ z &= -\left(\frac{A.C}{B^2+C^2}\right).x+\left(\frac{C.D}{B^2+C^2}\right);\end{aligned}\right\}\quad .\ .\ (1)$$

Auf ähnliche Art hat man für die Gerade $Of_{,}$:

$x' = (x)$; $y' = (y)$; $z' = (z)$; $x'' = 0$; $y'' = f_{,}$; $z'' = 0$;

ihre Gleichungen sind daher:

$$y = \frac{(y)-f_{,}}{(x)}+f_{,}\,;\quad z = \frac{(z)}{(x)}.x\quad .\ .\ .\ .\ (\beta')$$

Setzt man darin die gehörigen Werthe für (x) (y) (z) $f_{,}$; so reduziren sich diese Gleichungen auf folgende:

$$y = -\left(\frac{A^2+C^2}{A.B}\right).x-\frac{D}{B}\,;\quad z = \frac{C}{A}.x\quad .\ .\ (2)$$

Endlich hat man für die Gerade $Of_{,}$:

$x' = (x)$; $y' = (y)$; $z' = (z)$; $x'' = 0$, $y'' = 0$, $z'' = f_{,,}$;

ihre Gleichungen sind folglich:

$$y = \frac{(y)}{(x)}.x\,;\quad z = \frac{(z)-f_{,}}{(x)}+f_{,,}\quad .\ .\ .\ (\beta'')$$

und wenn man hierin für (x) (y) (z) $f_{,,}$ die gehörigen Werthe setzt; so erhält man:

$$y = \frac{B}{A}.x\,;\quad z = -\left(\frac{A^2+B^2}{AC}\right).x-\frac{D}{C}\quad .\ .\ (3)$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich einige merkwürdige Folgerungen ziehen.

Die Gleichungen (1) geben:

$$z = \frac{C}{B}.y\,.$$

Diese Gleichung zeigt, dass die Projektion der Geraden Of in der Ebene yz durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehe; diese Gleichung gehört aber auch zugleich für die auf die Knotenlinie der Ebene I in yz senkrecht stehende Gerade; die Projektion der Geraden Of in der Ebene yz steht also auf der Knotenlinie der Ebene I in yz perpendikulär. Eben so folgt aus der zweiten der Gleichung (2)

$$z = \frac{C}{A} . x ;$$

dass die Projektion der Geraden $Of_{,}$ in der Ebene xz senkrecht auf der Knotenlinie der Ebene I in xz stehe.

Endlich zeigt die erste der Gleichungen (3), d. i.

$$y = \frac{B}{A} . x ,$$

dass die Projektion der Geraden $Of_{,,}$ in der Ebene xy auf der Knotenlinie der Ebene I in xy senkrecht stehe.

Nachdem wir nun die Gleichungen dieser drei geraden Linien kennen, wird man nun, alle Grössen, welche aus der Beziehung einer Geraden im Raume überhaupt gegen das System der rechtwinklichten coordinirten Achsen entspringen, nach den im zweiten Capitel für sie entwickelten Formeln, in Funktionen der die Lage der Projektions-Ebene gegebene Stücke $ABCD$ auszudrücken im Stande seyn. Wendet man z. B. die Formeln (1) (2) Art. 89 auf den gegenwärtigen Fall an; so wird man, wenn man die drei Geraden Of, $Of_{,}$, $Of_{,,}$ mit $f\ f_{,} f_{,,}$ bezeichnet, nachstehende Ausdrücke für die Cosinusse, Sinusse und Tangenten der Winkel finden, welche die Projektionen der Achsen in einer Ebene mit diesen coordinirten Achsen selbst bilden, und diese Grössen in Funktionen der die Lage der Projektions-Ebene gegen das System der coordinirten Achsen bestimmenden Stücke ABC erhalten. Es ist also:

$$\left.\begin{aligned}
&\cos.(f.x) = \frac{\sqrt{B^2+C^2}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};\ \cos.(f.y) = -\frac{A.B}{\sqrt{B^2\ C^2}.\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \cos.(f.z) = -\frac{A.C}{\sqrt{B^2+C^2}.\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\\
&\cos.(f_{,}.y) = -\frac{\sqrt{A^2+C^2}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};\ \cos.(f_{,}.x) = +\frac{A.B}{\sqrt{A^2+C^2}.\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \cos.(f_{,}.z) = +\frac{B.C}{\sqrt{A^2+C^2}.\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\\
&\cos(f_{,,}.z) = -\frac{\sqrt{A^2+B^2}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};\ \cos.(f_{,,}.x) = +\frac{A.C}{\sqrt{A^2+B^2}.\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \cos.(f_{,,}.y) = \frac{B.C}{\sqrt{A^2+B^2}.\sqrt{A^2+B^2+C^2}}
\end{aligned}\right\}(4)$$

Hieraus findet man ferner:

$$\left.\begin{aligned}
&\sin.(f.x) = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};\ \sin.(f_{,}.y) = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \sin.(f_{,,}.z) = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}
\end{aligned}\right\}(5)$$

u. s. w.

Endlich ist:

$$\left.\begin{aligned}
&\text{tg.}(f.x) = \frac{A}{\sqrt{B^2+C^2}};\ \text{tg.}(f.y) = -\frac{\sqrt{\{A^2C^2+(B^2+C^2)^2\}}}{A.B}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{tg.}(f.z) = -\frac{\sqrt{\{A^2B^2+(B^2+C^2)^2\}}}{A.C}\\
&\text{tg.}(f_{,}.y) = -\frac{B}{\sqrt{A^2+C^2}};\ \text{tg.}(f_{,}.x) = \frac{\sqrt{\{B^2C^2+(A^2+C^2)^2\}}}{A.B}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{tg.}(f_{,}.z) = \frac{\sqrt{\{A^2B^2+(A^2+C^2)^2\}}}{B.C}\\
&\text{tg.}(f_{,,}.z) = \frac{-C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};\ \text{tg.}(f_{,,}.x) = \frac{\sqrt{\{B^2C^2+(A^2+B^2)^2\}}}{A.C}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{tg.}(f_{,,}.y) = \frac{\sqrt{\{A^2C^2+(A^2+B^2)^2\}}}{B.C}
\end{aligned}\right\}(6)$$

Aus diesen Gleichungen können nun andere, zum theil sehr bemerkenswerthe hergeleitet werden; so z. B. findet man noch aus den Gl. (4):

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{\cos.(f.y)}{\cos.(f.x)} = -\frac{A.B}{B^2+C^2}; & \frac{\cos.(f.z)}{\cos.(f.x)} = -\frac{A.C}{B^2+C^2}; \\ \frac{\cos.(f_{\prime}.x)}{\cos.(f_{\prime}.y)} = -\frac{A.B}{A^2+C^2}; & \frac{\cos.(f_{\prime}.z)}{\cos.(f_{\prime}.z)} = -\frac{B.C}{A^2+C^2}; \\ \frac{\cos.(f_{\prime\prime}.x)}{\cos.(f_{\prime\prime}.z)} = -\frac{A.C}{A^2+B^2}; & \frac{\cos.(f_{\prime\prime}.y)}{\cos.(f_{\prime\prime}.z)} = -\frac{B.C}{A^2+B^2}; \end{array}\right\} \quad (7)$$

Ferner:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\cos.(f.y)}{\cos.(f.z)} = \frac{B}{C} = -\mathrm{tg}.(\bar{x}.y); \\ \frac{\cos.(f_{\prime}.x)}{\cos.(f_{\prime}.z)} = \frac{A}{C} = -\mathrm{tg}.(\bar{y}.x); \\ \frac{\cos.(f_{\prime\prime}.x)}{\cos.(f_{\prime\prime}.y)} = \frac{A}{B} = -\mathrm{tg}.(\bar{z}.x); \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; (8)$$

Bringt man in diese Gleichungen für ABC ihre Werthe aus den Gl. (1) Art. 111, und verbindet hiemit die Gl. (4) desselben Art., und die Gl. (11) Art. 113; so findet man:

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{\mathrm{cs}.(f.y)}{\mathrm{cs}.(f.x)} = -\frac{f_{\prime}.f_{\prime\prime}^2}{f.h^2} = -\left(\frac{l.f_{\prime\prime}}{h.f}\right); & \frac{\mathrm{cs}.(f.z)}{\mathrm{cs}.(f.x)} = -\frac{f_{\prime\prime}.f_{\prime}^2}{f.h^2} = -\left(\frac{l.f_{\prime}}{h.f}\right) \\ \frac{\mathrm{cs}.(f_{\prime}.x)}{\mathrm{cs}.(f_{\prime}.y)} = -\frac{f.f_{\prime\prime}^2}{f_{\prime}.h_{\prime}^2} = -\left(\frac{l_{\prime}.f_{\prime\prime}}{h_{\prime}.f_{\prime}}\right); & \frac{\mathrm{cs}.(f_{\prime}.z)}{\mathrm{cs}.(f_{\prime}.y)} = -\frac{f_{\prime\prime}.f^2}{f_{\prime}.h^2} = -\left(\frac{l_{\prime}.f}{h_{\prime}.f_{\prime}}\right) \\ \frac{\mathrm{cs}.(f_{\prime\prime}.x)}{\mathrm{cs}.(f_{\prime\prime}.z)} = -\frac{f.f_{\prime}^2}{f_{\prime\prime}.h_{\prime\prime}^2} = -\left(\frac{l_{\prime\prime}.f_{\prime}}{h_{\prime\prime}.f_{\prime\prime}}\right); & \frac{\mathrm{cs}.(f_{\prime\prime}.y)}{\mathrm{cs}.(f_{\prime\prime}.z)} = -\frac{f_{\prime}.f^2}{f_{\prime\prime}.h_{\prime\prime}^2} = -\left(\frac{l_{\prime\prime}.f}{h_{\prime\prime}f_{\prime\prime}}\right) \end{array}\right\} 9$$

Und eben so:

$$\frac{\cos.(f.y)}{\cos.(f.z)} = \frac{f_{\prime\prime}}{f_{\prime}}; \quad \frac{\cos.(f_{\prime}.x)}{\cos.(f_{\prime}.z)} = \frac{f_{\prime\prime}}{f}; \quad \frac{\cos.(f_{\prime\prime}.x)}{\cos.(f_{\prime\prime}.y)} = \frac{f_{\prime}}{f} \quad (10)$$

Diese Gleichungen (9) (10) liefern wieder sehr merkwürdige Sätze.

Setzt man weiter in die Gleichungen (4) $+\frac{D}{E}$ anstatt $-\sqrt{A^2+B^2+C^2}$; wo E das Loth AO ist; dann hat man:

$$\left.\begin{aligned}\cos.(f.x) &= -\frac{E.\sqrt{B^2+C^2}}{D};\ \cos.(f.y) = \frac{A.B.E}{D.\sqrt{B^2+C^2}}\\ \cos.(f.z) &= \frac{A.C.E}{D.\sqrt{B^2+C^2}}\\ \cos.(f_{,}.y) &= -\frac{E.\sqrt{A^2+C^2}}{D};\ \cos.(f_{,}.x) = -\frac{A.B.E}{D.\sqrt{A^2+C^2}}\\ \cos.(f_{,}.z) &= \frac{-B.C.E}{D.\sqrt{A^2+C^2}}\\ \cos.(f_{,,}.z) &= -\frac{E.\sqrt{A^2+B^2}}{D};\ \cos.(f_{,,}.x) = -\frac{A.C.E}{D.\sqrt{A^2+B^2}}\\ \cos.(f_{,,}.y) &= \frac{-B.C.E}{D.\sqrt{A^2+B^2}}\end{aligned}\right\}(11)$$

Setzt man in diesen Gleichungen für ABC abermals die Werthe aus den Gl. (1) Art. 111, und nimmt Rücksicht auf die Gl. (4) Art. 111 und Gl. (11) Art. 113; so erhält man aus ihnen:

$$\left.\begin{aligned}\cos.(f.x) &= \frac{E}{l};\ \cos.(f.y) = -\left(\frac{E.l}{f.f_{,}}\right);\ \cos.(f.z) = -\left(\frac{E.l}{f.f_{,,}}\right)\\ \cos.(f_{,}.y) &= \frac{E}{l_{,}};\ \cos.(f_{,}.x) = \left(\frac{E.l_{,}}{f.f_{,}}\right);\ \cos.(f_{,}.z) = \left(\frac{E.l_{,}}{f_{,}.f_{,,}}\right)\\ \cos.(f_{,,}.z) &= \frac{E}{l_{,,}};\ \cos.(f_{,,}.x) = \left(\frac{E.l_{,,}}{f.f_{,,}}\right);\ \cos.(f_{,,}.y) = \left(\frac{E.l_{,,}}{f_{,}.f_{,,}}\right)\end{aligned}\right\}12)$$

Setzt man ferner:

$$f.f_{,}.f_{,,} = 6.Q;\quad F = \frac{3.Q}{E},$$

d. i.

$$E = \frac{f.f_{,}.f_{,,}}{2.F};$$

so erhält man aus den Gl. (12) noch ferner:

$$\left.\begin{aligned}\cos.(f.y) &= -\tfrac{1}{2}.\left(\frac{f_{,,}.l}{F}\right);\ \cos.(f.z) = -\tfrac{1}{2}.\left(\frac{f_{,}.l}{F}\right)\\ \cos.(f_{,}.x) &= +\tfrac{1}{2}.\left(\frac{f_{,,}.l_{,}}{F}\right);\ \cos.(f_{,}.z) = +\tfrac{1}{2}.\left(\frac{f.l_{,}}{F}\right)\\ \cos.(f_{,,}.x) &= +\tfrac{1}{2}.\left(\frac{f_{,}.l_{,,}}{F}\right);\ \cos.(f_{,,}.y) = +\tfrac{1}{2}.\left(\frac{f.l_{,,}}{F}\right)\end{aligned}\right\}(13)$$

Diese Relationen liessen sich noch mit einer Menge anderer eben so harmonischer vermehren, die man durch geschickte Verbindungen der hier gefundenen Gleichungen mit denjenigen Ausdrücken, welche in den vorhergehenden Art. gefunden worden sind, leicht entwickeln wird. Von diesen Relationen will ich nur folgende anzeigen. Es ist:

$$\left.\begin{array}{l}
\cos.(f.x) = \dfrac{\cos.(I.xy)}{\cos.(\bar{x}.y)}\,; \quad \cos.(f.y) = -\dfrac{\cos.(\bar{x}.y)}{\mathrm{tg}.(\bar{x}.\bar{y})}\,; \\
\qquad\qquad \cos.(f.z) = -\cos.(I.yz).\cos.(\bar{x}.y)\,; \\
\cos.(f_{I}.y) = -\dfrac{\cos.(I.xy)}{\cos.(\bar{y}.x)}\,; \quad \cos.(f_{I}.x) = \dfrac{\cos.(\bar{y}.x)}{\mathrm{tg}.(\bar{x}.\bar{y})}\,; \\
\qquad\qquad \cos.(f_{I}.z) = +\cos.(\bar{y}.x).\cos.(I.xz)\,; \\
\cos.(f_{II}.z) = -\dfrac{\cos.(I.xz)}{\cos.(\bar{z}.x)}\,; \quad \cos.(f_{II}.x) = \dfrac{\cos.(\bar{z}.x)}{\mathrm{tg}.(\bar{x}.\bar{z})}\,; \\
\qquad\qquad \cos.(f_{II}.y) = +\cos.(\bar{z}.x).\cos.(I.xy)\,;
\end{array}\right\} (14)$$

Oder auch:

$$\left.\begin{array}{l}
\mathrm{cs}.(f.x) = -\dfrac{\cos.(I.xz)}{\cos.(\bar{x}.z)}\,; \quad \mathrm{cs}.(f.y) = +\mathrm{cs}.(\bar{x}.z).\mathrm{cs}.(I.yz)\,; \\
\mathrm{cs}.(f.z) = +\dfrac{\cos.(\bar{x}.z)}{\mathrm{tg}.(\bar{x}.z)}\,; \\
\mathrm{cs}.(f_{I}.y) = +\dfrac{\cos.(I.yz)}{\cos.(\bar{y}z)}\,; \quad \mathrm{cs}.(f_{I}.x) = -\mathrm{cs}.(\bar{y}.z).\mathrm{cs}.(I.xz)\,; \\
\mathrm{cs}.(f_{I}.z) = -\dfrac{\cos.(\bar{y}.z)}{\mathrm{tg}.(\bar{y}\bar{z})}\,; \\
\mathrm{cs}.(f_{II}.z) = +\dfrac{\cos.(I.yz)}{\cos.(\bar{z}y)}\,; \quad \mathrm{cs}.(f_{II}.x) = -\mathrm{cs}\,(\bar{z}.y).\mathrm{cs}.(I.xy)\,; \\
\mathrm{cs}.(f_{II}.y) = -\dfrac{\cos.(\bar{z}.y)}{\mathrm{tg}.(\bar{y}.\bar{z})}\,;
\end{array}\right\} (15)$$

Die Gleichungen (5) zeigen ganz deutlich, dass die Winkel $(f.x)$, $(f_{I}.y)$, $(f_{II}.z)$ respektive denjenigen Winkeln gleich sind, welche die Ebene I mit den coordinirten Achsen xyz macht; ein Satz, dessen Richtigkeit schon an sich einleuchtend ist.

130. Wir wollen nun auch noch die Formen der Ausdrücke kennen lernen, durch welche man die Entfernungen Of,

$Of_{,}$, $Of_{,,}$, welche wir respektive mit (f), $(f_{,})$, $(f_{,,})$ bezeichnen wollen, findet. Den Grundsätzen der analytischen Geometrie gemäss hat man:

$$\left.\begin{array}{l}(f)=\sqrt{\{[f-(x)]^2+(y)^2+(z)^2\}}=\sqrt{\{f^2-2f.(x)+E^2\}}\\(f_{,})=\sqrt{\{(x)^2+[f_{,}-(y)]^2+(z)^2\}}=\sqrt{\{f_{,}^2-2f_{,}.(y)+E^2\}}\\(f_{,,})^2=\sqrt{\{(x)^2+(y)^2+[f_{,,}-(z)]^2\}}=\sqrt{\{f_{,,}^2-2f_{,,}.(z)+E^2\}}\end{array}\right\}.(1)$$

Die gehörige Entwicklung dieser Ausdrücke giebt:

$$\left.\begin{array}{l}(f)=-D.\sqrt{\left\{\frac{1}{A^2}+\frac{3}{N^2}\right\}}=\frac{E}{A}.\sqrt{(2A^2)+B^2+C^2}\,;\\(f_{,})=-D.\sqrt{\left\{\frac{1}{B^2}+\frac{3}{N^2}\right\}}=\frac{E}{B}.\sqrt{A^2+(2B^2)+C^2}\,;\\(f_{,,})=-D.\sqrt{\left\{\frac{1}{C^2}+\frac{3}{N^2}\right\}}=\frac{E}{C}.\sqrt{A^2+B^2+(2C^2)}\,;\end{array}\right\}\quad(2)$$

wo man: $N=\sqrt{A^2+B^2+C^2}$

gesetzt hat.

Aus diesen gefundenen Ausdrücken ergeben sich:

$$\{f^2-(f)^2\}=\{f_{,}^2-(f_{,})^2\}=\{f_{,,}-(f_{,,})^2\}=E^2$$

und $$E^2=f.(x)=f_{,}.(y)=f_{,,}.(z).$$

Diese Gleichungen findet man unmittelbar aus den rechtwinklichten Dreiecken AOf, $AOf_{,}$, $AOf_{,,}$, nach den Grundsätzen der Elementargeometrie.

Es lassen sich nun auch leicht die Winkel berechnen, welche die drei Projektionen der coordinirten Achsen in der Ebene I mit einander machen. Es ist neimlich wie bekannt:

$$\left.\begin{array}{l}h^2=(f_{,})^2+(f_{,,})^2-2(f_{,})(f_{,,}).\cos.(f_{,}.f_{,,})\,;\\h_{,}^2=(f)^2+(f_{,,})^2-2(f)(f_{,,}).\cos.(f.f_{,,})\,;\\h_{,,}^2=(f)^2+(f_{,})^2-2(f)(f_{,}).\cos.(f.f_{,})\,;\end{array}\right\}$$

Die gehörige Entwicklung dieser Ausdrücke giebt:

$$\left.\begin{array}{l}\cos.(f.f_{,})=\frac{A.B}{\sqrt{A^2+C^2}.\sqrt{B^2+C^2}}\,;\\\cos.(f.f_{,,})=\frac{A.C}{\sqrt{A^2+B^2}.\sqrt{B^2+C^2}}\,;\\\cos.(f_{,}.f_{,,})=\frac{B.C}{\sqrt{B^2+A^2}.\sqrt{C^2+A^2}}\,;\end{array}\right\}\quad.\ .\ (3)$$

Vergleicht man diese Ausdrücke mit den Ausdrücken (2) Art. 112; so findet man nachstehende Gleichheiten der Winkel:

$$(\bar{x}.\bar{y}) = (f.f_{,}) ; \quad (\bar{x}.\bar{z}) = (f.f_{,,}) ; \quad (\bar{y}.\bar{z}) = (f_{,}.f_{,,}) ;$$

d. h. die Winkel, welche die Projektionen der drei Achsen in was immer für einer Ebene mit einander machen, sind ebendieselben, als die Winkel, welche die respektiven Knotenlinien dieser Ebene unter einander bilden.

131. Wir wollen annehmen, dass die Lage der Projektions-Ebene durch drei Punkte gegeben sey, durch welche sie gehen soll. In diesem Falle hat man zu setzen:

$$A = k'' ; \quad B = k' ; \quad C = k ; \quad D = -J ; \quad \text{Gl. (7) Art. 123.}$$

Die Gleichungen der Projektionen der Geraden Of in den coordinirten Ebenen xy, xz, yz sind dann:

$$\left.\begin{aligned} y &= -\left(\frac{k'.k''}{k^2+k'^2}\right).x - \left(\frac{k'.J}{k^2+k'^2}\right) ; \\ z &= -\left(\frac{k.k''}{k^2+k'^2}\right).x - \left(\frac{k.J}{k^2+k'^2}\right) ; \\ z &= +\frac{k}{k'}.y. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (1)$$

Die Gleichungen der Projektionen der Geraden $Of_{,}$ in xy, xz, yz sind:

$$\left.\begin{aligned} y &= -\left(\frac{k^2+k''^2}{k'.k''}\right).x + \frac{J}{k'} ; \\ z &= +\frac{k}{k''}.x ; \\ y &= -\left(\frac{k^2+k''^2}{k.k'}\right).z + \frac{J}{k'} ; \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (2)$$

Endlich sind die Gleichungen der Projektionen der Geraden $Of_{,,}$ in den Ebenen xy, xz, yz respektive:

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{k'}{k''}.x ; \\ z &= -\left(\frac{k'^2+k''^2}{k.k''}\right).x + \frac{J}{k} ; \\ z &= -\left(\frac{k'^2+k''^2}{k.k'}\right).y + \frac{J}{k} ; \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (3)$$

Denkt man sich Of verlängert; so durchschneidet diese Linie die Ebene yz in einem Punkte, dessen Coordinaten, wenn man sie mit $p_{\prime\prime} q_{\prime\prime}$ bezeichnet, seyn werden, (gemäss Gleichung (1) Art. 91):

$$p_{\prime\prime} = \frac{B.D}{B^2+C^2} = -\frac{k'.J}{k'^2+k^2}, \quad q_{\prime\prime} = \frac{C.D}{B^2+C^2} = -\frac{k.J}{k'^2+k^2};$$

Sein Abstand vom Anfangspunkte der Coordinaten ist $=$

$$\frac{D}{\sqrt{B^2+C^2}} = \frac{-J}{\sqrt{k'^2+k^2}}.$$

Denkt man sich $Of_{\prime}$ verlängert; so durchschneidet diese Linie die Ebene xz in einem Punkte dessen Coordinaten, wenn man sie mit $p_{\prime} q_{\prime}$ bezeichnet, sind:

$$p_{\prime} = -\frac{A.D}{A^2+C^2} = \frac{k''.J}{k^2+k''^2}, \quad q_{\prime} = -\frac{C.D}{A^2+C^2} = \frac{k.J}{k^2+k''^2},$$

Sein Abstand vom Anfangspunkte der Coordinaten ist $=$

$$\frac{-D}{\sqrt{A^2+C^2}} = \frac{+J}{\sqrt{k^2+k''^2}}.$$

Denkt man sich endlich $Of_{\prime\prime}$ verlängert; so durchschneidet diese Linie die Ebene xy in einem Punkte, dessen Coordinaten, wenn sie mit pq bezeichnet werden, sind:

$$p = -\frac{A.D}{A^2+B^2} = +\frac{k''.J}{k'^2+k''^2}, \quad q = -\frac{B.D}{A^2+B^2} = +\frac{k'.J}{k'^2+k''^2},$$

Sein Abstand vom Anfangspunkte der Coordinaten ist $=$

$$\frac{-D}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{+J}{\sqrt{k'^2+k''^2}}.$$

Ich habe nun bisher zu zeigen gesucht, wie man die Grundsätze der analytischen Geometrie anzuwenden hat, um mannigfaltige Fragen, welche theils die gerade Linie, theils die Ebene betreffen, aufzulösen. Zugleich habe ich den Leser in den Stand gesetzt, selbst neue Relationen, und aus ihnen neue Wahrheiten zu entwickeln, und ihm hinlängliche Gelegenheit verschafft, wo noch vieles der Selbstthätigkeit überlassen bleibt, um sein Combinations-Vermögen und seine Erfindungskraft zu üben. Wir haben hier ein Feld zu betreten an-

gefangen, dessen Fruchtbarkeit an so höchst merkwürdigen Sätzen sich schon gleich am Eingange zu demselben uns zeigt, und dessen fernere Bearbeitung uns eine unerschöpfliche Quelle der interessantesten Wahrheiten erst bekannt machen wird. Zu diesem Allem verdient auch noch diess bemerkt zu werden, dass alle bisher erhaltenen Resultate als einfache und schöne symmetrische Formen hervorgehen, und dass man ein ähnliches auch in den folgenden Untersuchungen zu erwarten hat. Alle diese Vorzüge der analytischen Geometrie, man mag nun auf den Umfang ihres Gebietes blicken, oder auf die interessante Form, unter welcher sich uns eine jede ihrer Wahrheiten vergegenwärtiget, sind lediglich nur der Methode zuzuschreiben, nach welcher man die Lehren der Analys mit den Grundsätzen der Geometrie in Verbindung bringt, und in dieser Verbindung mit einander behandelt. Wenn man nun alle Verfahrungsarten betrachtet, durch welche wir bisher zu den erhaltenen Resultaten gelangt sind; so wird man finden, dass sie Alle im Grunde diess mit einander gemein haben, dass sie auf der Eliminirung der Grössen aus Gleichungen und einer geschickten Verknüpfung der erhaltenen Relationen beruhen; und diess ist eben die Ursache von der so grossen Fruchtbarkeit dieses Feldes.

Zum Schlusse dieses Capitels werde ich noch Einiges über die Bestimmung der Lagen der Ebenen aus gegebenen Eigenschaften, und über die Projektionen der Figuren, als Erweiterung des Art. 54, beifügen.

Bestimmung der Lage der Ebenen aus gegebenen Eigenschaften. Die Haupteigenschaften des Schwerpunktes werden hier ohne Beihilfe statischer Prinzipien erwiesen.

132. *Es sind n Punkte im Raume gegeben; man soll die Gleichung einer Ebene finden, welche die Eigenschaft besitzt, dass*

wenn man von jedem der gegebenen Punkte ein Perpendikel auf diese Ebene herablässt, die Summe aller Perpendikel auf der einen Seite so gross sey, wie auf der andern, oder, dass die algebraische Summe aller auf die Ebene gezogener Perpendikel gleich Null sey. Es sey:

$$Ax+By+Cz+D=0 \quad \ldots\ldots \quad (\alpha)$$

die gesuchte Gleichung der Ebene; ferner seyen $x'y'z'$, $x''y''z''$, $x'''y'''z'''$... die Coordinaten der gegebenen Punkte $m'm''m'''$... Bezeichnet man die Perpendikel, welche von diesen Punkten auf die gesuchte Ebene herabgelassen werden, mit $E_{\prime}E_{\prime\prime}E_{\prime\prime\prime}$..., so hat man:

$$\left.\begin{array}{l} E_{\prime} = -\dfrac{Ax'+By'+Cz'+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}; \\ E_{\prime\prime} = -\dfrac{Ax''+By''+Cz''+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}; \\ E_{\prime\prime\prime} = -\dfrac{Ax'''+By'''+Cz'''+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}; \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (\beta)$$

Der gegebenen Bedingung gemäss soll nun seyn:

$$E_{\prime}+E_{\prime\prime}+E_{\prime\prime\prime}+\ldots=0 \quad \ldots\ldots \quad (\gamma)$$

Setzt man nun die Werthe der Perpendikel $E_{\prime}E_{\prime\prime}E_{\prime\prime\prime}$... aus den Gleichungen (β) in die Gleichungen (γ), und schreibt der Kürze wegen

$$x'+x''+x'''+\ldots=\Sigma(x),$$

und auf ähnliche Art für die andern Summen $\Sigma(y)$, $\Sigma(z)$; so giebt die Gleichung (γ) unmittelbar:

$$A.\Sigma(x)+B.\Sigma(y)+C.\Sigma(z)+n.D=0 \quad \ldots \quad (1)$$

Diese Gleichung giebt nun die Beziehung an, welche zwischen den Grössen $ABCD$ statt finden muss, wenn

$$Ax+By+Cz+D=0$$

die Gleichung einer Ebene von der gegebenen Beschaffenheit seyn soll.

Setzt man also den Werth von D, nemlich

$$D = -A.\frac{\Sigma(x)}{n} - B.\frac{\Sigma(y)}{n} - C.\frac{\Sigma(z)}{n};$$

in die Gleichung (α); so hat man zur Gleichung der gesuchten Ebene:

$$A.\left(x - \frac{1}{n}.\Sigma(x)\right) + B.\left(y - \frac{1}{n}.\Sigma(y)\right) + C.\left(z - \frac{1}{n}.\Sigma(z)\right) = 0. \quad (2)$$

wo ABC was immer für Werthe haben können; wir schliessen nun hieraus, dass die gesuchte Ebene durch einen Punkt im Raume geht, dessen Coordinaten, wenn sie mit XYZ bezeichnet werden, sind:

$$X = \frac{\Sigma(x)}{n}; \quad Y = \frac{\Sigma(y)}{n}; \quad Z = \frac{\Sigma(z)}{n} \quad . \quad . \quad (3)$$

Und weil ABC in der Gleichung (2) willkührlich sind; so folgt ferner daraus, dass jede durch den Punkt (XYZ) gelegte Ebene die verlangte Beschaffenheit besitze.

Man kann mit dieser Eigenschaft noch zwei willkührliche Bedingungen verbinden, welchen die Lage der Ebene ein Genüge leisten soll. Dadurch wird die Aufgabe eine bestimmte, und die Lage der diesen Bedingungen entsprechenden Ebene gleichfalls bestimmt. Soll die Ebene z. B. durch den Anfangspunkt und durch noch einen andern Punkt gehen, dessen Coordinaten $x_, y_, z_,$ sind; so wird man ABC aus diesen zwei Bedingungen bestimmen können; es ist also $D = 0$, und die Gleichungen, aus denen ABC zu finden sind, werden seyn:

$$\left.\begin{aligned} A.\Sigma(x) + B.\Sigma(y) + C.\Sigma(z) &= 0; \\ A.x_, + B.y_, + C.z_, &= 0; \end{aligned}\right\}$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} A &= \{z_,.\Sigma(y) - y_,.\Sigma(z)\}; \\ B &= \{x_,.\Sigma(z) - z_,.\Sigma(x)\}; \\ C &= \{y_,.\Sigma(x) - x_,.\Sigma(y)\}. \end{aligned}$$

Die gesuchte Gleichung der Ebene, welche allen drei Bedingungen Genüge leistet, wird demnach seyn:

$$(Yz_, - Zy_,).x + (Zx_, - Xz_,).y + (Xy_, - Yx_,).z = 0 \quad . \quad (4)$$

133. *Es sind n Punkte gegeben; man soll eine Ebene von der Beschaffenheit finden, so dass, wenn man von jedem der ge-*

gebenen Punkte auf diese Ebene ein Perpendikel herablässt, und jedes dieser Perpendikel in eine gegebene Zahl multiplizirt, alsdann die algebraische Summe aller dieser Produkte gleich Null sey.

Es sey wieder:

$$Ax+By+Cz+D=0 \quad \ldots\ldots \quad (\alpha)$$

die Gleichung der gesuchten Ebene, und die Coordinaten der Punkte $m'm''m'''\ldots$, so wie ihre auf die gesuchte Ebene herabgelassene Perpendikel sollen auf dieselbe Art, wie im vorigen Art. bezeichnet werden. Die Zahlen endlich, mit welchen man diese Perpendikel zu multipliziren hat, seyen respektive $m'm''m'''\ldots$ Die gegebene Bedingungsgleichung ist nun:

$$m'.E_{,}+m''.E_{,,}+m'''.E_{,,,}+\ldots=0 \quad \ldots \quad (\beta)$$

Setzt man in diese Gleichung für $E_{,}E_{,,}E_{,,,}\ldots$ ihre Werthe aus den Gl. (β) des vorigen Art.; so erhält man, wenn man der Kürze wegen setzt:

$$\left.\begin{array}{l} m'x'+m''x''+m'''x''' \ldots = \Sigma(mx); \\ m'y'+m''y''+m'''y''' \ldots = \Sigma(my); \\ m'z'+m''z''+m'''z''' \ldots = \Sigma(mz); \end{array}\right\}$$

nachstehende Relation zwischen den Grössen $ABCD$:

$$A.\Sigma(mx)+B.\Sigma(my)+C.\Sigma(mz)+D.\Sigma(m)=0 \quad . \quad . \quad (1)$$

Dieser Gleichung haben nemlich die Werthe der Grössen $ABCD$ ein Genüge zu leisten, wenn die Gleichung (α) die eine Ebene von der gegebenen Eigenschaft seyn soll. Bringt man den Werth von D aus der Gleichung (1) in die Gleichung (α); so bleiben ABC willkührlich; da nun

$$D=-A.\frac{\Sigma(mx)}{\Sigma(m)}-B.\frac{\Sigma(my)}{\Sigma(m)}-C.\frac{\Sigma(mz)}{\Sigma(m)} \quad . \quad . \quad (\gamma)$$

so wird die Gleichung (α) werden:

$$A.\left\{x-\frac{\Sigma(mx)}{\Sigma(m)}\right\}+B.\left\{y-\frac{\Sigma(my)}{\Sigma(m)}\right\}+C.\left\{z-\frac{\Sigma(mz)}{\Sigma(m)}\right\}=0 \quad . \quad (2)$$

Aus dieser Gleichung schliessen wir, dass die gesuchte Ebene durch einen Punkt des Raumes geht, dessen Coordinaten, wenn sie mit XYZ bezeichnet werden, sind:

$$X=\frac{\Sigma(mx)}{\Sigma(m)}; \quad Y=\frac{\Sigma(my)}{\Sigma(m)}; \quad Z=\frac{\Sigma(mz)}{\Sigma(m)} \quad . \quad . \quad (3)$$

Daraus, dass nun ABC willkührliche Werthe haben können, schliessen wir weiter, dass eine jede durch diesen Punkt (XYZ) gelegte Ebene die in der Aufgabe ausgesprochene Eigenschaft habe.

134. *Es sind n Punkte im Raume gegeben, von diesen Punkten werden auf irgend eine Ebene die Perpendikel $E_{\prime} E_{\prime\prime} E_{\prime\prime\prime} \ldots$ herabgelassen; man soll nun in diesem Systeme von Punkten einen Punkt finden, welcher die Eigenschaft hat, dass, wenn man die Perpendikel $E_{\prime} E_{\prime\prime} E_{\prime\prime\prime} \ldots$ mit den gegebenen respektiven Zahlen $m' m'' m''' \ldots$ multiplizirt, und diese Produkte hierauf in eine Summe bringt, diese Summe jedesmal so gross sey, als das Produkt aus der Summe dieser Zahlen in das Perpendikel, das vom gesuchten Punkte auf die Ebene herabgelassen wird, diese Ebene mag nun was immer für eine Lage im Raume haben.*

Die gegebene Bedingungsgleichung ist also:

$$m'E_{\prime}+m''E_{\prime\prime}+m'''E_{\prime\prime\prime}+\ldots=(m'+m''+m'''\ldots).E$$

oder kurz

$$\Sigma(mE)=E.\Sigma(m); \quad \ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

Die Gleichung irgend einer Ebene sey:

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Die Werthe der Perpendikel, welche aus den gegebenen Punkten auf diese Ebene herabgelassen werden, stehen Gl. (β) Art. 132. Substituirt man sie in die Bedingungsgleichung (α); so erhält man, wenn XYZ die Coordinaten des gesuchten Punktes sind:

$$(A.X+B.Y+C.Z).\Sigma(m)=$$
$$A.\Sigma(mx)+B.\Sigma(my)+C.\Sigma(mz);$$

oder

$$\left.\begin{array}{l} A.\{X.\Sigma(m)-\Sigma(mx)\} \\ +B.\{Y.\Sigma(m)-\Sigma(my)\} \\ +C.\{Z.\Sigma(m)-\Sigma(mz)\} \end{array}\right\}=0 \quad \ldots \quad (1)$$

Soll nun die gegebene Eigenschaft des gesuchten Punktes für jede mögliche Lage der Ebene statt finden; so muss die Gl. (1), welche nichts anders, als die Bedingungsgleichung (α) unter einer andern Form ist, für jeden Werth von ABC statt

haben; diess erfordert, dass jeder der Coëffizienten dieser Grössen in der Gleichung (1) für sich gleich Null sey. Man hat daher:

$$\left.\begin{array}{l} X.\Sigma(m)-\Sigma(mx) = 0; \\ Y.\Sigma(m)-\Sigma(my) = 0; \\ Z.\Sigma(m)-\Sigma(mz) = 0; \end{array}\right\}$$

Und hieraus findet man:

$$\left. X = \frac{\Sigma(mx)}{\Sigma(m)};\ Y = \frac{\Sigma(my)}{\Sigma(m)};\ Z = \frac{\Sigma(mz)}{\Sigma(m)}; \right\} \quad . \; . \; (2)$$

Diese Coordinaten stimmen mit den Coordinaten (3) des vorigen Art. überein. Wir schliessen also hieraus, dass der Punkt, der die in unserer Aufgabe ausgesprochene Eigenschaft hat, kein anderer ist, als derjenige, der auch zugleich die Eigenschaft besitzt, dass die Summe der Produkte aus den Zahlen $m'm''m'''$. . . in die von den gegebenen Punkten auf was immer für eine durch diesen Punkt gelegte Ebene gezogenen Perpendikel gleich Null sey, ein Satz, der eine unmittelbare Folge der allgemeinen Gleichung (α) ist, indem in diesem Falle, wenn die Ebene durch diesen Punkt gelegt wird, $E = 0$ ist.

Der Punkt, dessen Lage durch die Coordinaten XYZ bestimmt wird, heisst der **Schwerpunkt**; denn wenn man sich unter den Zahlen $m'm''m'''$. . . Massen vorstellt; so sind die Produkte $m'y'$, $m''y''$. . . das, was man **statische Momente** dieser Massen in Bezug auf die Ebene yz nennt; eben so sind $m'y'$, $m''y''$. . . die statischen Momente dieser Massen in Bezug auf die Ebene xz; endlich sind $m'z'$, $m''z''$, . . . die statischen Momente in Bezug auf die Ebene xy. Die Gleichungen (2) zeigen nur, dass die Abstände des Schwerpunktes von den coordinirten Ebenen yz, xz, xy gefunden werden, wenn man die Summe der statischen Momente der Massen $m'm''m'''$. . . in Bezug auf diese Ebenen durch die Summe der Massen dividirt, und dass also überhaupt der Abstand des Schwerpunktes von was immer für einer Ebene gleich sey der Summe der Momente dieser Massen in Bezug auf diese

Ebene, dividirt durch die Summe sämmtlicher Massen, wie schon die Bedingungsgleichung (α) aussagt. Geht demnach die Ebene durch den Schwerpunkt, dann ist die Summe der Momente in Bezug auf diese Ebene gleich Null, sie mag übrigens was immer für eine Lage im Raume haben. Uiberhaupt aber werden die Summen der Massen in Bezug auf diejenigen Ebenen unter einander gleich seyn, welche berührende Ebenen einer Kugeloberfläche sind.

Die Haupt-Eigenschaften des Schwerpunktes haben wir also hier ohne Beihilfe statischer Grundsätze erwiesen, und es gehört diese Lehre vom Schwerpunkte ebensowohl der Geometrie als der Statik an.

Dieser Punkt hat übrigens noch die Eigenschaft, dass die Summe der Produkte aus den Quadraten der Entfernungen der Massen von ihm in die respektiven Massen selbst, d. i. die Grösse:

$$\{ m'r_{,}^2 + m''r^2_{,,} + m'''r^2_{,,,} + \ldots \} = V$$

am kleinsten sey, was sich leicht zeigen lässt, wenn man für die Entfernungen $r_{,}\, r_{,,}\, r_{,,,} \ldots$ die Werthe setzt, nemlich:

$$r_{,}^2 = (X - x')^2 + (Y - y')^2 + (Z - z')^2\ ;$$
$$r_{,,}^2 = (X - x'')^2 + (Y - y'')^2 + (Z - z'')^2\ ;\ \text{u. s. w.}$$

und XYZ aus den drei Gleichungen:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial X}\right) = 0\ ;\ \left(\frac{\partial V}{\partial Y}\right) = 0\ ;\ \left(\frac{\partial V}{\partial Z}\right) = 0\ ;$$

ausdrückt, nachdem man sie zuvor gehörig entwickelt hat. Die Identität der Werthe der Coordinaten XYZ aus diesen Gleichungen mit den Werthen (2) zeigt die Identität dieses Punktes mit dem Schwerpunkte.

135. *Es sind n die Ebenen der Lage nach gegeben; man soll die Ebene finden, welche die Eigenschaft besitzt, dass, wenn man von was immer für einem Punkte derselben auf jene n Ebenen die Perpendikel $E_{,}E_{,,}E_{,,,} \ldots$ herablässt, und jedes dieser Perpendikel mit einer der respektiven Zahlen $m'm''m''' \ldots$ multiplizirt; alsdann die algebraische Summe eben dieser Produkte einer gegebenen Grösse G gleich sey, oder dass*

$$m'.E_{,} + m''.E_{,,} + m'''.E_{,,,} + \ldots = G \quad \ldots \quad (\alpha)$$

Es seyen nun:

$$\left.\begin{array}{l} A'.x+B'.y+C'.z+D' = 0; \\ A''.x+B''.y+C''.z+D'' = 0; \\ A'''.x+B'''.y+C'''.z+D''' = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \ldots\ldots (\beta)$$

Die Gleichungen der gegebenen Ebenen, und $x_{,}y_{,}z_{,}$ die Coordinaten irgend eines Punktes im Raume. Setzt man der Kürze wegen:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}} = N_{,}; \\ \frac{1}{\sqrt{A''^2+B''^2+C''^2}} = N_{,,}; \end{array}\right\}$$

u. s. w.

so sind die Entfernungen dieses Punktes $(x_{,}y_{,}z_{,})$ von diesen Ebenen:

$$\left.\begin{array}{l} E_{,} = -N_{,}.\{A'.x_{,}+B'.y_{,}+C'.z_{,}+D'\}; \\ E_{,,} = -N_{,,}.\{A''.x_{,}+B''.y_{,}+C''.z_{,}+D''\}; \\ E_{,,,} = -N_{,,,}.\{A'''.x_{,}+B'''.y_{,}+C'''.z_{,}+D'''\}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} . (\gamma)$$

Setzt man diese Werthe in die Bedingungsgleichungen (α), und nimmt der Kürze wegen an:

$$m'N_{,}A'+m''N_{,,}A''+m'''N_{,,,}A'''+\ldots = \Sigma(mNA);$$
$$m'N_{,}B'+m''N_{,,}B''+m'''N_{,,,}B'''+\ldots = \Sigma(mNB);$$
$$m'N_{,}C'+m''N_{,,}C''+m'''N_{,,,}C'''+\ldots = \Sigma(mNC);$$
$$m'N_{,}D'+m''N_{,,}D''+m'''N_{,,,}D'''+\ldots = \Sigma(mND);$$

so wird diese Gleichung (α) werden:

$$x_{,}.\Sigma(mNA)+y_{,}.\Sigma(mNB)+z_{,}.\Sigma(mNC)+\Sigma(mND) = G.$$

Die Coordinaten $x_{,}y_{,}z_{,}$ müssen also so beschaffen seyn, dass sie dieser Bedingungsgleichung ein Genüge leisten; man sieht hieraus, dass es unendlich viele Punkte von der gegebenen Beschaffenheit giebt, und dass alle diese Punkte in einer gewissen Ebene liegen, welche diese gefundene Relation zu ihrer Gleichung haben.

Allgemeine Lehrsätze über die Projektionen der ebenen Flächen.

136. Wir haben oben gesehen, dass, wenn in irgend einer Ebene I, welche mit den Ebenen xy, xz, yz die Winkel $(I.xy)$, $(I.xz)$, $(I.yz)$ bildet, ein Dreieck verzeichnet ist, dessen Fläche K heisse, wenn man hierauf dieses Dreieck in den drei coordinirten Ebenen projizirt, und die Flächen dieser Projektionen in den Ebenen xy, xz, yz mit $k k' k''$ bezeichnet, dass man, sage ich, alsdann nachstehende Beziehungen habe:

$$\left.\begin{array}{l} k = K.\cos.(I.xy); \\ k' = K.\cos.(I.xz); \\ k'' = K.\cos.(I.yz); \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

und: $$K = \sqrt{k^2 + k'^2 + k''^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Dieser Satz, der sowohl in der analytischen Geometrie schon an sich selbst, als auch wegen der merkwürdigen Folgen wichtig ist, welche sich noch aus ihm ergeben; vorzüglich aber in der Mechanik, und namentlich bei der Theorie der Momente von sehr grosser Brauchbarkeit ist, verdient noch eine besondere Betrachtung. Es lässt sich zeigen, dass dieser Satz von den Projektionen der Dreiecke sich nicht bloss auf die Flächen von Dreiecken, sondern überhaupt auf ebene Flächen von was immer für einer Begrenzung sich erstrecke.

Nimmt man also in einer Ebene zwei Dreiecke an, deren Flächen mit K und $K_{,}$ bezeichnet werden sollen; und nimmt man ihre Projektionen in den coordinirten Ebenen $k k_{,}$; $k' k'_{,}$; $k'' k''_{,}$; so hat man, nach den Grundsätzen, welche in den Gl. (1) (2) ausgedrückt sind:

$$\left.\begin{array}{ll} k = K.\cos.(I.xy); & k_{,} = K_{,}.\cos.(I.xy); \\ k' = K.\cos.(I.xz); & k'_{,} = K_{,}.\cos.(I.xz); \\ k'' = K.\cos.(I.yz); & k''_{,} = K_{,}.\cos.(I.yz); \end{array}\right\}$$

Und: $K = \sqrt{k^2 + k'^2 + k''^2}$; $K = \sqrt{k^2_{,} + k'^2_{,} + k''^2_{,}}$.

Hieraus folgt nun, dass:

$$\left.\frac{k}{K} = \frac{k_{,}}{K_{,}};\ \frac{k'}{K} = \frac{k'_{,}}{K_{,}};\ \frac{k''}{K} = \frac{k''_{,}}{K_{,}}\right\}$$

Betrachtet man nun die erste Gleichung der Gl. (2) unter der Gestalt:

$$K^2 = k.k+k'.k'+k''.k'',$$

oder

$$K^2 = k.\frac{k_{\prime}}{K_{\prime}}.K+k'.\frac{k'_{\prime}}{K_{\prime}}.K+k''.\frac{k''_{\prime}}{K_{\prime}}.K;$$

so erhält man hieraus:

$$K.K_{\prime} = (k.k_{\prime}+k'k'_{\prime}+k''.k''_{\prime}) \quad . \; . \; . \; . \; (3)$$

Wir wollen itzt die Grösse $(K+K_{\prime})^2$ entwickeln; man hat:

$$(K+K_{\prime})^2 = (K^2+K_{\prime}^2+2.K.K_{\prime});$$

und wenn man für K^2; $K_{\prime}^2$ und $(KK_{\prime})$ die gefundenen Ausdrücke substituirt; so hat man:

$$(K+K_{\prime})^2 = \left\{\begin{array}{l} k^2+k'^2+k''^2 \\ +k^2_{\prime}+k'^2_{\prime}+k''^2_{\prime} \\ +2(kk_{\prime}+k'k'_{\prime}+k''k''_{\prime}) \end{array}\right\}$$

d. i.: $(K+K_{\prime})^2 = \{(k+k_{\prime})^2+(k'+k'_{\prime})^2+(k''+k''_{\prime})^2\}$. (4)

Hätte man in der gegebenen Ebene noch ein Dreieck $K_{\prime\prime}$, dessen Projektionen in den coordinirten Ebenen sind $k_{\prime\prime}k'_{\prime\prime}k''_{\prime\prime}$; so wäre auf gleiche Weise:

$$(K+K_{\prime}+K_{\prime\prime})^2 = \{(k+k_{\prime}+k_{\prime\prime})^2+(k'+k'_{\prime}+k'_{\prime\prime})^2+(k''_{\prime}+k''_{\prime\prime}+k''_{\prime\prime})^2\}$$

und überhaupt ist:

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma(k) = \{\Sigma.(K)\}.\cos.(I.xy); \\ \Sigma(k') = \{\Sigma.(K)\}.\cos.(I.xz); \\ \Sigma(k'') = \{\Sigma.(K)\}.\cos.(I.yz); \end{array}\right\} \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

$$\{\Sigma(K)\}^2 = [\{\Sigma(k)\}^2+\{\Sigma(k')\}^2+\{\Sigma(k'')\}^2] \; . \; . \; (5)$$

Hieraus ergiebt sich nun der allgemeine Satz:

Das Quadrat einer jeden ebenen Figur ist gleich der Summe der Quadrate ihrer auf die drei coordinirten Ebenen projizirten Flächen.

Nennt man also überhaupt F die Fläche irgend einer ebenen Figur, und $f\,f'\,f''$ die Projektionen derselben in den coordinirten Ebenen xy, xz, yz; so hat man:

$f = F.\cos.(I.xy)$; $f' = F.\cos.(I.xz)$; $f'' = F.\cos.(I.yz)$;

und wegen

$$\cos.^2(I.xy)+\cos.^2(I.xz)+\cos.^2(I.yz) = 1,$$

ist:
$$F^2 = (f^2 + f'^2 + f''^2)$$
$$\left.\begin{aligned}\cos.(I.xy) &= \frac{f}{\sqrt{f^2+f'^2+f''^2}};\\ \cos.(I.xz) &= \frac{f'}{\sqrt{f^2+f'^2+f''^2}};\\ \cos.(I.yz) &= \frac{f''}{\sqrt{f^2+f'^2+f''^2}};\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (7)$$

137. Werden die drei Flächen $f\ f'\ f''$ auf die gegebene Ebene zurück projizirt; dann erhält man, wenn man diese drei Projektionen der zweiten Ordnung respektive $\varphi\ \varphi'\varphi''$ nennt die Gleichungen:

$\varphi = f.\cos.(I.xy)$; $\varphi' = f'.\cos.(I.xz)$; $\varphi'' = f''.\cos.(I.yz)$;

Setzt man in diese Gleichungen die für $f\ f'\ f''$ gefundenen Werthe; so erhält man die Ausdrücke:

$\varphi = F.\cos.^2(I.xy)$; $\varphi' = F.\cos.^2(I.xz)$; $\varphi'' = F.\cos.^2(I.yz)$;

Werden diese drei Gleichungen addirt; so ergiebt sich:
$$F = (\varphi + \varphi' + \varphi'') \quad \ldots\ldots (1)$$
d. h. die Summe der drei Projektionen der zweiten Ordnung ist gleich der ursprünglichen Fläche F.

138. Wir wollen itzt diese zweiten Projektionen neuerdings auf die coordinirten Ebenen, und von da zurück auf die gegebene Ebene projiziren.

Da nun
$$\left.\begin{aligned}&\varphi.\cos.(I.xy);\ \varphi.\cos.(I.xz);\ \varphi.\cos.(I.yz);\\ &\varphi'.\cos.(I.xy);\ \varphi'.\cos.(I.xz);\ \varphi'.\cos.(I.yz);\\ &\varphi''.\cos.(I.xy);\ \varphi''.\cos.(I.xz);\ \varphi''.\cos.(I.yz);\end{aligned}\right\}$$
die Projektionen der Fläche $\varphi\ \varphi'\varphi''$; und überhaupt die Projektionen der dritten Ordnung von der Fläche F sind; so werden, wenn man diese neun Flächen abermals auf die gegebene Ebene zurück projizirt, die Projektionen der vierten Ordnung von F seyn, und zwar:

die Projektionen der Fläche φ

$\varphi.\cos.^2(I.xy)$; $\varphi.\cos.^2(I.xz)$; $\varphi.\cos.^2(I.yz)$.

Die Projektionen der Fläche φ'

$\varphi'.\cos.^2(I.xy)$; $\varphi'.\cos.^2(I.xz)$; $\varphi'.\cos.^2(I.yz)$.

Die Projektionen der Fläche φ''

$$\varphi''.\cos.^2(I.xy);\ \varphi''.\cos.^2(I.xz);\ \varphi''.\cos.^2(I.yz).$$

Addirt man alle neun Projektionen; so erhält man zu ihrer Summe $(\varphi+\varphi'+\varphi'')$ d. i. die ursprüngliche Fläche F.

Diese Projektionen kann man, so weit man will, fortsetzen, und auf diese Art Projektionen der fünften, sechsten, siebenten Ordnung u. s. w. der ursprünglichen Fläche F erhalten. Dabei zeigt sich folgendes sehr merkwürdiges Gesetz:

Die Summe der drei Projektionen der zweiten Ordnung einer gegebenen Fläche F; oder die Summe der neun Projektionen der vierten Ordnung; oder die Summe der 27 Projektionen der sechsten Ordnung, u. s. w., und überhaupt: die Summe der 3^n *Projektionen von der Ordnung* 2^n *ist immer der ursprünglichen Fläche F gleich.*

139. Es sey F eine Figur, welche in einer Ebene liegt, und mit den coordinirten Ebenen xy, xz, yz die respektiven Winkel $\alpha\beta\gamma$ mache; ferner seyen $A\,A'\,A''$ die Projektionen dieser Fläche in den drei coordinirten Ebenen; so dass:

$$A = F.\cos.\alpha;\ A' = F.\cos.\beta;\ A'' = F.\cos.\gamma \quad . \ (a)$$

wird; so ist hieraus:

$$F = (A.\cos.\alpha + A'.\cos.\beta + A''.\cos.\gamma) \quad . \ . \ (b)$$

Man stelle sich itzt eine zweite Ebene I vor, und es sey ϑ der Neigungswinkel der Fläche F gegen die Ebene I; so hat man:

$$\cos.\vartheta = \{\cos.\alpha.\cos.(I.xy) + \cos.\beta.\cos.(I.xz) + \cos.\gamma.\cos.(I.yz)\}$$

Projizirt man itzt die Fläche F in diese Ebene I; so erhält man, wenn man B ihre Projektion darauf nennt,

$$B = F.\cos.\vartheta \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (1)$$

das ist:

$$B = F.\{\cos.\alpha.\cos.(I.xy) + \cos.\beta.\cos.(I.xz) + \cos.\gamma.\cos.(I.yz)\} \ (c)$$

Sind nun die Lagen der beiden Ebenen F und I gegen ein System rechtwinklichter coordinirter Achsen nebst der Grösse der Fläche F bekannt; so wird man, mit Hülfe der Gl. (c) die Projektion B der Fläche F in der Ebene I finden. Setzt man in dieser Gleichung (c) anstatt $F.\cos.\alpha$, $F.\cos.\beta$, $F.\cos.\gamma$,

die respektiven Werthe $A\,A'\,A''$ aus den Gl. (α); so erhält man endlich:

$$B = \{A.\cos.(I.\,xy) + A'.\cos.(I.\,xz) + A''.\cos.(I.\,yz)\} \quad (2)$$

Mittelst dieser Gleichung wird man die Projektion B einer jeden Figur F in irgend einer Ebene finden können, wenn man:

erstens: die Projektionen derselben Figur F in drei coordinirten Ebenen; und

zweitens: die Lage kennt, welche die Ebene I gegen dasselbe coordinirte Achsensystem hat.

140. Wir wollen uns itzt neben diesem Systeme der coordinirten Achsen xyz noch ein zweites der Achsen $x_i y_i z_i$ vorstellen, das den Anfangspunkt mit dem ersten gemein habe. Ferner denken wir uns im Raume die Lage einer ebenen Figur deren Fläche F heissen mag. Die Projektionen dieser Figur in den Ebenen xy; xz; yz; sollen $A\,A'\,A''$, und
. $x_i y_i$; $x_i z_i$; $y_i z_i$ sollen $B\,B'\,B''$ heissen.

Nennt man ferner:

$\alpha\,\beta\,\gamma$ die Winkel der Achse z_i mit zyx;
$\alpha'\beta'\gamma'$ y_i . . zyx;
$\alpha''\beta''\gamma''$ x_i . . zyx;

so hat man, dem Vorhergehenden gemäss:

$$\left.\begin{aligned} B &= A.\cos.\alpha + A'.\cos.\beta + A''.\cos.\gamma\,, \\ B' &= A.\cos.\alpha' + A'.\cos.\beta' + A''.\cos.\gamma'\,, \\ B'' &= A.\cos.\alpha'' + A'.\cos.\beta'' + A''.\cos.\gamma''\,, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Weil die drei neuen Ebenen $x_i y_i$; $x_i z_i$; $y_i z_i$, welche die Projektionen $B'B''B'''$ enthalten, unter einander rechtwinklicht sind; so hat man, wie bekannt, zwischen den neun Winkeln $\alpha\,\beta\,\gamma\,\alpha'\beta'\gamma'\,\alpha''\beta''\gamma''$ nachstehende Relationen:

$$\left.\begin{aligned} \cos.^2\alpha + \cos.^2\alpha' + \cos.^2\alpha'' &= 1\,, \\ \cos.^2\beta + \cos.^2\beta' + \cos.^2\beta'' &= 1\,, \\ \cos.^2\gamma + \cos.^2\gamma' + \cos.^2\gamma'' &= 1\,; \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

$$\left.\begin{aligned} \cos.\alpha.\cos.\beta + \cos.\alpha'.\cos.\beta' + \cos.\alpha''.\cos.\beta'' &= 0\,; \\ \cos.\alpha.\cos.\gamma + \cos.\alpha'.\cos.\gamma' + \cos.\alpha''.\cos.\gamma'' &= 0\,; \\ \cos.\beta.\cos.\gamma + \cos.\beta'.\cos.\gamma' + \cos.\beta''.\cos.\gamma'' &= 0\,; \end{aligned}\right\} \quad (b)$$

Multiplizirt man itzt die drei Gleichungen (1) respektive mit $\cos.\alpha$, $\cos.\alpha'$, $\cos.\alpha''$, und addirt sie; hierauf mit $\cos.\beta$, $\cos.\beta'$, $\cos.\beta''$, und addirt sie wieder; und endlich neuerdings mit $\cos.\gamma$, $\cos.\gamma'$, $\cos.\gamma''$, und addirt sie abermals, so findet man, wenn dabei auf die Relationen (a) (b) Rücksicht genommen wird:

$$\left.\begin{aligned} A &= (B.\cos.\alpha + B'.\cos.\alpha' + B''.\cos.\alpha''), \\ A' &= (B.\cos.\beta + B'.\cos.\beta' + B''.\cos.\beta''), \\ A'' &= (B.\cos.\gamma + B'.\cos.\gamma' + B''.\cos.\gamma''), \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (2)$$

141. Diese zwei Systeme von Gleichungen (1) (2) des vorigen Art. sind auch dann noch allgemein gültig, wenn man ein System von ebenen Flächen $F F' F''$. . . im Raume hat, sie mögen übrigens was immer für Neigungen und Lagen gegen einander haben. Denkt man sich diese Flächen zuerst auf die coordinirten Ebenen xy, xz, yz projizirt, und nennt ihre Summen $A A' A''$; und hierauf in den Ebenen $x_,y_,$; $x_,z_,$; $y_,z_,$; und ihre Summen $B B' B''$; so werden diese sechs Summen der projizirten Flächen $F F' F''$ in den sechs coordinirten Ebenen die nemlichen Relationen (1) (2) des vorigen Art. gegen einander haben, als die Projektionen einer einzigen dieser Flächen.

Wir werden nun auch in dieser allgemeinen Annahme die folgenden Rechnungen führen, d. h. wir werden voraussetzen, dass $A A' A''$ $B B' B''$ Summen von Projektionen der Flächen $F F' F''$. . . im Raume sind.

142. Erhebt man jede der Gl. (1) oder (2) Art. 140 aufs Quadrat, und addirt sie; so bekömmt man:

$$(A^2 + A'^2 + A''^2) = (B^2 + B'^2 + B''^2) \quad . \; . \; . \; (1)$$

eine Gleichung, welche aussagt, *dass die Summe der Quadrate der drei Projektionen $B B' B''$ in dem einen Achsensysteme genau so gross ist*, *als die Summe der Quadrate der drei Projektionen $A A' A''$ im andern.* Wir schliessen hieraus, dass die Summe $(B^2 + B'^2 + B''^2)$ von der Lage ihrer drei Projektions-Ebenen $x_,y_,$; $x_,z_,$; $y_,z_,$ gegen das Achsensystem gänzlich unabhängig sey, d. h. dass diese Summe sich nicht ändert, wenn

man von einem Systeme rechtwinklichter coordinirter Ebenen zu einem andern ähnlichen Systeme übergeht.

Jedoch ändert sich der Werth einer jeden dieser Grössen für sich von einer Ebene zur andern; ja es giebt eine Ebene, welche die besondere Eigenschaft besitzt, dass diese Summe die möglichst grösste werde, und es ist von Wichtigkeit, ihre Lage zu kennen. Die Gleichung (1) giebt:

$$B = \sqrt{(A^2 + A'^2 + A''^2 - B'^2 + B''^2)}.$$

Man sieht hieraus, dass, je kleiner die Werthe für $B' B''$ werden, desto grösser der Werth von B ausfallen müsse. Die Summe der Projektionen auf der Ebene $x_i y_i$ ist also mit ihrer Lage veränderlich, und ihr Werth wird am grössten, wenn:

$$B' = 0; \; B'' = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

Dieser grösste Werth von B ist dann:

$$B = \sqrt{A^2 + A'^2 + A''^2} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Um die Lage dieser Ebene zu finden, wird man die Bedingungsgleichungen (a) mit den Gl. (2) Art. 140 zu verbinden haben. Diese Gleichungen werden sich auf folgende reduziren:

$$A = B.\cos.\alpha; \; A' = B.\cos.\beta; \; A'' = B.\cos.\gamma \; . \; (b)$$

Setzt man in diesen Gl. (b) für B den Werth aus (2); so ergeben sich hieraus nachstehende Ausdrücke für die Cosinusse der Winkel, so die in Rede stehende Ebene mit den coordinirten Ebenen xy; xz; yz; macht:

$$\left.\begin{aligned} \cos.\alpha &= \frac{A}{\sqrt{A^2 + A'^2 + A''^2}}, \\ \cos.\beta &= \frac{A'}{\sqrt{A^2 + A'^2 + A''^2}}, \\ \cos.\gamma &= \frac{A''}{\sqrt{A^2 + A'^2 + A''^2}}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Kennt man daher die Summen der Projektionen der Flächen $F F' F'' \ldots$ in den coordinirten Ebenen xy; xz; yz; und bezeichnet man sie mit $A A' A''$; so werden die Gl. (3) die Lage derjenigen Ebene bestimmen, in Bezug auf welche die Summe der Projektionen eben dieser Flächen die möglichst

grösste wird. Man nennt diese Ebene die Haupt-Ebene der Projektionen; und die grösste Summe dieser Projektionen ist: $\sqrt{A^2 + A'^2 A''^2}$.

Denkt man sich eine andere Projektions-Ebene, welche auf der Haupt-Ebene senkrecht steht; so zeigen die Gleichungen (a) dass die Summe der Projektionen in jeder derselben gleich Null sey.

Nennt man δ den Neigungswinkel einer Projektions-Ebene gegen die Haupt-Ebene; so ist die Summe der Projektionen der Flächen in dieser neuen Ebene $= \cos.\delta.\sqrt{A^2 + A'^2 + A''^2}$; denn sind $\alpha_{\prime}, \beta_{\prime}, \gamma_{\prime}$ die Winkel, welche die Haupt-Ebene mit den coordinirten Ebenen xy, xz, yz macht; so hat man zum Ausdrucke dieser Projektion:

$$\{A. \cos.\alpha_{\prime} + A'. \cos.\beta_{\prime} + A''. \cos.\gamma_{\prime}\}$$

Setzt man darin $A = B.\cos.\alpha$; $A' = B.\cos.\beta$; $A'' = B.\cos.\gamma$; so wird der Ausdruck für diese Summe werden:

$$B.\{\cos.\alpha.\cos.\alpha_{\prime} + \cos.\beta.\cos.\beta_{\prime} + \cos.\gamma.\cos.\gamma_{\prime}\}$$

Nun ist in diesem Ausdrucke der Faktor von B gleich $\cos.\delta$, und $B = \sqrt{A^2 + A'^2 + A''^2}$; also ist diese Summe:

$$\cos.\delta.\sqrt{A^2 + A'^2 + A''^2}.$$

Hieraus sieht man, dass die Summen der Projektionen auf Ebenen mit der Zunahme oder Abnahme ihrer Neigung gegen die Haupt-Ebene ab- und zunehme, und zwar wie der Cosinuss der Neigung; und dass diese Summe für $\delta = 90^0$, d. i. in Bezug auf eine Ebene, welche auf der Haupt-Ebene senkreckt steht, wegen $\cos.\delta = 0$, verschwinde.

VIERTES CAPITEL.

Relationen zweier Geraden gegen einander.

Bestimmung des Durchschnittspunktes zweier Geraden in einer Ebene. Seine Entfernung vom Anfangspunkte, und von einigen andern Punkten. — Winkel, den diese zwei Geraden mit einander machen. — Bedingungsgleichungen des Parallellismus und der Perpendikularität zweier geraden Linien in einer Ebene.

143. Nachdem wir die Gerade und die Ebene in ihren vornehmsten Beziehungen gegen ein System rechtwinklicht coordinirter Achsen betrachtet haben; so wollen wir, in diesem gegenwärtigen und den folgenden Capiteln, zwei oder mehrere gerade Linien und Ebenen, in Beziehung gegen einander betrachten.

Wir wollen anfänglich voraussetzen, dass die zwei geraden Linien in einer und derselben Ebene, die man zur Coordinaten-Ebene annimmt, liegen; und dass die Lage der einen dieser Geraden, welche wir die Linie 1 nennen wollen, durch die Gleichung:

$$y = ax + b; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

und die Lage der andern Geraden, welche die Linie 2 heissen soll, durch die Gleichung:

$$y = \alpha x + \beta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

bestimmt werde.

Aus der Beziehung der einen Linie gegen die andern entspringen nun schon mehrere Arten der Grössen, als: Coordinaten des Durchschnittspunktes dieser zwei Geraden, seine Entfernung vom Anfangspunkte, Winkel, den die zwei Geraden mit einander machen, u. s. w. Alle diese Stücke hängen nun von den Lagen dieser Geraden gegen das System der coordinirten Achsen ab, oder sind Funktionen, entweder von allen vier Stücken $a\alpha b\beta$, oder nur von den zwei erstern. Die Entwicklung dieser Funktionen ist nun der Gegenstand der folgenden Untersuchungen.

Weil der Durchschnittspunkt zweier Geraden derjenige Punkt ist, der sowohl in der einen, als in der andern Geraden liegt; so werden seine Coordinaten so beschaffen seyn, dass sie, sowohl in die eine als in die andere der Gleichungen dieser beiden Geraden gesetzt, diese Gleichungen identisch machen. Durch diese Bedingung wird man nun die Werthe der Coordinaten dieses Punktes finden. Man wird nemlich die Gleichungen (1) (2) in Verbindung mit einander und als zugleich bestehend (coëxistirend) zu betrachten, und aus ihnen die Werthe von x und y durch die Auflösung der Gleichungen zu suchen haben. Diese zwei Gleichungen zusammen sind dann die Gleichungen des Durchschnittspunktes der Geraden 1 und 2.

Die Coordinaten des Durchschnittspunktes werden wir mit

$$\dot{x} \text{ und } \dot{y}$$

bezeichnen. Man hat dann:

$$\left.\begin{aligned} \dot{y} &= a\dot{x}+b\,; \\ \dot{y} &= \alpha\dot{x}+\beta\,; \end{aligned}\right\}$$

und wenn man $\dot{x}\dot{y}$ aus diesen Gleichungen ausdrückt; so hat man:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -\left(\frac{b-\beta}{a-\alpha}\right), \\ \dot{y} &= -\left(\frac{\alpha b-\beta a}{a-\alpha}\right). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Im Falle $a = \alpha$, werden die Werthe dieser Coordinaten

unendlich gross; diess will eigentlich anzeigen, dass die beiden Geraden in diesem Falle keinen Durchschnittspunkt haben, oder dass sie zu einander parallel sind. In der That ergiebt sich diese Bedingung des Parallellismus zweier Geraden auch schon aus der einfachen Betrachtung, dass, weil a und α die trigonometrischen Tangenten der Neigungswinkel dieser Geraden gegen die Achse der x sind, es nothwendig ist, wenn diese beiden Geraden einander parallel seyn sollen, dass diese Winkel, und folglich auch ihre Tangenten einander gleich seyn. Zum Parallellismus der zwei Linien wird also bloss die Erfüllung der Bedingung, dass

$$a = \alpha ,$$

nöthig seyn.

Die Entfernung des Durchschnittspunktes der zwei Geraden vom Anfangspunkte der Coordinaten, welche wir mit $\dot{D}$ bezeichnen wollen, ist dann:

$$\dot{D} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} ,$$

oder, wenn man für $\dot{x}\dot{y}$ ihre gefundenen Werthe setzt,

$$\dot{D} = -\sqrt{\left\{\left(\frac{b-\beta}{a-\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\alpha b - \beta a}{a-\alpha}\right)^2\right\}}$$

oder auch $\dot{D} = -\dfrac{\sqrt{\{(b-\beta)^2 + (\alpha b - \beta a)^2\}}}{a-\alpha}$; . . . (4)

Wenn man die Grösse unter dem Wurzelzeichen im Ausdrucke (4) entwickelt; so findet man noch:

$$\dot{D} = -\frac{\sqrt{[(1+\alpha^2).b^2 - (1+a\alpha).b\beta + (1+a^2)\beta^2]}}{a-\alpha} \quad (5)$$

144. Zunächst wollen wir die Lage dieses Durchschnittspunktes gegen ein paar andere bestimmte Punkte betrachten.

Es seyen $L'L'$ und $L''L''$ (Fig, 47) die Geraden 1 und 2; und $C'C''$ $K'K''$ ihre Durchschnittspunkte mit den coordinirten Achsen x; y. Ihr Durchschnittspunkt sey O. Man bezeichne nun die Abstände: AK', AK'', AC', AC'' respektive mit $f' f'' g' g''$. Ferner seyen vom Anfangspunkte A auf die beiden Geraden die Perpendikel $AP' = l'$ und $AP'' = l''$

herabgelassen. Endlich setze man $OP' = p'$; $OP'' = p''$ und $P'P'' = s$.

Man hat nun:

$$\left.\begin{array}{l} f' = b;\ g' = -\dfrac{b}{a};\ a = -\dfrac{f'}{g'};\ a = f'; \\ f'' = \beta;\ g'' = -\dfrac{\beta}{\alpha};\ \alpha = -\dfrac{f''}{g''};\ \beta = f''; \end{array}\right\} \ldots (1)$$

$$l' = \frac{-b}{\sqrt{1+a^2}};\ l'' = \frac{-\beta}{\sqrt{1+\alpha^2}} \quad \ldots\ldots (2)$$

$$p' = \sqrt{D^2+l'^2};\ p'' = \sqrt{D^2+l''^2}; \quad \ldots (3)$$

Setzt man in den Gl. (3) für $D\,l'\,l''$ die Werthe aus Gl. (4) des vorigen, und Gl. (2) dieses Art.; so hat man:

$$\left.\begin{array}{l} p' = -\dfrac{(1+a^2).\beta-(1+a\alpha).b}{(a-\alpha).\sqrt{1+a^2}}; \\ p'' = +\dfrac{(1+\alpha^2).b-(1+a\alpha).\beta}{(a-\alpha).\sqrt{1+\alpha^2}}; \end{array}\right\} \ldots\ldots (4)$$

Diese Ausdrücke ergeben sich auch noch dadurch, dass man sagt: $p'p''$ sind die Summen der Projektionen der Coordinaten des Durchschnittspunktes O auf den Linien OL', OL'', wenn die Winkel $(1.x)$, $(2.x)$ spitzig, und die Unterschiede wenn diese Winkel stumpf sind; man hat also:

$$\left.\begin{array}{l} p' = \dot{y}.\cos.(1.x) - \dot{x}.\cos.(1.y) \\ p'' = \dot{y}.\cos.(2.x) - \dot{x}.\cos.(2.y) \end{array}\right\}$$

Setzt man in diesen zwei Gleichungen für $\dot{x}\dot{y}$, $\cos.(1.x)$, $\cos.(1.y)$, $\cos.(2.x)$, $\cos.(2.y)$ die gehörigen Funktionen von $a\alpha b\beta$; so werden genau die Gl. (4) zum Vorschein kommen.

Endlich sind die Coord. von P' gleich: $\dfrac{ab}{1+a^2}$; $\dfrac{b}{1+a^2}$;

und P'' sind: $\dfrac{\alpha\beta}{1+\alpha^2}$; $\dfrac{\beta}{1+\alpha^2}$;

Der Ausdruck für die Entfernung dieser zwei Punkte $P'P''$ von einander, nemlich:

$$s = \sqrt{\left\{\left(\frac{ab}{1+a^2}-\frac{\alpha\beta}{1+\alpha^2}\right)+\left(\frac{b}{1+a^2}-\frac{\beta}{1+\alpha^2}\right)^2\right\}}$$

reduzirt sich auf nachstehenden:

$$s = \frac{\sqrt{(b-\beta)^2+(b\alpha-\beta a)^2}}{\sqrt{1+a^2}.\sqrt{1+\alpha^2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

Durch Verknüpfung dieser fünf Gl. (1) . . (5) lassen sich nun eine Menge, unter andern bemerkenswerthe, Relationen erhalten. So z. B. findet man:

$$l' = \frac{f'g'}{\sqrt{f'^2+g'^2}}\,;\; l'' = \frac{f''g''}{\sqrt{f''^2+g''^2}} \quad . \; . \; (6)$$

$$x = \frac{g'g''(f'-f'')}{f'g''-f''g'}\,;\; y = \frac{f'f''.(g'-g'')}{f'g''-f''g'} \quad . \; . \; (7)$$

$$D = \frac{\sqrt{\{g'^2g''^2(f'-f'')^2+f'^2f''^2(g'-g'')^2\}}}{f'g''-f''g'} \quad . \; . \; (8)$$

$$s = \frac{D.(a-\alpha)}{\sqrt{1+a^2}.\sqrt{1+\alpha^2}} = D(a-\alpha).\frac{l'.l''}{f'.f''} \quad . \; . \; . \; (9)$$

$$s = \left(\frac{1}{f'g''}-\frac{1}{f''g'}\right).D.l'.l'' = \frac{f''g'-f'g''}{\sqrt{f'^2+g'^2}.\sqrt{f''^2+g''^2}} \quad (10)$$

Sucht man die Gleichung der Geraden, welche durch die Punkte $P'P''$ gelegt wird; so hat man in der Gl. (2) Art. 82 zu setzen:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{a.b}{1+a^2}, \quad y' = \frac{b}{1+a^2}\,; \\ x'' &= \frac{\alpha.\beta}{1+\alpha^2}, \quad y'' = \frac{\beta}{1+\alpha^2}\,; \end{aligned}\right\}$$

und man erhält zur gesuchten Gleichung:

$$y = -\left\{\frac{(\beta-b)+(a^2\beta-\alpha^2b)}{(\alpha\beta-ab)+\alpha a(a\beta-\alpha b)}\right\}.x + \frac{(\alpha-a).b\beta}{(\alpha\beta-ab)+\alpha a(a\beta-\alpha b)}.$$

Wenn $a=\alpha$, dann ist diese Gerade die auf die Linie 1 oder 2 senkrechte Gerade; zu ihrer Gleichung wird man dann erhalten:

$$y = -\frac{1}{a}.x\,,$$

eine Gleichung, welche wir schon im zweiten Capitel erhalten haben. Der Flächeninhalt des Dreieckes $P'AP''$ wird gefunden:

$$\left\{\frac{b.\beta.(a-\alpha)}{2(1+a^2)(1+\alpha^2)}\right\},$$

welchem Ausdrucke noch mannigfaltige Formen ertheilt werden können. So z. B. wenn man $(y)'(y)''$ die Perpendikel nennt, welche von $P'P''$ auf die Achse der x gefällt werden; so hat man dafür noch den Ausdruck:

$$\tfrac{1}{2}.(y)'.(y)''.(a-\alpha)\,.$$

145. Wenn die zwei Geraden einen Durchschnittspunkt haben, (und diess ist immer der Fall, so oft a und α zwei von einander verschiedene Werthe haben); alsdann werden: der Sinuss, der Cosinuss und die Tangente des Winkels, den sie mit einander machen, sich in Funktionen von a und α bestimmen lassen. Man hat nemlich:

$$\text{tg.}(1.x) = a\,;\quad \text{tg.}(2.x) = \alpha\,.$$

Nun ist der Winkel, den die zwei Geraden mit einander machen, und der wie gewöhnlich mit (1.2) bezeichnet wird, dem Unterschiede der zwei Winkel $(1.x)$ und $(2.x)$ gleich, d. h. es ist:

$$(1.2) = \{(1.x)-(2.x)\}$$

folglich auch:

$$\left.\begin{aligned}\sin.(1.2) = \sin.\{(1.x)-(2.x)\}\,;\quad \cos.(1.2) = \cos.\{(1.x)-(2.x)\}\\ \text{tg.}(1.2) = \text{tg.}\{(1.x)-(2.x)\}\end{aligned}\right\}$$

Die gehörige Entwicklung dieser Ausdrücke giebt:

$$\left.\begin{aligned}\sin.(1.2) = \frac{a-\alpha}{\sqrt{(1+a^2)}.\sqrt{(1+\alpha^2)}}\,;\quad \cos.(1.2) = \frac{1+a.\alpha}{\sqrt{(1+a^2)}.\sqrt{(1+\alpha^2)}}\\ \text{tg.}(1.2) = \left(\frac{a-\alpha}{1+a.\alpha}\right).\end{aligned}\right\}(1)$$

Diese Ausdrücke lassen sich auch noch unmittelbar aus den Gl. (1) Art. 42 herleiten. Denn wenn man sich auf jeder der correlativen Geraden der Linien 1, 2, einen Punkt nach Belieben angenommen denkt, und wenn $x'y'$, $x''y''$ die Coordinaten derselben sind; so hat man $y' = ax'$; $y'' = \alpha x''$.

Setzt man diese Werthe von $y'y''$ in die Gl. (2) Art. 42; so ergeben sich unmittelbar die hier gefundenen.

Mit Hilfe der im vorhergehenden Art. gefundenen Gleichungen lassen sich die erhaltenen Ausdrücke umformen; so z. B. hat man:

$$\left.\begin{aligned}\sin.(1.2) = \left(\frac{1}{f'g''}-\frac{1}{f''g'}\right).l'l''; \quad \cos.(1.2) = \left(\frac{1}{f'f''}+\frac{1}{g'g''}\right).l'l'' \\ \text{tg}.(1.2) = \left(\frac{f''g'-f'g''}{f'f''+g'g''}\right);\end{aligned}\right\}(2)$$

Da $OP'A$ und $OP''A$ rechte Winkel sind; so liegen alle vier Punkte A, O, P, P' in einem Kreise; folglich ist

$$AOP' = AP''P'.$$

Nun ist: $$p' = D.\cos.(AOP'),$$
und $$s:p' = \sin.(1.2):\sin.(OP''P');$$
da aber: $$OP''P' = 90^\circ + AOP';$$
so ist: $$s:p' = \sin.(1.2):\cos.(AOP').$$

Hieraus findet man nun:

$$s.\cos.(AOP') = p'.\sin.(1.2) = D.\cos.(AOP').\sin.(1.2),$$

d. i. $$s = D.\sin.(1.2),$$

folglich $$\sin.(1.2) = \left(\frac{s}{D}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

ein sehr merkwürdiger Ausdruck für den Sinuss des Neigungswinkels der zwei Linien gegen einander. Hieraus folgt zugleich der für sin.(1.2) schon gefundene Ausdruck, wenn man für s, D, die in den Gleichungen Art. 143 Gl. (4) und Art. 144 Gl. (5) gefundenen Werthe setzt.

Wenn die zwei gerade Linien zu einander parallel sind, alsdann ist $(1.2)=0$; folglich $\sin.(1.2)=0$. Diese Gleichung giebt, zur Bedingungsgleichung des Parallellismus zweier Geraden:

$$a - \alpha = 0 \quad \text{oder} \quad a = \alpha \quad \ldots\ldots \quad (I)$$

wie schon bekannt ist.

Wenn beide Linien auf einander senkrecht stehen; dann ist $(1.2) = 90^\circ$, folglich $\cos.(1.2)=0$. Diese Gleichung giebt, zur Bedingungsgleichung der Perpendikularität zweier Geraden auf einander:

$$1 + a.\alpha = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (II)$$

Diese beiden Bedingungsgleichungen ergeben sich zugleich auch aus der Gleichung:

$$\text{tg}.(1.2) = \left(\frac{a-\alpha}{1+a.\alpha}\right).$$

Denn wenn beide Linien zu einander **parallel** sind, ist tg.(1.2) = 0, also $(a-\alpha) = 0$; wenn endlich beide Linien auf einander **senkrecht** stehen; dann ist tg.(1.2) = ∞; also $(1+a\alpha) = 0$.

146. Wenn jede der zwei Geraden, deren Beziehung gegen einander betrachtet wird, durch zwei Punkte bestimmt wird, durch welche sie gehen soll; alsdann hat man, wenn:

$x'y'x''y''$ die Coord. d. Punkte $m'm''$ sind, durch welche d. Linie 1

u. $x_,y_,x_{,,}y_{,,}$ $m_,m_{,,}$. , ... 2

gelegt werden soll,

$$a = \left(\frac{y''-y'}{x''-x'}\right), \quad b = \left(\frac{x''y'-x'y''}{x''-x'}\right);$$

$$\alpha = \left(\frac{y_{,,}-y_,}{x_{,,}-x_,}\right), \quad \beta = \left(\frac{x_{,,}y_,-x_,y_{,,}}{x_{,,}-x_,}\right).$$

Alle Grössen, welche wir oben mit $ab\alpha\beta$ ausgedrückt haben, lassen sich mittelst dieser Formeln in Funktionen der acht gegebenen Coordinaten der Punkte $m'm''m_,m_{,,}$ darstellen. So z. B. ist:

$$\text{tg.}(1.2) = \left\{\frac{(y''-y')(x_{,,}-x_,)-(y_{,,}-y_,)(x''-x')}{(x''-x')(x_{,,}-x_,)+(y''-y')(y_{,,}-y_,)}\right\}$$

Wenn man durch die Punkte $m'm_,$ und $m''m_{,,}$ die Geraden legt, und sie, zum Unterschiede der vorhergehenden mit 1' und 2' bezeichnet; dann sind ihre Gleichungen:

$$y = \left(\frac{y_,-y'}{x_,-x'}\right).x+\left(\frac{x_,y'-y_,x'}{x_,-x'}\right);$$

und

$$y = \left(\frac{y_{,,}-y''}{x_{,,}-x''}\right).x+\left(\frac{x_{,,}y''-y_{,,}x''}{x_{,,}-x''}\right);$$

Man erhält:

$$\text{tg.}(1'.2') = \left\{\frac{(y_,-y')(x_{,,}-x'')-(y_{,,}-y'')(x_,-x')}{(y_,-y')(y_{,,}-y'')+(x_,-x')(x_{,,}-x'')}\right\}$$

Verbindet man die vier Punkte $m'm''m_,m_{,,}$ durch gerade Linien, so entsteht ein Viereck; in diesem lassen sich nun die Winkel, welche je zwei Seiten mit einander machen, durch Funktionen der Coordinaten dieser vier Punkte ausdrücken.

Wenn $m'm''m'''$ drei in einer Ebene gegebene Punkte sind,

so hat man, wenn die durch $m''m'''$, $m'm'''$, $m'm''$ gelegten Linien respektive mit $1'1''1'''$ bezeichnet werden, zu ihren Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} y &= \left(\frac{y'''-y''}{x'''-x''}\right).x+\left(\frac{x'''y''-x''y'''}{x'''-x''}\right); \\ y &= \left(\frac{y'''-y'}{x'''-x'}\right).x+\left(\frac{x'''y'-x'y'''}{x'''-x'}\right); \\ y &= \left(\frac{y''-y'}{x''-x'}\right).x+\left(\frac{x''y'-x'y''}{x''-x'}\right); \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (1)$$

Nennt man $D'D''D'''$ die drei Seiten des Dreieckes, welche den Winkeln $m'm''m'''$ gegenüberstehen; dann hat man:

$$\left.\begin{aligned} \sin.(1'.1'') &= \frac{(y'''-y'')(x'''-x')-(y'''-y')(x'''-x'')}{D'.D''}; \\ \sin.(1'.1''') &= \frac{(y'''-y'')(x''-x')-(y''-y')(x'''-x'')}{D'.D'''}; \\ \sin.(1''.1''') &= \frac{(y'''-y')(x''-x')-(y''-y')(x'''-x')}{D''.D'''}; \end{aligned}\right\} \; (2)$$

Entwickelt man die Zähler dieser drei Brüche; so wird jeder $=$

$$(x'y''-x''y')+(x'''y'-x'y''')+(x''y'''-x'''y'').$$

Setzt man dafür der Kürze wegen M; so hat man:

$$\sin.(1'.1'')=\frac{M}{D'.D''};\ \sin.(1'.1''')=\frac{M}{D'.D'''};\ \sin(1''.1''')=\frac{M}{D''.D'''} \; (3)$$

Aus diesen drei Gleichungen folgt erstlich, dass

$$\sin.(1'.1''):\sin.(1'.1'''):\sin.(1''.1''') = D''':D'':D',$$

d. h. in jedem Dreiecke verhalten sich die Seiten zu einander, wie die Sinusse der gegenüberstehenden Winkel.

Ferner hat man:

$$\tfrac{1}{2}M=\tfrac{1}{2}D'D''.\sin.(1'.1'')=\tfrac{1}{2}D'D'''.\sin.(1'.1''')=\tfrac{1}{2}D''D'''.\sin.(1''.1''').$$

Nun ist bekanntlich $\frac{1}{2}M$ der Flächeninhalt des Dreieckes $m'm''m'''$, durch die Coordinaten seiner drei Spitzen ausgedrückt. Dieses letzte Resultat lehrt also, dass das halbe Produkt aus zwei Seiten eines Dreieckes und dem Sinusse des von ihnen eingeschlossenen Winkels seinen Flächeninhalt ausdrücke.

Gerade Linie, welche durch einen gegebenen Punkt geht, und zu einer gegebenen Geraden entweder parallel ist, oder auf ihr senkrecht steht, oder mit ihr einen gegebenen Winkel bildet.

147. Wir haben schon im vorigen Art. einige Bestimmungsarten der Lage einer Geraden kennen gelernt; in diesem Capitel werden wir noch einige andere kennen lernen, die insgesammt von der Beschaffenheit sind, dass man die Lage der gesuchten Linie von der Lage einer gegebenen Linie abhängen lässt. Es werde nun zuerst die Gleichung einer Geraden gesucht, welche durch einen gegebenen Punkt geht, und zu einer gegebenen Geraden parallel ist. Sey also

$$y = ax+b \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

die Gleichung der gegebenen Geraden, und $x'y'$ seyen die Coordinaten des gegebenen Punktes, durch welche eine andere Gerade gehen soll, zu deren Gleichung

$$y = \alpha x+\beta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

angenommen werde, und welche der gegebenen Geraden parallel zu legen sey. Da die gesuchte Gerade durch die Stücke $\alpha\beta$ bestimmt werde; so haben wir aus den gegebenen Bedingungen, welchen die Lage der gesuchten Geraden Genüge leisten soll, zwei Gleichungen herzuleiten, aus denen diese Stücke gefunden werden können. Die eine Bedingung, dass sie durch den Punkt $(x'y')$ gehen soll, giebt:

$$y' = \alpha . x'+\beta\,;$$

die andere Bedingung, dass sie zur gegebenen Geraden parallel seyn soll, giebt:

$$a = \alpha.$$

Diese zwei Gleichungen, geben, mit einander verbunden:

$$y = ax+(y'-ax') \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

oder

$$(y-y') = a.(x-x') \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Auf diese Gleichung gelangt man auch noch durch folgende abgekürzte Schlüsse. Die Gleichungen aller Geraden, welche durch den Punkt $(x'y')$ gehen, haben die Form:

$$(y-y') = \alpha.(x-x')\,.$$

Mit dieser Bedingung hat man noch eine zweite zu verbinden, wenn ihre Lage völlig bestimmt seyn soll; diese Bedingung ist hier, dass die gesuchte Gerade der gegebenen parallel sey, d. h. dass $a = \alpha$; also ist die Gleichung:

$$(y-y') = a.(x-x')$$

die Gleichung einer Geraden, welche durch den Punkt $(x'y')$ geht, und jeder Geraden, deren Gleichung, $y = ax+b$, parallel ist.

Nennt man $f'g'$, $f''g''$ die Coordinaten der Durchschnittspunkte der beiden Geraden mit den coordinirten Achsen; so hat man:

$$f' = b\,,\quad g' = -\frac{b}{a}\,,\quad f'' = (y'-ax')\,,\quad g'' = -\left(\frac{y'-ax'}{a}\right).$$

Nun ist der Flächeninhalt des Dreieckes,

dessen Katheten $f'g'$ sind, gleich $\frac{1}{2}f'.g'$,

und $f''g''$ $\frac{1}{2}f''.g''$;

Der Ausdruck für das Trapez also, das zwischen den zwei parallelen Geraden liegt, wird daher seyn:

$$\frac{1}{2}.\left\{(b+ax'-y')(b-ax'+y')\right\}.\frac{1}{a}\,.$$

Wenn die zweite Gerade durch den Punkt geht, dessen Coordinaten $x_,y_,$ sind; so wird $b = (y_,-ax_,)$. Setzt man diesen Werth von b in den nächstvorhergehenden; so wird er:

$$\frac{1}{2}.\left\{[(y_,-y')-a(x_,-x')]\,[(y_,-y')+a(x_,-x')]\right\}.a$$

oder

$$\frac{1}{2}.\left\{(y_,-y')^2-a^2(x_,-x')^2\right\}.\frac{1}{a}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{a}(y_,-y')^2-a.(x_,-x')^2\right\}$$

Gelegenheitlich wollen wir einen andern merkwürdigen Ausdruck für den Flächeninhalt eines Trapezes angeben, dessen zwei gegenüberstehende Seiten parallel sind. Man ziehe aus A (Fig. 48) durch die gegebenen Punkte m,m' gerade Linien, welche die einander parallelen Geraden in den Punkten $\mu'\mu_,$ treffen.

Die Gleichung der Geraden $Am_{,}$ ist $y = \left(\frac{y_{,}}{x_{,}}\right).x$;

$\ldots\ldots\ldots\ldots Am' \;.\;.\; y = \left(\frac{y'}{x'}\right).x$;

Um die Coordinaten der Punkte $\mu'\mu_{,}$ zu finden, welche wir respektive mit $\dot{x}_{,}\dot{y}_{,}$, $\dot{x}'\dot{y}'$ bezeichnen wollen, löse man die Gleichungen auf:

$$\dot{y}_{,}-y_{,} = a(\dot{x}_{,}-x_{,}); \quad \dot{y}'-y' = a(\dot{x}'-x');$$

$$\dot{y}_{,} = \frac{y'}{x'}.\dot{x}; \qquad \dot{y}' = \frac{y_{,}}{x_{,}}.\dot{x}';$$

Aus ihnen findet man:

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x}_{,} = \left(\dfrac{y_{,}-ax_{,}}{y'-ax'}\right).x'; \quad \dot{x}' = \left(\dfrac{y'-ax'}{y_{,}-ax_{,}}\right).x_{,}; \\ \dot{y}_{,} = \left(\dfrac{y_{,}-ax_{,}}{y'-ax'}\right).y'; \quad \dot{y}' = \left(\dfrac{y'-ax'}{y_{,}-ax_{,}}\right).y_{,}; \end{array}\right\}$$

Nun ist der Flächeninhalt

des Dreieckes $\mu'Am' = \frac{1}{2}.\{\dot{y}'x'-\dot{x}'y'\}$

$\ldots\ldots \mu_{,}Am' = \frac{1}{2}.\{y_{,}\dot{x}_{,}-x_{,}\dot{y}_{,}\}$

Setzt man in diesen Ausdrücken die für $\dot{x}_{,}\dot{y}_{,}\dot{x}'\dot{y}'$ gefundenen Werthe; so erhält man:

$$\triangle\,\mu'Am' = \tfrac{1}{2}.\left\{\left(\frac{y'-ax'}{y_{,}-ax_{,}}\right)(y_{,}x'-y'x_{,})\right\};$$

$$\triangle\,\mu_{,}Am_{,} = \tfrac{1}{2}.\left\{\left(\frac{y_{,}-ax_{,}}{y'-ax'}\right)(y_{,}x'-y'x_{,})\right\};$$

Der Unterschied beider Dreiecke ist der Flächeninhalt des Trapezes; nennt man ihn T; so ist:

$$T = \tfrac{1}{2}(y_{,}x'-y'x_{,}).\left\{\left(\frac{y'-ax'}{y_{,}-ax_{,}}\right)-\left(\frac{y_{,}-ax_{,}}{y'-ax'}\right)\right\}$$

Wenn man bemerkt, dass $(y_{,}-ax_{,})$, $(y'-ax')$ nichts anderes, als die Abscissen der Durchschnittspunkte der zwei parallelen Geraden mit der Achse der x sind, die wir mit $f'f''$ bezeichnen wollen; so wird man diesem Ausdrucke T noch folgende Gestalt geben können:

$$T = \frac{(f''^2 - f'^2)(y_, x' - y' x_,)}{2.f'.f''};$$
odes auch
$$T = \frac{(g''^2 - g'^2)(y_, x' - x_, y')}{2.g'.g''};$$

Da $\triangle m_, A m' = \frac{1}{2}.(y_, x' - y' x_,)$;

so ist, wenn man den Inhalt dieses Dreieckes K nennt:

$$T = \left(\frac{f''^2 - f'^2}{f'.f''}\right).K = \left(\frac{g''^2 - g'^2}{g'.g''}\right).K.$$

Das Verhältniss $\left(\frac{T}{K}\right)$ ist also in allen Lagen von $Am_,$ und Am'' für dieselben parallelen Geraden constant. Es ist also auch:

$$\triangle \mu' A \mu_, = \left(\frac{f''^2 - f'^2}{f'.f''}\right) K$$

folglich

$$\triangle m' A m_, = \triangle \mu' A \mu_,$$

wie schon aus der Elementar-Geometrie bekannt ist. Es verdient noch bemerkt zu werden, dass:

$$\dot{x}_, \dot{x}' = x_, x' \text{ und } \dot{y}_, \dot{y}' = y_, y',$$

wie die obigen Formeln unmittelbar geben.

148. Um die Gleichung der Geraden zu finden, welche durch einen gegebenen Punkt $(x'y')$ geht, und auf einer gegebenen Geraden senkrecht steht; sey dieselbe:

$$y = \alpha x + \beta.$$

Man hat nun aus den gegebenen Bedingungen, welche ihre Lage bestimmen, zwei Gleichungen abzuleiten, aus denen $\alpha\beta$ gefunden werden können.

Die erste Bedingung, dass die gesuchte Gerade durch den Punkt $x'y'$ gehen solle, giebt:

$$y' = \alpha x' + \beta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (a)$$

die andere Bedingung, dass die gesuchte Linie auf einer Geraden, deren gegebene Gleichung sey:

$$y = ax + b,$$

senkrecht stehen soll, wird geben:

$$1 + a\alpha = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (b)$$

Die Auflösung der zwei Gleichungen (a) (b) giebt:

$$\alpha = -\frac{1}{a}; \quad \beta = y' + \frac{x'}{a} = \left(\frac{ay'+x'}{a}\right).$$

Die gesuchte Gleichung ist daher:

$$y = -\frac{1}{a}.x + \left(y' + \frac{1}{a}.x'\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

oder $$(y-y') = -\frac{1}{a}.(x-x') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Auf diese Gleichung kann man auch noch durch folgende abgekürzte Schlüsse geführt werden.

Die Gleichung aller durch den Punkt ($x'y'$) gehenden Geraden ist

$$(y-y') = \alpha.(x-x').$$

Zur gänzlichen Bestimmung der Lage dieser Geraden ist noch nöthig, dass der Coëffizient α bestimmt werde. Daher ist mit jener Bedingung noch eine zweite zu verbinden. Die hier gegebene ist, dass die gesuchte Gerade auf einer Linie senkrecht stehen soll, deren Gleichung gegeben ist, nemlich $y = ax + b$. Diese Bedingung, analytisch ausgedrückt, ist

$$1 + a.\alpha = 0.$$

Also ist $\alpha = -\frac{1}{a}$ anzunehmen, und:

$$(y-y') = -\frac{1}{a}.(x-x')$$

ist die Gleichung einer Geraden, welche durch den Punkt ($x'y'$) geht, und auf jeder Geraden, deren Gleichung ist $y = ax + b$, senkrecht steht. (Vergl. Art. 84.)

Um die Coordinaten des Durchschnittspunktes dieser beiden Geraden zu finden, hat man ihre Gleichungen mit einander zu verbinden. Aus ihnen findet man:

$$\dot{x} = \left(\frac{ay'+x'-ab}{1+a^2}\right); \quad \dot{y} = \left(\frac{a^2y'+ax'+b}{1+a^2}\right);$$

Oder:

$$\dot{x}-x' = \left(\frac{y'-ax'-b}{1+a^2}\right).a; \quad \dot{y}-y' = -\left(\frac{y'-ax'-b}{1+a^2}\right);$$

Der Abstand des Punktes m' von der gegebenen Geraden, deren Gleichung $y = ax + b$ ist, wird daher seyn:

$$\sqrt{[(\dot{x}-x')^2+(\dot{y}-y')^2]} = \frac{y'-ax'-b}{\sqrt{1+a^2}};$$

Diese Resultate stimmen genau mit denen im Art. 81 überein. Die Gleichungen:

$$y-y_{,} = a.(x-x_{,}); \quad y-y' = -\frac{1}{a}.(x-x') \quad . \quad . \quad (3)$$

gehören also für zwei gerade Linien, welche auf einander senkrecht stehen, und wovon die erste durch den Punkt $(x_{,}y_{,})$, und die andere durch den Punkt $(x'y')$ geht. Die Coordinaten des Durchschnittspunktes dieser zwei Geraden sind:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= \left\{\frac{a(y'-y_{,})+x'+a^2x_{,}}{1+a^2}\right\} \\ \dot{y} &= \left\{\frac{a(x'-x_{,})+y_{,}+a^2y'}{1+a^2}\right\} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Der Abstand des Punktes m' von der gegebenen Geraden ist:

$$\left\{\frac{(y'-y_{,})-a(x'-x_{,})}{\sqrt{1+a^2}}\right\}$$

Der Abstand des Punktes $m_{,}$ von der gesuchten Geraden ist:

$$\left\{\frac{a(y'-y_{,})+(x'-x_{,})}{\sqrt{1+a^2}}\right\}$$

Nennt man $f'g'f''g''$ die Entfernungen der Durchschnittspunkte dieser zwei Geraden mit den coordinirten Achsen; so findet man:

$$\left.\begin{aligned} f' &= (y_{,}-ax_{,}); \quad g' = -\left(\frac{1}{a}y_{,}+x_{,}\right); \\ f'' &= \left(y'+\frac{1}{a}x'\right); g'' = +(ay'+x'); \end{aligned}\right\} . \quad (5)$$

Aus diesen Gleichungen fliessen mehrere merkwürdige Relationen, die eben so viele Lehrsätze der Geometrie liefern, wenn sie in ihre Sprache übersetzt werden. Die vornehmsten davon sind:

$$f'g' = (f'x_i + g'y_i)\ ;\ f''g'' = (f''x' + g''y');$$
$$f'.f'' = (f'y' + f''y_i) - (x'x_i + y'y_i);$$
$$g'.g'' = (g'x' + g''x_i) - (x'x_i + y'y_i);$$
$$f'y' + g''x_i = x'x_i + y'y_i;\ f''y_i + g'x' = x'x_i + y'y_i;$$
$$f'f'' = (f''y_i - g''x_i) = (f'y' - g'x');$$
$$g'g'' = (g''x_i - f''y_i) = (g'x' - f'y');$$
$$f'f'' + g'g'' = 0;$$
$$(x'x_i + y'y_i) = \tfrac{1}{2}(f'y' + g'x') + \tfrac{1}{2}(f''y_i + g''x_i);$$

u. s. w.

Mit Hilfe derselben kann man den Ausdrücken für die Abstände der Punkte $m'm_i$ von den zwei Geraden noch folgende Gestalten geben:

Abstand des Punktes m' von der gegebenen Geraden:

$$= \frac{(f'x' + g'y') - f'.g'}{\sqrt{f'^2 + g'^2}} = \frac{f''g'' - (f''x_i + g''y_i)}{\sqrt{f''^2 + g''^2}};$$

Abstand des Punktes m_i von der gesuchten Geraden:

$$= \frac{g'g'' + (f'y_i - g'x_i)}{\sqrt{f'^2 + g'^2}} = \frac{f'f'' + (g''x' + f''y')}{\sqrt{f''^2 + g''^2}}.$$

149. *Es ist endlich noch die Gleichung einer Geraden zu finden, welche durch einen gegebenen Punkt geht, und mit einer gegebenen Geraden einen gegebenen Winkel mache.*

Es seyen also $x'y'$ wieder die gegebenen Coordinaten eines Punktes, durch welche die gesuchte Gerade gehen soll. Ihre Gleichung wird demnach unter folgender Form begriffen seyn:

$$y - y' = \alpha.(x - x').$$

In dieser Gleichung ist nur noch α zu bestimmen, und dazu braucht man nur die in der Aufgabe noch enthaltene Bedingung, dass die gesuchte Gerade mit einer Gegebenen, deren Gleichung sey:

$$y = ax + b,$$

einen gegebenen Winkel mache, analytisch auszudrücken.

Nennt man die Tangente dieses gegebenen Winkels m; so ist die Bedingungsgleichung, aus welcher α zu bestimmen ist:

$$m = \frac{a-\alpha}{1+a\alpha}$$

Hieraus erhält man:

$$\alpha = \frac{a-m}{1+ma}$$

Die gesuchte Gleichung der Geraden, welche den beiden gegebenen Bedingungen Genüge leistet, wird also seyn:

$$y-y' = \left\{\frac{a-m}{1+ma}\right\}.(x-x') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Da auch $\left(\frac{\alpha-a}{1+a\alpha}\right)$ die Tangente des Winkels der zwei Geraden ist (nemlich des Nebenwinkels des vorigen); so hat man auch wohl noch:

$$m = \frac{\alpha-a}{1+a\alpha},$$

woraus

$$\alpha = \left(\frac{a+m}{1-ma}\right)$$

folgt. Man kann nun die Gleichungen dieser beiden Geraden in einer einzigen ausdrücken, nemlich:

$$y-y' = \left\{\frac{a\pm m}{1\mp m}\right\}.(x-x') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Diese Frage lässt also zwei Auflösungen zu, was sehr leicht daraus begreiflich wird, weil es unbestimmt gelassen worden ist, auf welcher der beiden Seiten des Perpendikels, das vom Punkte $(x'y')$ auf die gegebene Gerade gefällt wird, die gesuchte Gerade zu liegen habe.

150. *Man sucht innerhalb eines gegebenen Winkels die Lage einer geraden Linie von der Eigenschaft, dass, wenn man von was immer für einem Punkte derselben auf die Schenkel dieses Winkels Perpendikel herablässt, diese sich beständig wie* $1 : n$ *verhalten.*

Man nehme den Scheitel des gegebenen Winkels zum Anfangspunkte der Coordinaten an, und es seyen $y = ax$; $y = \alpha x$ die Gleichungen der zwei Schenkel dieses Winkels. Die

Perpendikel von irgend einem Punkte $(x'y')$ der Ebene desselben, wenn er innerhalb angenommen wird, sind:

$$-\left(\frac{y'-ax'}{\sqrt{1+a^2}}\right); \quad +\left(\frac{y'-ax'}{\sqrt{1+a^2}}\right);$$

Da sich diese Perpendikel zu einander verhalten sollen, wie $1:n$; so hat man:

$$-\left(\frac{y'-ax'}{\sqrt{1+a^2}}\right) : \frac{y'-\alpha x'}{\sqrt{1+\alpha^2}} = 1:n,$$

woraus sich ergiebt, dass:

$$y' = \left(\frac{na.\sqrt{1+\alpha^2}+\alpha.\sqrt{1+a^2}}{n.\sqrt{1+\alpha^2}+\sqrt{1+a^2}}\right).x' \quad . \; . \; . \quad (1)$$

Diese Gleichung zeigt offenbar, dass es unendlich viele Punkte der Ebene xy gebe, welche der Aufgabe ein Genüge leisten; sie liegen sämmtlich in einer Geraden, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht, und mit der Achse der x einen Winkel bildet, dessen trigonometrische Tangente der Coëffizient von x in der Gleichung (1) ist.

Soll die gesuchte Gerade ausserhalb des gegebenen Winkels fallen, dann braucht man nur n negativ zu nehmen. Wird der eine Schenkel zur Achse der x angenommen, z. B. die zweite; so ist

$$\alpha = 0;$$

und die Gleichung der gesuchten Geraden wird werden:

$$y = \left(\frac{n.a}{n+\sqrt{1+a^2}}\right).x \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Wenn $n = 1$; so wird

$$y = \left(\frac{a}{1+\sqrt{1+a^2}}\right).x \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

die Gleichung derjenigen Geraden seyn, welche den gegebenen Winkel halbirt.

Gleichungen der Seiten eines ebenen Dreieckes. Coordinaten der Eckpunkte. Gleichungen der Perpendikel im Dreiecke. Gleichungen der die Seiten halbirenden Geraden.

151. Wir wollen itzt ein System dreier Geraden in einer Ebene betrachten, und es sey die Gleichung

der ersten Geraden $y = a'x + b'$; (1)

der zweiten Geraden $y = a''x + b''$; (2)

der dritten Geraden $y = a'''x + b'''$; (3)

und wir wollen diese drei Linien respektive die Linien 1, 2, 3 nennen. Je zwei derselben durchschneiden sich in einem Punkte; die Durchschnittspunkte der 2 und 3; der 1 und 3; der 1 und 2, wollen wir respektive mit $m'm''m'''$ bezeichnen. In der Ebene xy entsteht dadurch ein Dreieck, dessen Seiten $m''m'''$, $m'm'''$, $m''m'$ respektive mit $s's''s'''$ bezeichnet werden sollen. Endlich setze man die Coordinaten dieser Durchschnittspunkte:

$$\dot{x}', \dot{y}'; \quad \dot{x}'', \dot{y}''; \quad \dot{x}''', \dot{y}''';$$

Man hat nun:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}' &= +\left(\frac{b''-b'''}{a'''-a''}\right); & \dot{y}' &= \left(\frac{b''a'''-b'''a''}{a'''-a''}\right); \\ \dot{x}'' &= +\left(\frac{b'-b'''}{a'''-a'}\right); & \dot{y}'' &= \left(\frac{b'a'''-b'''a'}{a'''-a'}\right); \\ \dot{x}''' &= +\left(\frac{b''-b'}{a'-a''}\right); & \dot{y}''' &= \left(\frac{b''a'-b'a''}{a'-a''}\right); \end{aligned}\right\} . (1)$$

$$\left.\begin{aligned} s''' &= \sqrt{\{(\dot{x}''-\dot{x}')^2+(\dot{y}''-\dot{y}')^2\}} \\ s'' &= \sqrt{\{(\dot{x}'''-\dot{x}')^2+(\dot{y}'''-\dot{y}')^2\}} \\ s' &= \sqrt{\{(\dot{x}''-\dot{x}')^2+(\dot{y}''-\dot{y}')^2\}} \end{aligned}\right\} . . . (2)$$

Ferner hat man:

$$\left.\begin{aligned} (x''-x') &= s'''.\cos.(3.x); & (\dot{y}''-\dot{y}') &= s'''.\cos.(3.y) \\ (x'''-x') &= s''.\cos.(2.x); & (\dot{y}'''-\dot{y}') &= s''.\cos.(2.y) \\ (x'''-x'') &= s'.\cos.(1.x); & (\dot{y}'''-\dot{y}'') &= s'.\cos.(1.y) \end{aligned}\right\} (3)$$

Und hieraus findet man:

$$\left.\begin{aligned}
s''' &= (x''-x').\sqrt{1+a'''^2} = (y''-y').\frac{1}{a'''}.\sqrt{1+a'''^2}\\
s'' &= (x'''-x').\sqrt{1+a''^2} = (y'''-y').\frac{1}{a'}.\sqrt{1+a''^2}\\
s' &= (x'''-x'').\sqrt{1+a'^2} = (y'''-y'').\frac{1}{a'}.\sqrt{1+a'^2}
\end{aligned}\right\}$$

Setzt man nun der Kürze wegen:

$$\{(a'b''-a''b')+(a'''b'-a'b''')+(a''b'''-a'''b'')\} = A;$$

so findet man aus diesen letzten Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
s''' &= \frac{A.\sqrt{1+a'''^2}}{(a'''-a'')(a'''-a')};\\
s'' &= \frac{A.\sqrt{1+a''^2}}{(a'''-a'')(a''-a')};\\
s' &= \frac{A.\sqrt{1+a'^2}}{(a'''-a')(a''-a')};
\end{aligned}\right\} \quad .\ .\ .\ .\ (4)$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$s':s'':s''' = \frac{a'''-a''}{\sqrt{1+a'''^2}.\sqrt{1+a''^2}} : \frac{a'''-a'}{\sqrt{1+a'''^2}.\sqrt{1+a'^2}} : \frac{a''-a'}{\sqrt{1+a''^2}.\sqrt{1+a'^2}} \ .\ (a)$$

d. i. *die Seiten des Dreieckes verhalten sich, wie die Sinusse der gegenüberstehenden Winkel.* Ferner ist:

$$\left.\begin{aligned}
\text{tg.}(1.2) &= \left(\frac{a''-a'}{1+a'.a''}\right);\\
\text{tg.}(1.3) &= \left(\frac{a'''-a'}{1+a'.a'''}\right);\\
\text{tg.}(2.3) &= \left(\frac{a'''-a''}{1+a''.a'''}\right);
\end{aligned}\right\} \quad .\ .\ .\ .\ (5)$$

Aus den Gleichungen (4) folgt ferner:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{s'^2+s''^2-s'''^2}{2.s'.s''} &= \frac{1+a'.a''}{\sqrt{1+a'^2}.\sqrt{1+a''^2}} = \cos.(1.2);\\
\frac{s'^2+s'''^2-s''^2}{2.s'.s'''} &= \frac{1+a'.a'''}{\sqrt{1+a'^2}.\sqrt{1+a'''^2}} = \cos.(1.3);\\
\frac{s''^2+s'''^2-s'^2}{2.s''.s'''} &= \frac{1+a''.a'''}{\sqrt{1+a''^2}.\sqrt{1+a'''^2}} = \cos.(2.3);
\end{aligned}\right\} \ .\ (b)$$

Die Gleichungen (a) (b) enthalten bekanntlich die ganze ebene Trigonometrie.

152. Wir wollen itzt die Gleichungen für die Perpendikel suchen, welche aus den Scheitelpunkten des Dreieckes auf die gegenüberstehenden Seiten gezogen werden, und die Ausdrücke entwickeln, durch welche die Coordinaten des Durchschnittspunktes je zweier dieser Geraden gefunden werden. Man bezeichne die durch den Punkt m' senkrecht auf $m''m'''$ oder auf die Linie 1 gezogene Gerade $\lambda_{,}\lambda_{,}$ mit $1_{,}$; und ebenso mit $2_{,}$ und $3_{,}$ die durch die Punkte m'' und m''' auf die respektiven Geraden 2 und 3 senkrecht gezogenen Geraden.

Man hat nun, gemäss Gl. (II) Art. 145:

zur Gleichung der Linie $1_{,}$ $\quad y-y' = -\frac{1}{a'}.(x-x')$;

. $2_{,}$ $\quad y-y'' = -\frac{1}{a''}.(x-x'')$;

. $3_{,}$ $\quad y-y''' = -\frac{1}{a'''}.(x-x''')$;

Die Coordinaten des Durchschnittspunktes der Geraden $1_{,}$ und $2_{,}$ findet man daraus:

$$x_{,,,} = \left\{\frac{a''.(a'y'+x')-a'.(a''y''+x'')}{a''-a'}\right\};\; y_{,,,} = \frac{(a''y''+x'')-(a'y'+x')}{a''-a'}.$$

Eben so sind die Coordinaten des Durchschnittspunktes der Geraden $1_{,}$ und $3_{,}$:

$$x_{,,} = \left\{\frac{a'''.(a'y'+x')-a'.(a'''y'''+x''')}{a'''-a'}\right\};\; y_{,,} = \frac{(a'''y'''+x''')-(a'y'+x')}{a'''-a'}.$$

Endlich sind die Coordinaten des Durchschnittspunktes der Geraden $2_{,}$ und $3_{,}$:

$$x_{,} = \left\{\frac{a'''.(a''y''+x'')-a''.(a'y'+x')}{a'''-a''}\right\};\; y_{,} = \frac{(a'''y'''+x''')-(a''y''+x'')}{a'''-a''}.$$

Wenn man in diesen sechs Ausdrücken $x'\ x''\ x'''\ y'\ y''\ y'''$ aus den Gl. (1) Art. 151 die Werthe setzt, und dieselben gehörig reduzirt; so wird man finden, dass

$$x_{,} = x_{,,} = x_{,,,}, \quad \text{und} \quad y_{,} = y_{,,} = y_{,,,};$$

d. h. alle drei Perpendikel, welche aus den drei Eckpunkten

eines Dreiecks auf dessen gegenüberliegende Seiten gezogen werden, schneiden sich in einem und demselben Punkte.

153. Denken wir uns itzt die Seite $m''m'''$ im Punkte μ' halbirt, und durch die Punkte m', μ' eine Gerade gezogen, welche wir die Linie 1′ nennen wollen. Aehnliche Linien sind die mit 2′ und 3′ bezeichneten.

Um die Gleichung der Linie 1′ zu finden, suche man erstlich die Coordinaten des Punktes μ'; sie sind

$$\left(\frac{x'''+x''}{2}\right), \left(\frac{y'''+y''}{2}\right),$$

und da die Coordinaten des Punktes m' sind:

$$x', \ y';$$

so wird die Gleichung der durch diese zwei Punkte $m'\mu'$ gelegten Geraden 1′ seyn:

$$y = \left(\frac{y'''+y''-2y'}{x'''+x''-2x'}\right).\ x + \left\{\frac{(x''y'-x'y'')+(x'''y'-x'y''')}{x'''+x''-2x'}\right\}$$

Eben so findet man die Gleichung der durch den Punkt m'' und durch die Mitte der Seite $m'm''$ gelegten Geraden 2′:

$$y = \left(\frac{y'''+y'-2y''}{x'''+x'-2x''}\right).\ x + \left\{\frac{(x'y''-x''y')+(x'''y''-x''y''')}{x'''+x'-2x''}\right\}$$

Endlich ist die Gleichung der Geraden 3′, welche durch den Punkt m''' gelegt wird, und die Seite $m'm''$ halbirt,

$$y = \left(\frac{y'+y''-2y'''}{x'+x''-2x'''}\right).\ x + \left\{\frac{(x''y'''-x'''y'')+(x'y'''-x'''y')}{x'+x''-2x'''}\right\}$$

Sucht man aus diesen drei Gleichungen die Coordinaten der Durchschnittspunkte je zweier der zugehörigen Geraden; so wird man nach den gehörigen Reduktionen finden, dass die Abscissen derselben unter einander, und eben so die Ordinaten einander gleich sind; woraus wir wieder schliessen, dass sich diese drei Linien in einem und demselben Punkte durchschneiden. Vollzieht man alle diese Reduktionen, und setzt die Coordinaten dieses Punktes X, Y; so findet man:

$$X = \left(\frac{x'+x''+x'''}{3}\right);\ Y = \left(\frac{y'+y''+y'''}{3}\right)$$

In der That wird man finden, dass, wenn man durch die-

se zwei Punkte $(x'y')$ und (XY) eine Gerade legt; so wird ihre Gleichung seyn:

$$y = \left(\frac{Y - y'}{X - x'}\right) . x + \left(\frac{X . y' - Y . x'}{X - x'}\right).$$

Setzt man hierin für XY jene Werthe; so wird die gehörige Reduktion alsogleich zeigen, dass diese Gleichung dieselbe ist mit der Gleichung der Geraden $1'$.

Eben so wird man finden, dass die durch die Punkte $(x''y'')$ und (XY) gelegte Gerade, deren Gleichung seyn wird:

$$y = \left(\frac{Y - y''}{X - x''}\right) . x + \left(\frac{X y'' - Y x''}{X - x'}\right)$$

die Linie $2'$ ist, indem ihre Gleichungen übereinkommen, wenn in dieser letzten für XY die obigen Werthe gesetzt werden.

Endlich wird sich zeigen, dass, wenn man durch die Punkte $(x'''y''')$ und (XY) eine Gerade legt, diese zugleich die Gerade $3'$ seyn wird, indem ihre Gleichung:

$$y = \left(\frac{Y - y'''}{X - x'''}\right) . x + \left(\frac{X . y''' - Y . x'''}{X - x'''}\right);$$

augenblicklich in die Gleichung der Geraden $3'$ übergeht, wenn hierin für XY die obigen Werthe substituirt werden.

Dieser merkwürdige Punkt des Dreiecks $m'm''m'''$ ist nichts anders, als der Schwerpunkt der drei Punkte m', m'', m'''.

Er wird also gefunden, wenn man zwei Seiten des Dreieckes halbirt, und von den entgegenstehenden Ecken gerade Linien zieht, welche sich folglich in diesem Punkte durchschneiden.

154. Wenn man in den Gl. (5) Art. 151 setzt:

$$\text{tg.}(1.2) = m'''; \ \text{tg.}(1.3) = m'', \ \text{tg.}(2.3) = m';$$

dann findet man aus der ersten und dritten:

$$a'' = \left(\frac{a' + m'''}{1 - a'm'''}\right); \ a'' = \left(\frac{a''' - m'}{1 + a'''m'}\right).$$

Setzt man diese beiden Ausdrücke von a'' einander gleich; dann erhält man:

$$\left(\frac{a' + m'''}{1 - a'm'''}\right) = \left(\frac{a''' - m'}{1 + a'''m'}\right)$$

oder: $(a' + m''')(1 + a'''m') = (a''' - m')(1 - a'm''')$.

Entwickelt man diese Gleichung, so erhält man wieder:

$$(m'+m''')\ (1+a'a''') = (a'''-a')\ (1-m'm''')$$

oder:
$$\left(\frac{m'+m'''}{1-m'm'''}\right) = \left(\frac{a'''-a'}{1+a'a'''}\right) = m''.$$

Nun ist $\frac{m'+m'''}{1-m'm'''} = \text{tg.}\ [(1.2)+(2.3)]$ und $m'' = \text{tg.}(1.3)$;

man hat daher:

$$\text{tg.}\,(1.3) = \text{tg.}[(1.2)+(2.3)],$$

und hieraus:
$$(1.3) = (1.2)+(2.3);$$

d. h. *der äussere Winkel in einem Dreiecke ist der Summe der beiden gegenüber liegenden im Dreiecke gleich.*

Beziehungen zweier Geraden im Raume gegen einander. Bedingungen ihres Durchschneidens, und Coordinaten ihres Durchschnittspunktes. Seine Entfernung vom Anfangspunkte. Durchschnittspunkte der zwei Geraden in den coordinirten Ebenen, und ihre Relationen.

155. Wir wollen itzt die Beziehungen zweier Geraden gegen einander betrachten, davon keine in der coordinirten Ebene liegt. Es seyen nun die Gleichungen der ersten Linie, welche wir die Linie 1 nennen wollen:

$$\left.\begin{array}{l} y = ax+b \\ z = a_{\prime}x+b_{\prime} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (1)$$

und die Gleichungen der zweiten Geraden, welche wir mit 2 bezeichnen wollen, seyen:

$$\left.\begin{array}{l} y = \alpha x+\beta \\ z = \alpha_{\prime}x+\beta_{\prime} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (2)$$

Wenn zwei gerade Linien in einer Ebene liegen, und einander nicht parallel sind; so folgt, dass sie sich durchschneiden müssen. Nicht so bei geraden Linien im Raume. Sie können neben einander bestehen, ohne sich zu durchschneiden. Nur in gewissen Fällen, oder unter gewissen Bedingungen wird diess statt finden. Um diese analytisch auszudrücken, betrachte man wieder, dass der Durchschnittspunkt in beiden Geraden zugleich

liegen müsse, und dass folglich die Coordinaten dieses Punktes solche Werthe haben müssen, dass sie beiden Systemen der Gleichungen (1) (2) ein Genüge leisten. Diese vier Gleichungen, als coëxistirend betrachtet, gehören daher für den Durchschnittspunkt. Nun ist bekannt, dass man zur Bestimmung dreier unbekannten Grössen nur drei Gleichungen zwischen ihnen nöthig habe. Bestimmt man also aus dreien der Gleichungen (1) (2) die Coordinaten xyz; so wird die vierte, wenn man darin die für xyz erhaltenen Werthe substituirt, eine Relation zwischen lauter bekannten Grössen werden, und diese wird die gesuchte Bedingungsgleichung des Durchschneidens der zwei Geraden im Raume seyn.

Setzt man also die Werthe von y und z in den Gl. (1) (2) einander gleich; so hat man nachstehende zwei Gleichungen:

$$ax + b = \alpha x + \beta;$$
$$a_, x + b_, = \alpha_, x + \beta_,;$$

Wenn sich nun beide Geraden wirklich durchschneiden; so muss der Werth von x aus der einen Gleichung dem Werthe von x aus der andern gleich seyn. Eliminirt man also x; so findet man als Bedingungsgleichung des **Durchschneidens**:

$$\left(\frac{b-\beta}{a-\alpha}\right) = \left(\frac{b_,-\beta_,}{a_,-\alpha_,}\right) \quad \ldots\ldots \quad \text{(III)}$$

Umgekehrt also, so oft zwei gerade Linien einen Punkt mit einander gemein haben, so oft werden die ihre Lagen bestimmenden Stücke dieser Bedingungsgleichung ein Genüge leisten. Bezeichnet man die Coordinaten des Durchschnittspunktes mit $\dot x \dot y \dot z$; so findet man:

$$\left.\begin{aligned} \dot x &= -\left(\frac{b-\beta}{a-\alpha}\right) = -\left(\frac{b_,-\beta_,}{a_,-\alpha_,}\right); \\ \dot y &= +\left(\frac{a\beta-\alpha b}{a-\alpha}\right) = \frac{(a_,b-ab_,)+(a\beta_,-\alpha_,b)}{a_,-\alpha_,}; \\ \dot z &= +\left(\frac{a_,\beta_,-\alpha_,b_,}{a_,-\alpha_,}\right) = \frac{(ab_,-a_,b)+(a_,\beta-\alpha b_,)}{a-\alpha}; \end{aligned}\right\} \quad .\ (3)$$

Der Ausdruck für die Entfernung D des Durchschnittspunktes vom Anfangspunkte ist also:

$$\left.\begin{array}{l} D = \sqrt{\left\{\frac{(b-\beta)^2+(a\beta-\alpha b)^2}{(a-\alpha)^2} + \left(\frac{a_,\beta_,-\alpha_,b_,}{a_,-\alpha_,}\right)^2\right\}} \\ \text{oder } D = \sqrt{\left\{\frac{(b_,-\beta_,)^2+(a_,\beta_,-\alpha_,b_,)^2}{(a_,-\alpha_,)^2} + \left(\frac{a\beta-\alpha b}{a-\alpha}\right)^2\right\}} \end{array}\right\} \quad . (4)$$

Für $\dot{y}$ und $\dot{z}$ hat man noch die Ausdrücke:

$$\left.\begin{array}{l} \dot{y} = \frac{(a_,\beta-\alpha b_,)+(\alpha\beta_,-\alpha_,\beta)}{a_,-\alpha_,}; \\ \dot{z} = \frac{(a\beta_,-\alpha_,b)+(\alpha_,\beta-\alpha\beta_,)}{a-\alpha}; \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \quad (5)$$

Unter den Grössen $\dot{x}\dot{y}\dot{z}$ und den die Lagen der Linien (1) (2) bestimmenden Stücken finden einige merkwürdige Relationen statt, welche man aus (3) und (5) leicht entwickeln wird. Die vorzüglichsten derselben sind:

$$\left.\begin{array}{l} (a_,a-\alpha_,\alpha)\cdot\dot{x}+(\alpha_,-a_,)\cdot\dot{y}+(\alpha-a)\cdot\dot{z} = 0; \\ (a\beta_,-\alpha b_,) = (a-\alpha)\cdot\dot{z}+(a_,\alpha-a\alpha_,)\cdot\dot{x}; \\ (a_,\beta-\alpha_,b) = (a_,-\alpha_,)\cdot\dot{y}+(a\alpha_,-a_,\alpha)\cdot\dot{x}; \\ (ab_,-a_,b) = (a\cdot\dot{z}-a_,\cdot\dot{y}); \; (\alpha\beta_,-\alpha_,\beta) = (\alpha\cdot\dot{z}-\alpha_,\cdot\dot{y}); \\ (a\beta_,-\alpha_,b) = (a\cdot\dot{z}-\alpha_,\cdot\dot{y}); \; (\alpha b_,-a_,\beta) = (\alpha\cdot\dot{z}-\alpha_,\cdot\dot{y}); \\ (a_,\beta_,-\alpha_,b_,) = (a_,-\alpha_,)\cdot\dot{z}; \; (a\beta-\alpha b) = (a-\alpha)\cdot\dot{y}; \end{array}\right\} (6)$$

156. Jede der zwei gegebenen Geraden im Raume schneidet die coordinirten Ebenen in Punkten, zu deren Bestimmung Art. 91 die nöthigen Ausdrücke gegeben worden sind.

Sind $p'q'$, $p'_,q'_,$, $p'_{,,}q'_{,,}$ die Coordinaten der Durchschnittspunkte der Linie 1 mit den Ebenen xy, xz, yz, und eben so $p''q''$, $p''_,q''_,$, $p''_{,,}q''_{,,}$ die der Linie 2; so hat man

$$\left.\begin{array}{l} p' = -\frac{b_,}{a_,}; \; p'_, = -\frac{b}{a}; \; p'_{,,} = b; \\ q' = \left(\frac{a_,b-ab_,}{a_,}\right); \; q'_, = \left(\frac{ab_,-a_,b}{a}\right); \; q'_{,,} = b_,; \\ p'' = -\frac{\beta_,}{\alpha_,}; \; p''_, = -\frac{\beta}{\alpha}; \; p''_{,,} = \beta; \\ q'' = \left(\frac{\alpha_,\beta-\alpha\beta_,}{\alpha_,}\right); \; q''_, = \left(\frac{\alpha\beta_,-\alpha_,\beta}{\alpha}\right); \; q''_{,,} = \beta_,; \end{array}\right\} . (1)$$

Bezeichnet man die Entfernungen der zwei Durchschnittspunkte in jeder der coordinirten Ebenen xy, xz, yz respektive mit $s s_{,} s_{,,}$; so ist:

$$\left.\begin{array}{l} s = \sqrt{\{(p'-p'')^2 + (q'-q'')^2\}} \\ s_{,} = \sqrt{\{(p'_{,}-p''_{,})^2 + (q'_{,}-q''_{,})^2\}} \\ s_{,,} = \sqrt{\{(p'_{,,}-p''_{,,})^2 + (q'_{,,}-q''_{,,})^2\}} \end{array}\right\} \quad \ldots (2)$$

Oder, nachdem man hierin für die pq die Werthe aus Gl. (1) gesetzt hat:

$$\left.\begin{array}{l} s = \sqrt{\left\{\left(\frac{b_{,}}{a_{,}} - \frac{\beta_{,}}{\alpha_{,}}\right)^2 + \left(\frac{a_{,}b - ab_{,}}{a_{,}} - \frac{\alpha_{,}\beta - \alpha\beta_{,}}{\alpha_{,}}\right)^2\right\}}, \\ s_{,} = \sqrt{\left\{\left(\frac{b}{a} - \frac{\beta}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{ab_{,} - a_{,}b}{a} - \frac{\alpha\beta_{,} - \alpha_{,}\beta}{\alpha}\right)^2\right\}}, \\ s_{,,} = \sqrt{\{(b-\beta)^2 + (b_{,}-\beta_{,})^2\}}, \end{array}\right\} (3)$$

Wenn die zwei Geraden einen Durchschnittspunkt haben; alsdann findet man, mittelst der Relationen (6) des vorigen Art. folgende einfachere Ausdrücke:

$$\left.\begin{array}{l} s = \dot{z}. \sqrt{\left\{\left(\frac{1}{a_{,}} - \frac{1}{\alpha_{,}}\right)^2 + \left(\frac{a}{a_{,}} - \frac{\alpha}{\alpha_{,}}\right)^2\right\}}, \\ s_{,} = \dot{y}. \sqrt{\left\{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{a_{,}}{a} - \frac{\alpha_{,}}{\alpha}\right)^2\right\}}, \\ s_{,,} = \dot{x}. \sqrt{\{(a-\alpha)^2 + (a_{,}-\alpha_{,})^2\}}, \end{array}\right\} \quad . (4)$$

Oder auch:

$$\left.\begin{array}{l} s = \left(\frac{b_{,}}{a_{,}} - \frac{\beta_{,}}{\alpha_{,}}\right). \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{a\alpha_{,} - a_{,}\alpha}{a_{,} - \alpha_{,}}\right)^2\right\}}, \\ s_{,} = \left(\frac{b}{a} - \frac{\beta}{\alpha}\right). \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{a\alpha_{,} - a_{,}\alpha}{a - \alpha}\right)^2\right\}}, \\ s_{,,} = (b_{,}-\beta_{,}) \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{a-\alpha}{a_{,}-\alpha_{,}}\right)^2\right\}} = (b-\beta). \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{a_{,}-\alpha_{,}}{a-\alpha}\right)^2\right\}} \end{array}\right\} (5)$$

Man kann bemerken, dass:

$$\left(\frac{a\alpha_{,} - a_{,}\alpha}{a_{,} - \alpha_{,}}\right), \left(\frac{a\alpha_{,} - a_{,}\alpha}{a - \alpha}\right), \left(\frac{a_{,} - \alpha_{,}}{a - \alpha}\right),$$

die Ausdrücke der Tangenten der Neigungswinkel der Geraden $s s_{,} s_{,,}$ gegen die Achsen x, y, z sind. Man hat also:

$$s = \frac{\left(\frac{b_{,}}{a_{,}} - \frac{\beta_{,}}{\alpha_{,}}\right)}{\cos.(s.\,x)};\; s_{,} = \frac{\left(\frac{b}{a} - \frac{\beta}{\alpha}\right)}{\cos.(s_{,}.\,x)};\; s_{,,} = \frac{(b-\beta)}{\cos.(s_{,,}.\,\gamma)} \Bigg\} \;.\;(6)$$

Aus diesen Gleichungen findet man mit Hilfe der Gl. (6) Art. 155 die Relationen:

$$\left.\begin{aligned} s.\cos.(s.\,x) &= \left(\frac{1}{a_{,}} - \frac{1}{\alpha_{,}}\right).\,\dot{z} \\ s_{,}.\cos.(s_{,}.\,x) &= \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\alpha}\right).\,\dot{y}, \\ s_{,,}.\cos.(s_{,,}.\,y) &= (\alpha - a).\,\dot{x}, \end{aligned}\right\} \;.\;.\;.\;(7)$$

Ausdruck für den Sinus, Cosinus und für die Tangente des Winkels, welchen zwei gerade Linien im Raume mit einander machen. Bedingungsgleichung des Parallelismus und der Perpendikularität zweier Geraden im Raume.

157. Indem wir in dem gegenwärtigen Absatze bloss Winkel betrachten, welche zwei gerade Linien mit den Achsen und mit einander machen; so können wir sie auf den Anfangspunkt der Coordinaten reduziren, oder nur die correlativen Geraden jener zwei Linien in Betrachtung ziehen. Die Gleichungen der correlativen Linien sind nun:

$$y = ax;\; z = a_{,}x \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(1)$$

$$y = \alpha x;\; z = \alpha_{,}x \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(2)$$

Weil nun:

$$\mathrm{cs}.(1.2) = \mathrm{cs}.(1.x).\,\mathrm{cs}.(2.x) + \mathrm{cs}.(1.y).\,\mathrm{cs}.(2.y) + \mathrm{cs}.(1.z).\,\mathrm{cs}.(2.z);$$

und

$$\cos.(1.x) = \frac{1}{\sqrt{1+a^2+a_{,}^2}};\; \cos.(2.x) = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2+\alpha_{,}^2}};$$

$$\cos.(1.y) = \frac{a}{\sqrt{1+a^2+a_{,}^2}};\; \cos.(2.y) = \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2+\alpha_{,}^2}};$$

$$\cos.(1.z) = \frac{a_{,}}{\sqrt{1+a^2+a_{,}^2}};\; \cos.(2.z) = \frac{\alpha_{,}}{\sqrt{1+\alpha^2+\alpha_{,}^2}};$$

so erhält man:

$$\cos.(1.2) = \frac{1+a.\alpha+a_{,}.\alpha_{,}}{\sqrt{1+a^2+a_{,}^2}.\sqrt{1+\alpha^2+\alpha_{,}^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Hieraus folgt nun:

$$\sin.(1.2) = \frac{\sqrt{\{(a-\alpha)^2+(a_{,}-\alpha_{,})^2+(a\alpha_{,}-a_{,}\alpha)^2\}}}{\sqrt{1+a^2+a_{,}^2}.\sqrt{1+\alpha^2+\alpha_{,}^2}} \quad . \quad . \quad (4)$$

und:

$$\operatorname{tg}.(1.2) = \frac{\sqrt{\{(a-\alpha)^2+(a_{,}-\alpha_{,})^2+(a\alpha_{,}-a_{,}\alpha)^2\}}}{1+a.\alpha+a_{,}.\alpha_{,}} \quad . \quad (5)$$

Eben dieselben Ausdrücke für cos.(1.2), sin.(1.2), tg.(1.2) gehen aus den Formeln (1) (3) unmittelbar hervor. Denn nimmt man auf der Linie 1 einen Punkt m', und auf der Linie 2 einen Punkt m'' an, und heissen $x'\,y'\,z'$ die Coordinaten des ersten; so wie $x''y''z''$ die des zweiten Punktes; so hat man:

$$y' = ax', \quad z' = a_{,}x';$$
$$y'' = \alpha x'', \quad z'' = \alpha_{,}x'';$$

Setzt man diese Werthe in die Ausdrücke des Art. 47, wo $\pi = (1.2)$; so kommen die nemlichen Resultate, welche wir hier gefunden haben, zum Vorschein.

158. Bezeichnet man mit $1'1''1'''$ die Projektionen der Geraden 1 in den Ebenen xy, xz, yz; und eben so mit $2'2''2'''$ die Projektionen der Geraden 2 in denselben Ebenen; so hat man:

$$\left.\begin{aligned} \cos.(1'.2') &= \frac{1+a.\alpha}{\sqrt{1+a^2}.\sqrt{1+\alpha^2}}; \\ \cos.(1''.2'') &= \frac{1+a_{,}\alpha_{,}}{\sqrt{1+a_{,}^2}.\sqrt{1+\alpha_{,}^2}}; \\ \cos.(1'''.2''') &= \frac{a\alpha+a_{,}\alpha_{,}}{\sqrt{a^2+a_{,}^2}.\sqrt{\alpha^2+\alpha_{,}^2}} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} \sin.(1'.2') &= \frac{(a-\alpha)}{\sqrt{1+a^2}.\sqrt{1+\alpha^2}}; \\ \sin.(1''.2'') &= \frac{a_{,}-\alpha_{,}}{\sqrt{1+a_{,}^2}.\sqrt{1+\alpha_{,}^2}}; \\ \sin.(1'''.2''') &= \frac{a_{,}\alpha-a\alpha_{,}}{\sqrt{a^2+a_{,}^2}.\sqrt{\alpha^2+\alpha_{,}^2}} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} \text{tg.}(1'.2') &= \left(\frac{a-\alpha}{1+a.\alpha}\right); \\ \text{tg.}(1''.2'') &= \left(\frac{a_{\prime}-\alpha_{\prime}}{1+a_{\prime}.\alpha_{\prime}}\right); \\ \text{tg.}(1'''.2''') &= \left(\frac{a_{\prime}\alpha-a\alpha_{\prime}}{a\alpha+a_{\prime}\alpha_{\prime}}\right); \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (3)$$

159. Wenn die geraden Linien im Raume einander **parallel** sind, so muss $(1.2)=0$, folglich $\sin.(1.2)=0$ seyn.

Die Gleichung (4) Art. 157 giebt:

$$(a-\alpha)^2+(a_{\prime}-\alpha_{\prime})^2+(a\alpha_{\prime}-a_{\prime}a)^2 = 0.$$

Weil nun die Summe von Quadraten in keinem andern Falle $=0$ seyn kann, als da jedes Quadrat für sich gleich Null ist, so folgt aus dieser letzten Gleichung, dass:

$$(a-\alpha) = 0;\ (a_{\prime}-\alpha_{\prime}) = 0;\ (a\alpha_{\prime}-a_{\prime}\alpha) = 0.$$

Da die letzte Gleichung schon eine Folge der zwei ersten ist, so ist es klar, dass, wenn $(a-\alpha)=0$, und $(a_{\prime}-\alpha_{\prime})=0$, die zwei Geraden im Raume einander parallel sind.

Die Bedingungsgleichungen des **Parallellismus** zweier Geraden im Raume sind daher:

$$\left.\begin{aligned} a &= \alpha; \\ a_{\prime} &= \alpha_{\prime}; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (IV)$$

Es sind also auch ihre Projektionen in den coordinirten Ebenen einander parallel.

Wenn aber zwei gerade Linien auf einander senkrecht stehen, d. h. wenn ihre correlativen Geraden einen rechten Winkel mit einander machen; dann ist:

$$(1.2) = 90^{\circ};\ \cos.(1.2) = 0.$$

Die Bedingungsgleichung der **Perpendikularität** zweier Geraden im Raume ist demnach:

$$1+a.\alpha+a_{\prime}.\alpha_{\prime} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (V)$$

Denn in diesem Falle muss der Zähler im Ausdrucke (3) Art. 157 verschwinden.

Diese Gleichung drückt nichts anderes aus, als dass:

$$\cos.(1.x).\cos.(2.x)+\cos.(1.y).\cos.(2.y)+\cos.(1.z).\cos.(2.z)=0.$$

Gleichungen einer Geraden, welche durch einen gegebenen Punkt geht, und zu einer gegebenen Geraden parallel ist, oder auf ihr senkrecht steht. Gleichungen einer Geraden, welche auf zwei gegebenen Geraden senkrecht steht.

160. Wir wollen die bisher entwickelten Prinzipien anwenden, um die Gleichungen einer geraden Linie im Raume zu finden, welche durch einen gegebenen Punkt geht, dessen Coordinaten $(x'y'z')$ sind, und zu einer gegebenen Geraden parallel ist. Es seyen also:

$$y = (ax+b);\quad z = (a_ix+b_i)$$

die Gleichungen der gegebenen, und

$$y = (\alpha x+\beta);\quad z = (\alpha_ix+\beta_i)$$

die Gleichungen der gesuchten Geraden. Um ihre Lage analytisch zu bestimmen, hat man aus den Bedingungen der Aufgabe vier Gleichungen herzuleiten, aus denen die Grössen $\alpha\alpha_i\beta\beta_i$ gefunden werden. Da die Gerade durch den Punkt $(x'y'z')$ gehen soll; so hat man:

$$\left.\begin{aligned} y' &= \alpha x'+\beta;\\ z' &= \alpha_ix'+\beta_i; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

und da dieselbe der gegebenen Geraden parallel seyn soll, so hat man:

$$\left.\begin{aligned} a &= \alpha;\\ \alpha_i &= \alpha_i; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

Es ist also: $\beta = (y'-ax')$; $\beta_i = (z'-a_ix')$;

die Gleichungen der gesuchten Geraden sind also:

$$\left.\begin{aligned} (y-y') &= a.(x-x')\\ (z-z') &= a_i.(x-x') \end{aligned}\right\}$$

161. Wenn durch den Punkt $(x'y'z')$ eine Gerade gezogen werden soll, welche auf einer gegebenen Geraden senkrecht steht; so wollen wir erstlich den einfachern Fall betrachten, da dieser Punkt im Anfangspunkte angenommen wird.

Es seyen also:

$$\left.\begin{aligned} y &= ax+b\\ z &= a_ix+b_i \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

die Gleichungen der gegebenen Geraden, und

$$\left.\begin{aligned} y &= \alpha . x ; \\ z &= \alpha_{,} . x ; \end{aligned}\right\}$$

die der gesuchten Geraden.

Weil beide gerade Linien auf einander senkrecht stehen sollen; so hat man:

$$1 + a . \alpha + a_{,} . \alpha_{,} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (a)$$

und weil sich beide Linien durchschneiden sollen; so bekömmt man:

$$\left(\frac{a - \alpha}{a_{,} - \alpha_{,}}\right) = \frac{b}{b_{,}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (b)$$

Aus diesen zwei Bedingungsgleichungen (a) (b) folgen für $\alpha \alpha_{,}$ die Werthe:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \left\{\frac{a a_{,} . b_{,} - (1 + a_{,}^{2}) . b}{a b + a_{,} b_{,}}\right\} \\ \alpha_{,} &= \left\{\frac{a a_{,} . b - (1 + a^{2}) . b_{,}}{a b + a_{,} b_{,}}\right\} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

Geht daher eine Gerade durch den Punkt $(x' y' z')$, und ist der Geraden (1) parallel; dann sind, wegen

$$b = (y' - a x') ; \; b_{,} = (z' - a_{,} x') ,$$

die Gleichungen der Geraden, welche auf diese, aus dem Anfangspunkte der Coordinaten senkrecht gezogen wird,

$$\left.\begin{aligned} y &= \left\{\frac{a a_{,} . z' - (1 + a_{,}^{2}) \, y' + a x'}{a_{,} . z' + a . y' - (a^{2} + a_{,}^{2}) x'}\right\} . x , \\ z &= \left\{\frac{a a_{,} . y' - (1 + a_{,}^{2}) \, z' + a_{,} x'}{a_{,} . z' + a . y' - (a^{2} + a_{,}^{2}) \, x'}\right\} . x . \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (3)$$

Um die Coordinaten des Durchschnittspunktes der zwei Geraden (1) (2) zu finden; verbinde man ihre Gleichungen.

Man erhält dadurch:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{+ b}{\alpha - a} = - \frac{a b + a_{,} b_{,}}{1 + a^{2} + a_{,}^{2}} \\ \dot{y} &= \alpha \dot{x} = \frac{b + a_{,} . (a_{,} b - a b_{,})}{1 + a^{2} + a_{,}^{2}} ; \\ \dot{z} &= \alpha_{,} \dot{x} = \frac{b_{,} - a . (a_{,} b - a b_{,})}{1 + a^{2} + a_{,}^{2}} ; \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; (4)$$

genau so, wie wir Art. 94 gefunden haben.

162. Es sey nun überhaupt durch irgend einen Punkt des Raumes, dessen Coordinaten $x'y'z'$ sind, eine gerade Linie so zu legen, dass sie auf einer gegebenen Geraden zugleich senkrecht stehe.

Wenn nun wieder $y = ax + b$; $z = a_{,}x + b_{,}$; die Gleichungen der gegebenen und $y = \alpha x + \beta$; $z = \alpha_{,}x + \beta_{,}$; die Gleichungen der gesuchten Geraden sind; so hat man aus den Bedingungen der Aufgabe vier Gleichungen, aus denen $\alpha\alpha_{,}\beta\beta_{,}$ bestimmt werden können, herzuleiten.

Die Bedingung, dass die gesuchte Gerade durch den Punkt $(x'y'z')$ gehen soll, giebt:

$$y' = \alpha x' + \beta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

$$z' = \alpha_{,}x' + \beta_{,} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

Die Bedingung, dass beide gerade Linien auf einander senkrecht stehen sollen, giebt:

$$1 + a.\alpha + a_{,}.\alpha_{,} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (c)$$

Die Bedingung endlich, dass sie sich in einem Punkte durchschneiden sollen, giebt:

$$\left(\frac{a-\alpha}{a_{,}-\alpha_{,}}\right) = \left(\frac{b-\beta}{b_{,}-\beta_{,}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (d)$$

Diese Gleichungen (a) (b) (c) (d) sind nun die verlangten, aus welchen man $\alpha\alpha_{,}\beta\beta_{,}$ auszudrücken hat.

Setzt man die Werthe: $\beta = (y' - \alpha x')$; $\beta_{,} = (z' - \alpha_{,}x)$ aus den Gl. (a) (b) in die Gl. (c) (d); so erhält man:

$$\left.\begin{array}{c} 1 + a\alpha + a_{,}\alpha_{,} = 0 \\ \left(\frac{a-\alpha}{a_{,}-\alpha_{,}}\right) = \left(\frac{b-y'+\alpha x'}{b_{,}-z'+\alpha_{,}x'}\right); \end{array}\right\}$$

Aus diesen beiden Gleichungen findet man:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = \frac{a_{,}.[(ab_{,}-a_{,}b)+(a_{,}y'-az')]-(b-y'+ax')}{a(b-y'+ax')+a_{,}(b_{,}-z'+a_{,}x')}; \\ \alpha = -\frac{a.[(ab_{,}-a_{,}b)+(a_{,}y'-az')]-(b_{,}-z'+a_{,}x')}{a(b-y'+ax')+a_{,}(b_{,}-z'+a_{,}x')}; \end{array}\right\}$$

Setzt man diese Werthe von $\alpha\alpha_{,}$ in die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} y - y' = \alpha.(x - x') \\ z - z' = \alpha_{,}.(x - x') \end{array}\right\};$$

so werden diese die Gleichungen der gesuchten Geraden seyn.

Nachstehendes Verfahren ist weit einfacher, um zu den Gleichungen der gesuchten Geraden zu gelangen.

Zieht man die Gl. (a) (b) von den Gleichungen der gesuchten Geraden ab; so findet man daraus:

$$\alpha = \left(\frac{y-y'}{x-x'}\right);\ \alpha_{,} = \left(\frac{z-z_{,}}{x-x'}\right).$$

Setzt man diese Werthe in die Gl. (c) (d); so findet man:

$$(x-x')+a(y-y')+a_{,}(z-z') = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l}[a_{,}(y'-b)-a(z-b_{,})](x-x')-(b_{,}-z'+ax')(y-y') \\ \qquad +(b-y'+ax')(z-z') = 0;\end{array}\right\}(2)$$

Diese zwei Gleichungen sind, in Verbindung mit einander, schon die Gleichungen der gesuchten Geraden. An und für sich betrachtet ist aber jede die Gleichung einer Ebene, welche durch den Punkt ($x'y'z'$) geht; die gesuchte Gerade, welche auf der gegebenen senkrecht steht, ist demnach der Durchschnitt dieser beiden Ebenen.

Wenn die Gleichungen (1) (2) mit denen der gegebenen Geraden verbunden werden, so sind die aus ihrer Auflösung hervorgehende Werthe von $x\,y\,z$ die der Coordinaten des Durchschnittspunktes beider Geraden; nennt man sie $\dot{x}\dot{y}\dot{z}$; dann wird:

$$\sqrt{[(\dot{x}-x')^2+(\dot{y}-y')^2+(\dot{z}-z')^2]}$$

der Ausdruck für die Länge des Perpendikels seyn, das zwischen dem gegebenen Punkte und der gegebenen Geraden enthalten ist. Vollzieht man diese Rechnung; so wird man finden, dass die oben, Art. 95 gefundenen Resultate mit den durch diese Rechnung entwickelten übereinstimmen.

In Hinsicht der Gl. (2) dieses Art. bemerke ich noch, dass sie genau mit der Gl. (2) Art. 122 übereinstimmt, und also die Gleichung einer Ebene ist, welche durch den gegebenen Punkt ($x'y'z'$) und durch die gegebene Gerade gelegt wird. Es muss also die Gleichung:

$$(x-x')+a(y-y')+a_{,}(z-z') = 0$$

die Gleichung derjenigen Ebene seyn, welche durch den Punkt

$(x'y'z')$ geht, und senkrecht auf der Geraden steht, deren Gleichungen sind:

$$y = ax + b; \quad z = a_{,}x + b_{,};$$

ein Resultat, das genau mit dem Art. 121 Gl. (6) erhaltenem übereinkömmt.

163. Wir wollen endlich noch die Gleichungen derjenigen Geraden suchen, welche auf zwei gegebenen Geraden zugleich senkrecht steht.

Es seyen also:

$$\left.\begin{array}{l} y = ax + b; \\ z = a_{,}x + b_{,}; \end{array}\right\} \text{ und } \left\{\begin{array}{l} y = \alpha x + \beta; \\ z = \alpha_{,}x + \beta_{,}; \end{array}\right.$$

die Gleichungen der gegebenen, und

$$\left.\begin{array}{l} y = Ax + B; \\ z = A_{,}x + B_{,}; \end{array}\right\}$$

die Gleichungen der gesuchten Geraden.

Aus den gegebenen Bedingungen der Aufgabe haben wir nun vier Gleichungen herzuleiten, aus denen die Grössen $AA_{,}$ $BB_{,}$ gefunden werden können.

Die Bedingung, dass die gesuchte Gerade durch eine jede der gegebenen Geraden gehen soll, giebt:

$$\left(\frac{a-A}{a_{,}-A_{,}}\right) = \left(\frac{b-B}{b_{,}-B_{,}}\right) \quad \ldots\ldots \quad (a)$$

$$\left(\frac{\alpha-A}{\alpha_{,}-A_{,}}\right) = \left(\frac{\beta-B}{\beta_{,}-B_{,}}\right) \quad \ldots\ldots \quad (b)$$

Die Bedingung ferner, dass die gesuchte Gerade auf jeder der gegebenen Geraden senkrecht stehen soll; giebt:

$$1 + a.A + a_{,}.A_{,} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (c)$$

$$1 + \alpha.A + \alpha_{,}A_{,} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (d)$$

Die zwei letzten Gleichungen (c) (d) sind hinreichend, um die zwei Grössen $AA_{,}$ zu finden; sie geben:

$$A = -\left(\frac{a_{,}-\alpha_{,}}{a_{,}\alpha - a\alpha_{,}}\right); \; A_{,} = +\left(\frac{a-\alpha}{a_{,}\alpha - a\alpha_{,}}\right); \Big\} \quad . \; . \quad (1)$$

Setzt man diese Ausdrücke für $AA_{,}$ in die Gleichungen (a) (b), so werden diese:

$$\left(\frac{b-B}{b_{,}-B_{,}}\right)=\left\{\frac{a_{,}.(1+a\alpha)-\alpha_{,}.(1+a^2)}{\alpha.(1+a_{,}^2)-a.(1+a_{,}\alpha_{,})}\right\};$$

$$\left(\frac{\beta-B}{\beta_{,}-B_{,}}\right)=\left\{\frac{a_{,}.(1+\alpha^2)-\alpha_{,}.(1+a\alpha)}{\alpha.(1+a_{,}\alpha_{,})-a.(1+\alpha_{,}^2)}\right\}.$$

Setzt man der Kürze wegen:

$$\left.\begin{aligned}a_{,}.(1+a\alpha)-\alpha_{,}.(1+a^2)&=m;\\ \alpha.(1+a_{,}^2)-a.(1+a_{,}\alpha_{,})&=m_{,};\\ a_{,}.(1+\alpha^2)-\alpha_{,}.(1+a\alpha)&=\mu;\\ \alpha.(1+a_{,}\alpha_{,})-a.(1+\alpha_{,}^2)&=\mu_{,};\end{aligned}\right\}$$

so findet man aus den Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}(m_{,}.B-m.B_{,})&=(m_{,}b-mb_{,})\\ (\mu_{,}.B-\mu.B_{,})&=(\mu_{,}\beta-\mu\beta_{,})\end{aligned}\right\}$$

die Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned}B&=\left\{\frac{\mu(m_{,}b-mb_{,})-m(\mu_{,}\beta-\mu\beta_{,})}{m_{,}\mu-m\mu_{,}}\right\}\\ B_{,}&=\left\{\frac{\mu_{,}(m_{,}b-mb_{,})-m_{,}(\mu_{,}\beta-\mu\beta_{,})}{m_{,}\mu-m\mu_{,}}\right\}\end{aligned}\right\}$$

Oder:

$$\left.\begin{aligned}B&=\left\{\frac{\mu m_{,}.b-m\mu_{,}.\beta+m\mu.(\beta_{,}-b_{,})}{m_{,}\mu-m\mu_{,}}\right\}\\ B_{,}&=\left\{\frac{\mu m_{,}.\beta_{,}-m\mu_{,}.b+m_{,}\mu_{,}.(b-\beta)}{m_{,}\mu-m\mu_{,}}\right\}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ (2)$$

Die gehörige Entwicklung des Nenners giebt:

$$(m_{,}\mu-m\mu_{,})=$$

$$(a_{,}\alpha-a\alpha_{,})\left\{(a-\alpha)^2+(a_{,}-\alpha_{,})^2+(a_{,}\alpha-a\alpha_{,})^2\right\}\quad\ldots\ (3)$$

164. Um den Ausdruck für die Länge des Stückes der Geraden, welche zwischen den zwei gegebenen enthalten ist, zu finden, ist es nöthig, zuerst die Coordinaten des Durchschnittspunktes der gesuchten Geraden mit jeder der gegebenen kennen zu lernen.

In der Absicht müsste man die Gleichungen der gesuchten Geraden mit den Gleichungen einer jeden der gegebenen verbinden, und hieraus die Coordinaten ausdrücken; oder, was einerlei ist, die für $AA_{,}BB_{,}$ im vorigen Art. gefundenen Werthe in den Gl. (3) Art. 155 zu substituiren. Man gelangt

aber auch auf weit einfacherem Wege zum Ziele, wenn wir die Art. 93 beschriebene Methode auf gegenwärtigen Fall anwendet.

Es sey also $x'y'z'$ die Coordinaten eines Punktes m' auf der Geraden 1, und $x''y''z''$ die Coordinaten eines Punktes m'' auf der Geraden 2; die Entfernung dieser zwei Punkte von einander ist:

$$\sqrt{\{(x'-x'')^2+(y'-y'')^2+(z'-z'')^2\}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

Nun hat man:

$$\left.\begin{array}{l} y' = ax'+b; \\ z' = a_{,}x'+b_{,}; \end{array}\right\} \text{ und } \left\{\begin{array}{l} y'' = \alpha x'+\beta; \\ z'' = \alpha_{,}x'+\beta_{,}; \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (b)$$

Setzt man also die Werthe von $y'z'$; $y''z''$ in den Ausdruck (a); so wird derselbe:

$$\sqrt{\{(x'-x'')^2+[(ax'+b)-(\alpha x''+\beta)]^2+[(a_{,}x'+b_{,})-(\alpha_{,}x''+\beta_{,})]^2\}}$$

Wenn nun der Punkt m'' fix bleibt, oder als solcher angenommen wird; so wird die Entfernung $m''m'$ am kleinsten, wenn man für x' einen solchen Werth annimmt, welcher der Gleichung:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x'}\right) = 0$$

ein Genüge leistet, wo V die Grösse unter dem Wurzelzeichen ist; oder wenn x' den Werth hat, den die Gleichung:

$$(x'-x'')+a.(y'-y'')+a_{,}(z'-z'') = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

giebt.

Wenn aber der Punkt m' fix bleibt, oder so angenommen wird; dann wird die Entfernung $m'm''$ am kleinsten, wenn man für x'' einen solchen Werth annimmt, welcher der Gleichung:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x''}\right) = 0$$

Genüge leistet, oder sich aus der Gleichung

$$(x'-x'')+\alpha.(y'-y'')+\alpha_{,}.(z'-z'') = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

ergiebt.

Im ersten Falle steht $m''m'$ senkrecht auf der Linie 1, und im andern steht $m'm''$ senkrecht auf der Linie 2. Wenn man aber beide Gleichungen (1) (2) vereinigt, und mit ihnen die

Gleichungen (b) verbindet; so werden die aus ihnen erhaltenen Werthe von $x'y'z'$ und $x''y''z''$ die Coordinaten der Punkte m', m'' seyn, und die durch sie gelegte Gerade wird auf den beiden gegebenen Geraden zugleich senkrecht stehen.

Man kann bemerken, dass die Gl. (1) für sich betrachtet, die Gleichung einer Ebene ist, welche durch den Punkt $(x''y''z'')$ geht, und senkrecht auf der Linie 1 steht; und dass ebenso die Gl. (2), an und für sich genommen, die Gleichung einer Ebene ist, welche durch den Punkt $(x''y''z'')$ geht, und senkrecht auf der Linie 2 steht; die Linie $m'm''$ wird dann die Durchschnittslinie dieser zwei Ebenen seyn.

Die zwei Gleichungen (1) (2) werden, nachdem man für $y'z'y''z''$ ihre Werthe setzt:

$$(1+a^2+a_{,}^2).x'-(1+a\alpha+a_{,}\alpha_{,}).x'' = \{a.(\beta-b)+a_{,}.(\beta_{,}-b_{,})\}$$
$$(1+a\alpha+a_{,}\alpha_{,}).x'-(1+\alpha^2+\alpha_{,}^2).x'' = \{\alpha.(\beta-b)+\alpha_{,}.(\beta_{,}-b_{,})\}$$

Man setze der Kürze wegen:

$$1+a^2+a_{,}^2 = \lambda' \; ; \quad 1+\alpha^2+\alpha_{,}^2 = \lambda'' \; ;$$
$$1+a.\alpha+a_{,}\alpha' = \mu \; ;$$
$$a(\beta-b)+a_{,}(\beta_{,}-b_{,}) = n' \; ; \quad \alpha(\beta-b)+\alpha_{,}(\beta_{,}-b_{,}) = n'' \; ;$$

so dass man habe:

$$\lambda'.x'-\mu.x'' = n' \; ; \quad \mu.x'-\lambda''.x'' = n'' \; ;$$

Aus diesen Gleichungen findet man:

$$x' = \left(\frac{\lambda''n'-\mu n''}{\lambda'\lambda''-\mu^2}\right) \; ; \quad x'' = \left(\frac{\mu n'-\lambda' n''}{\lambda'\lambda''-\mu^2}\right) \quad . \quad (3)$$

In diesen Ausdrücken ist:

$$(\lambda'\lambda''-\mu^2) = \{(a-\alpha)^2+(a_{,}-\alpha_{,})^2+(a_{,}\alpha-a\alpha_{,})^2\}.$$

Die Coordinaten der Durchschnittspunkte der in Rede stehenden Geraden mit den gegebenen zwei Geraden werden nun durch folgende Ausdrücke gefunden:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \left(\frac{\lambda''n'-\mu n''}{\lambda'\lambda''-\mu^2}\right) ; \\ y' &= \left\{\frac{(an'+b\lambda').\lambda''-(an''+b\mu).\mu}{\lambda'\lambda''-\mu^2}\right\} ; \\ z' &= \left\{\frac{(a_{,}n'+b_{,}\lambda').\lambda''-(a_{,}n''+b_{,}\mu)\mu}{\lambda'\lambda''-\mu^2}\right\} ; \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (4)$$

Und:

$$\left.\begin{aligned} x'' &= \left(\frac{\mu n' - \lambda' n''}{\lambda'\lambda'' - \mu^2}\right); \\ y'' &= \left\{\frac{(\alpha n' - \beta\mu)\mu - (\alpha n'' - \beta\lambda'')\lambda'}{\lambda'\lambda'' - \mu^2}\right\}; \\ z'' &= \left\{\frac{(\alpha_{,} n' - \beta_{,}\mu)\mu - (\alpha_{,} n'' - \beta_{,}\lambda'')\lambda'}{\lambda'\lambda'' - \mu^2}\right\}; \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (5)$$

Die Coordinaten - Unterschiede werden also seyn:

$$(x' - x'') = \left\{\frac{(\lambda'' - \mu)n' + (\lambda' - \mu).n''}{\lambda'\lambda'' - \mu^2}\right\};$$

$$(y' - y'') = \left\{\frac{(a\lambda'' - \alpha\mu)n' + (\alpha\lambda' - a\mu)n'' + (\lambda'\lambda'' - \mu^2)(b - \beta)}{\lambda'\lambda'' - \mu^2}\right\};$$

$$(z' - z'') = \left\{\frac{(a_{,}\lambda'' - \alpha_{,}\mu)n' + (\alpha_{,}\lambda' - a_{,}\mu)n'' + (\lambda'\lambda'' - \mu^2)(b_{,} - \beta_{,})}{\lambda'\lambda'' - \mu^2}\right\};$$

Werden diese Ausdrücke gehörig reduzirt; so erhält man endlich:

$$\left.\begin{aligned} (x' - x'') &= \left(\frac{a\alpha_{,} - a_{,}\alpha}{\lambda'\lambda'' - \mu^2}\right).[(a_{,} - \alpha_{,})(b - \beta) - (a - \alpha)(b_{,} - \beta_{,})] \\ (y' - y'') &= \left(\frac{a_{,} - \alpha_{,}}{\lambda'\lambda'' - \mu^2}\right).[(a_{,} - \alpha_{,})(b - \beta) - (a - \alpha)(b_{,} - \beta_{,})] \\ (z' - z'') &= -\left(\frac{(a - \alpha)}{\lambda'\lambda'' - \mu^2}\right).[(a_{,} - \alpha_{,})(b - \beta) - (a - \alpha)(b_{,} - \beta_{,})] \end{aligned}\right\} (6)$$

Nennt man nun den Abstand der zwei Punkte $(x'y'z')$ und $(x''y''z'')$ von einander, P; so hat man:

$$P = \sqrt{\{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2\}},$$

und, wenn man in diesem Ausdrucke die Werthe (6) substituirt:

$$P = \frac{\{(a_{,} - \alpha_{,})(b - \beta) - (a - \alpha)(b_{,} - \beta_{,})\}}{\sqrt{\lambda'\lambda'' - \mu^2}}$$

oder:

$$P = \frac{(a_{,} - \alpha_{,})(b - \beta) - (a - \alpha)(b_{,} - \beta_{,})}{\sqrt{\{(a - \alpha)^2 + (a_{,} - \alpha_{,})^2 + (a_{,}\alpha - a\alpha_{,})^2\}}} \quad . \quad . \quad (7)$$

Dieser Ausdruck zeigt offenbar, dass P in dem Falle gleich Null wird, da:

$$(a_{,} - \alpha_{,})(b - \beta) - (a - \alpha)(b_{,} - \beta_{,}) = 0,$$

d. h. da:

$$\left(\frac{a_{,}-\alpha_{,}}{a-\alpha}\right) = \left(\frac{b_{,}-\beta_{,}}{b-\beta}\right).$$

Diese ist aber die Bedingungsgleichung, dass zwei gerade Linien im Raume sich durchschneiden.

Die Entfernung P lässt sich auf mannigfaltige Weise noch ausdrücken. Da nemlich

$$\sqrt{\{(a-\alpha)^2+(a'-\alpha')^2+(a_{,}\alpha-a\alpha_{,})^2\}}$$

$$= \frac{\sin.(1.2)}{\text{cs}.(1.x).\text{cs}.(2.x)} = \frac{\sin.(1.2)}{a.\alpha\ \text{cs}.(1.y).\text{cs}.(2.y)} = \frac{\sin.(1.2)}{a_{,}.\alpha_{,}.\ \text{cs}.(1.z).\ \text{cs}.(2.z)};$$

so hat man, wenn der Kürze wegen:

$$(a_{,}-\alpha_{,})(b-\beta)-(a-\alpha)(b_{,}-\beta_{,}) = d$$

gesetzt wird:

$$\left.\begin{aligned} P &= \frac{d.\cos.(1.x).\cos.(2.x)}{\sin.(1.2)} \\ P &= \frac{a.\alpha.d.\cos.(1.y).\cos.(2.y)}{\sin.(1.2)} \\ P &= \frac{a_{,}.\alpha_{,}.d.\cos.(1.z).\cos.(2.z)}{\sin.(1.2)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

165. Nennt man die Gerade, welche auf den Linien 1 und 2 zugleich senkrecht steht, die Linie 3; so sind ihre Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} y-y' &= \left(\frac{a_{,}-\alpha_{,}}{a\alpha_{,}-a_{,}\alpha}\right).(x-x'); \\ z-z' &= \left(\frac{a-\alpha}{a_{,}\alpha-a\alpha_{,}}\right).(x-x'); \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (1)$$

Setzt man der Kürze wegen:

$$\sqrt{\{(a-\alpha)^2+(a_{,}-\alpha_{,})^2+(a\alpha_{,}-a_{,}\alpha)^2\}} = N;$$

so ist:

$$\text{cs}.(3.x)=\left\{\frac{a\alpha_{,}-a_{,}\alpha}{N}\right\};\ \text{cs}.(3.y)=\left\{\frac{a_{,}-\alpha_{,}}{N}\right\};\ \text{cs}.(3.z)=\left\{\frac{a-\alpha}{N}\right\} \quad (2)$$

Mittelst dieser Formeln lassen sich nun die Unterschiede der Coordinaten der Punkte $m'm''$ noch auf folgende Art ausdrücken:

$$\left.\begin{aligned}(x'-x'') &= \left\{\frac{d.\cos^2(3.x)}{a\alpha_1-a_1\alpha}\right\};\\ (y'-y'') &= \left\{\frac{d.\cos^2(3.y)}{a_1-\alpha_1}\right\};\\ (z'-z'') &= -\left\{\frac{d.\cos^2(3.z)}{a-\alpha}\right\};\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (3)$$

Die Gl. (1) (2) des vorigen Art. geben dann:

$$\left.\begin{aligned}\left\{\frac{\cos^2(3.x)}{a\alpha_1-a_1\alpha}\right\}+a.\left\{\frac{\cos^2(3.y)}{a_1-\alpha_1}\right\}-a_1.\left\{\frac{\cos^2(3.z)}{a-\alpha}\right\} &= 0;\\ \left\{\frac{\cos^2(3.x)}{a\alpha_1-a_1\alpha}\right\}+\alpha.\left\{\frac{\cos^2(3.y)}{a_1-\alpha_1}\right\}-\alpha_1.\left\{\frac{\cos^2(3.z)}{a-\alpha}\right\} &= 0.\end{aligned}\right\}$$

Der kürzeste Abstand P der zwei Geraden von einander lässt sich endlich noch durch folgende Ausdrücke darstellen:

$$P = \{(b-\beta).\cos.(2.y)-(b_1-\beta_1).\cos.(3.z)\} \quad . \; . \; (4)$$

Und

$$P = \left\{\frac{d.\cos.(3.x)}{a\alpha_1-a_1\alpha}\right\};\; P = \left\{\frac{d.\cos.(3.y)}{a_1-\alpha_1}\right\};\; P = \left\{\frac{d.\cos.(3.z)}{a-\alpha}\right\}. \; (5)$$

Die Vergleichung dieser Ausdrücke mit den Ausdrücken (8) des vorhergehenden Art. giebt:

$$\left.\begin{aligned}\cos.(3.x) &= (a\alpha_1-a_1\alpha).\frac{\cos.(1.x).\cos.(2.x)}{\sin.(1.2)}\\ \cos.(3.y) &= \left(\frac{a_1-\alpha_1}{a\alpha}\right).\frac{\cos.(1.y).\cos.(2.y)}{\sin.(1.2)}\\ \cos.(3.z) &= -\left(\frac{a-\alpha}{a_1\alpha_1}\right).\frac{\cos.(1.z).\cos.(2.z)}{\sin.(1.2)}\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (6)$$

166. Wir wollen von dem eben behandelten allgemeinen Falle die Anwendung zur Bestimmung der Ausdrücke für die kürzesten Abstände einer Geraden von den coordinirten Achsen machen. Es sey also die Linie 2 die Achse der x; in diesem Falle werden $\alpha\alpha_1$ $\beta\beta_1$ gleich Null, und der Ausdruck des kürzesten Abstandes der Linie 1 von der Achse der x wird werden:

$$\left\{\frac{a_1 b-a b_1}{\sqrt{a^2+a_1^2}}\right\}$$

Nimmt man itzt die Linie 2 zur Achse der y an; dann hat man, weil ihre Gleichungen sind $x = 0$, $z = 0$;

$$\alpha_{,} = 0; \quad \beta_{,} = 0; \quad \alpha = 0; \quad \beta = 0;$$

der Ausdruck des kürzesten Abstandes der Linie 1 von der Achse der y wird demnach werden:

$$\left(\frac{b_{,}}{\sqrt{1+a_{,}^2}}\right)$$

Wird endlich die Linie 2 zur Achse der z angenommen; dann wäre $x = 0$, $y = 0$; folglich $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\alpha_{,} = \infty$, $\beta_{,} = 0$. Der kürzeste Abstand der Geraden 1 von der Achse z wird daher seyn:

$$\left(\frac{-b}{\sqrt{1+a^2}}\right)$$

Nennt man also $p'q'r'$ die kürzesten Abstände der Linie 1, und $p''q''r''$ die der Linie 2 von der Achse der xyz; so hat man:

$$p' = \frac{a_{,}b-ab_{,}}{\sqrt{a^2+a_{,}^2}}; \quad q' = \frac{b_{,}}{\sqrt{1+a_{,}^2}}; \quad r' = \frac{-b}{\sqrt{1+a^2}};$$

$$p'' = \frac{\alpha_{,}\beta-\alpha\beta_{,}}{\sqrt{\alpha^2+\alpha_{,}^2}}; \quad q'' = \frac{\beta_{,}}{\sqrt{1+\alpha_{,}^2}}; \quad r'' = \frac{-\beta}{\sqrt{1+\alpha^2}};$$

Diese Resultate stimmen genau mit denen überein, welche wir Art. 96 gefunden haben.

Geht eine dieser Geraden, z. B. die Linie 2 durch den Anfangspunkt der Coordinaten; dann wird

$$\beta = 0, \quad \beta_{,} = 0;$$

Der kürzeste Abstand einer andern Geraden 1 von dieser ist dann:

$$P = \left\{\frac{(a_{,}-\alpha_{,}).b-(a-\alpha).b_{,}}{\sin.(1.2)}\right\}.\cos.(1.x).\cos.(2.x).$$

Nun ist:

$$\cos.(1.x) = \frac{1}{\sqrt{1+a^2+a_{,}^2}}; \quad \cos.(2.x) = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2+\alpha_{,}^2}}$$

folglich wird man haben:

$$P = \frac{(a_{,}b-ab_{,})+(\alpha b_{,}-\alpha_{,}b)}{\sin.(1.2).\sqrt{1+a^2+a_{,}^2}.\sqrt{1+\alpha^2+\alpha_{,}^2}}.$$

Aus dieser Gleichung erhält man:

$$P.\sin.(1.2).\sqrt{1+a^2+a_i^2}.\sqrt{1+a^2+a_i^2} = \{(a_i b - a b_i) + (a b_i - a_i b)\};$$

Nun ist:

$$(a_i b - a b_i) = p'.\sqrt{a^2+a_i^2};$$

$$a b_i = a q'.\sqrt{1+a_i^2}; \quad a_i b = -a_i r'.\sqrt{1+a^2};$$

Folglich wird man zur letzten Gleichung erhalten:

$$P.\sin.(1.2) = \left\{ p'.\frac{\sqrt{a^2+a_i^2}}{\sqrt{1+a^2+a_i^2}}.\cos.(2.x) + q'.\frac{\sqrt{1+a_i^2}}{\sqrt{1+a^2+a_i^2}}.\cos.(2.y) \right.$$

$$\left. + r'.\frac{\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{1+a^2+a_i^2}}.\cos.(2.z) \right\}$$

Oder endlich:

$$P.\sin.(1.2) = \{p'.\sin.(1.x).\cos.(2.x) + q'.\sin.(1.y).\cos.(2.y) + r'.\sin.(1.z).\cos.(2.z)\} \quad \ldots \quad (1)$$

Mit Hilfe dieser Formel findet man den kürzesten Abstand einer Geraden 1 von einer Geraden 2, welche durch den Anfangspunkt geht, wenn man die kürzesten Abstände der Linie 1 von den drei coordinirten Achsen kennt.

Setzt man:

$$a.\cos.(1.x).\cos.(2.x) - \cos.(1.y).\cos.(2.y) = \varkappa$$

$$a_i.\cos.(1.x).\cos.(2.x) - \cos.(1.z).\cos.(2.z) = \varkappa_i$$

dann ist noch:

$$P = \left\{\frac{\varkappa_i b - \varkappa . b_i}{\sin.(1.2)}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Anwendungen der in diesem Capitel entwickelten Prinzipien zur Auflösung einiger Aufgaben.

167. Zum Schlusse dieses Capitels wollen wir von den bisher entwickelten Prinzipien der analytischen Geometrie einige dahin gehörige Aufgaben auflösen.

Es sey die Lage einer Ebene, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht, durch die Gleichung:

$$Ax+By+Cz=0$$

gegeben. Man sucht die Neigungswinkel derselben mit den coordinirten Ebenen.

Nimmt man zu den Neigungswinkeln dieser Ebene gegen die coordinirten Ebenen diejenigen Winkel an, welche die auf den Knotenlinien senkrechten Geraden, davon die einen in der gegebenen Ebene, und die andern in den coordinirten Ebenen liegen, respektive mit einander machen; so hat man nur nöthig, die Gleichungen dieser sechs Geraden zu finden.

Die Gleichungen der Knotenlinien sind, und zwar:

der Linie z . . . $y=-\frac{A}{B}.x$;

der Linie y . . . $z=-\frac{A}{C}.x$;

der Linie x . . . $z=-\frac{B}{C}.y$;

folglich ist die Gleichung der Geraden, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht, und auf der Ebene senkrecht steht:

auf der Linie z . . . $y=+\frac{B}{A}.x$ (a)

. y . . . $z=+\frac{C}{A}.x$ (b)

. x . . . $z=+\frac{C}{B}.y$ (c)

Ferner sind die Gleichungen der Geraden, welche auf z senkrecht steht, und in der gegebenen Ebene liegt:

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{B}{A}.x; \\ z &= -\left(\frac{A^2+B^2}{AC}\right).x; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ (a')$$

Eben so sind die Gleichungen der Geraden, welche auf y senkrecht steht, und in der gegebenen Ebene liegt:

$$\left.\begin{aligned} y &= -\left(\frac{A^2+C^2}{AB}\right).x\,; \\ z &= +\frac{C}{A}.x\,; \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (b')$$

Endlich sind die Gleichungen der Geraden, welche auf x senkrecht steht, und in der gegebenen Ebene liegt:

$$\left.\begin{aligned} z &= \frac{C}{B}.y \\ x &= -\left(\frac{B^2+C^2}{AB}\right).y \end{aligned}\right\} \text{ oder } \left.\begin{aligned} y &= -\left(\frac{AB}{B^2+C^2}\right).x \\ z &= -\left(\frac{AC}{B^2+C^2}\right).x \end{aligned}\right\} (c')$$

Wendet man nun die Formel (3) Art. 157 auf diese drei Fälle an; so findet man:

im ersten Falle:

$$\cos.(a.a') = \frac{1+\frac{B}{A}.\frac{B}{A}}{\sqrt{1+\frac{B^2}{A^2}+\left(\frac{A^2+B^2}{AC}\right)^2}.\sqrt{1+\frac{B^2}{A^2}}}$$

$$\text{d. i. } \cos.(a.a') = \frac{\sqrt{A^2+B^2}}{\sqrt{(A^2+B^2)+\frac{(A^2+B^2)^2}{C^2}}} = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

wo man mit $(a.a')$ den Winkel bezeichnet hat, welchen diejenigen Geraden machen, deren Gleichungen (a) und (a') sind.

Eben so hat man im zweiten Falle:

$$\text{cs.}(b.b') = \frac{1+\frac{C}{A}.\frac{C}{A}}{\sqrt{1+\left(\frac{A^2+C^2}{AB}\right)^2+\frac{C^2}{A^2}}.\sqrt{1+\frac{C^2}{A^2}}} = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Endlich ist im dritten Falle:

$$\text{cs.}(c.c') = \frac{1+\frac{C}{B}.\frac{C}{B}}{\sqrt{1+\frac{C^2}{B^2}+\left(\frac{B^2+C^2}{AB}\right)^2}.\sqrt{1+\frac{C^2}{B^2}}} = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Der Erklärung gemäss sind nun die mit $(a.a')$, $(b.b')$, $(c.c')$ bezeichneten Winkel dieselben, als die Winkel, welche die gegebene Ebene mit den coordinirten Ebenen xy, xz, yz macht.

Sieht man die Winkel, welche die auf die gegebene Ebene senkrechte Gerade mit den Achsen der z, y, x macht, als die Neigungswinkel dieser Ebene gegen die coordinirten Ebenen xy, xz, yz an; so findet man, wenn die Linie mit 1 bezeichnet wird, und weil ihre Gleichungen sind:

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{B}{A}.x \\ z &= \frac{C}{A}.x \end{aligned}\right\}$$

$$\cos.(1.x) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{B^2}{A^2}+\frac{C^2}{A^2}}} = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$\cos.(1.y) = \frac{A.\frac{B}{A}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$\cos.(1.z) = \frac{A.\frac{C}{A}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

168. *Durch einen gegebenen Punkt einer Ebene eine gerade Linie zu ziehen, welche auf einer gegebenen Geraden senkrecht steht; (nemlich in dem Sinne, dass ihre correlativen Geraden einen rechten Winkel mit einander machen.)*

Es seyen $x'y'z'$ die Coordinaten eines gegebenen Punktes; da die gegebene Ebene durch diesen Punkt geht; so hat ihre Gleichung die Form:

$$A.(x-x')+B.(y-y')+C.(z-z') = 0 \quad . \quad . \quad (a)$$

Die Gleichungen der gegebenen Geraden seyen ferner:

$$\left.\begin{aligned} y &= ax+b \\ z &= a_{,}x+b_{,} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

Endlich seyen die Gleichungen der gesuchten Geraden, welche durch den Punkt $(x'y'z')$ gehen soll:

$$\left.\begin{array}{l} y-y' = \alpha.(x-x') \\ z-z' = \alpha_{,}.(x-x') \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (c)$$

Die Lage dieser Geraden in der gegebenen Ebene wird nun bekannt seyn, wenn die Grössen $\alpha\alpha_{,}$ bekannt sind; diese hat man nun aus zwei Bedingungsgleichungen zu finden, welche man aus den Forderungen der Aufgabe herleitet.

Weil die gesuchte Gerade in der gegebenen Ebene liegen soll, so hat man:

$$A+B\alpha+C\alpha_{,} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (\alpha)$$

Und weil sie auf der gegebenen Geraden senkrecht stehen soll, so hat man:

$$1+a\alpha+a_{,}\alpha_{,} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (\beta)$$

Aus diesen zwei Gl. (α) (β) findet man:

$$\alpha = \left(\frac{C-Aa_{,}}{Ba_{,}-Ca}\right); \quad \alpha_{,} = \left(\frac{Aa-B}{Ba_{,}-Ca}\right) \quad \ldots \quad (\gamma)$$

Die Gleichungen der gesuchten Geraden sind also:

$$\left.\begin{array}{l} y-y' = \left(\frac{C-Aa_{,}}{Ba_{,}-Ca}\right).(x-x'); \\ z-z' = \left(\frac{Aa-B}{Ba_{,}-Ca}\right).(x-x'); \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (1)$$

Setzt man der Kürze wegen:

$$\sqrt{\{(Aa-B)^2+(C-Aa_{,})^2+(Ba_{,}-Ca)^2\}} = N;$$

und nennt die gesuchte Gerade die Linie 2; so hat man:

$$\left.\begin{array}{l} \cos.(2.x) = -\left(\frac{Ba_{,}-Ca}{N}\right); \\ \cos.(2.y) = +\left(\frac{C-Aa_{,}}{N}\right); \\ \cos.(2.z) = -\left(\frac{Aa-B}{N}\right); \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Die Winkel, welche diese Linie mit den Knotenlinien der Ebene macht, findet man endlich:

$$\left.\begin{aligned}\cos.(2.\bar{x}) &= \frac{(B^2+C^2)-A(Ba+Ca_{\prime})}{N.\sqrt{B^2+C^2}}\,;\\ \cos.(2.\bar{y}) &= \frac{B(A+Ca_{\prime})-a(A^2+C^2)}{N.\sqrt{A^2+C^2}}\,;\\ \cos.(2.\bar{z}) &= \frac{(A^2+B^2)a_{\prime}-C(A+Ba)}{N.\sqrt{A^2+B^2}}\,;\end{aligned}\right\} \quad \ldots (3)$$

169. *Wenn die Lage eines Punktes gegen zwei rechtwinklichte coordinirte Achsen in einer Ebene und die Gleichungen zweier Geraden in dieser Ebene, welche auf einander senkrecht stehen, gegeben sind; die Lage dieses Punktes gegen diese zwei gerade Linien zu finden.*

Diese Aufgabe ist mit derjenigen einerlei, welche wir oben als Problem der Transformation der rechtwinklichten Coordinaten in einer Ebene aufgelöst haben. Es seyen also:

$$\left.\begin{aligned} y &= a'.x\,; \\ y &= a''.x\,; \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\ldots\ldots\ldots (1)\\ &\ldots\ldots\ldots (2)\end{aligned}$$

die Gleichungen der zwei gegebenen Geraden in der Ebene xy, und $x'y'$ die Coordinaten eines Punktes in dieser Ebene. Die Lage dieses Punktes ist bekannt gegen das gegebene System der zwei auf einander senkrecht stehenden Geraden, wenn man seine Abstände von ihnen kennt. Nun ist, wenn man den Abstand dieses Punktes von der Linie 1 mit $y_{\prime}$ und den von der Linie 2 mit $x_{\prime}$ bezeichnet:

$$x_{\prime} = \frac{y'-a''x'}{\sqrt{1+a''^2}}\,;\quad y_{\prime} = \frac{y'-a'x'}{\sqrt{1+a'^2}}\,;$$

Weil beide gerade Linien 1, 2 auf einander senkrecht stehen; so hat man:

$$1+a'a'' = 0\,;$$

woraus:

$$a'' = -\frac{1}{a'}\,.$$

Man hat also:

$$x_{\prime} = \left(\frac{a'y'+x'}{\sqrt{1+a'^2}}\right);\quad y_{\prime} = \left(\frac{y'-a'x'}{\sqrt{1+a'^2}}\right).$$

Diese Resultate stimmen genau mit denen überein, welche Art. 59 Gl. (4) gefunden worden sind. Denn es ist, wenn man den Winkel, welchen die Linie 1 mit der Achse der x macht, durch χ bezeichnet:

$$\frac{1}{\sqrt{1+a'^2}} = \cos.\chi\,; \quad \frac{a'}{\sqrt{1+a'^2}} = \sin.\chi\,.$$

Schliessen aber die zwei gegebenen Geraden einen Winkel ν ein; alsdann ziehe man durch den gegebenen Punkt die zu ihnen parallele Linien, welche jene respektive in Punkten, die wir $c'c''$ nennen wollen, schneiden. Nennt man ihre Abstände vom Anfangspunkte $x''y''$; so erkennt man leicht, dass diese die schiefwinklichten Coordinaten des Punktes m sind; nun ist:

$$x'' = \frac{y_{,}}{\sin.\nu}\,; \quad y'' = \frac{x_{,}}{\sin.\nu}\,,$$

folglich:

$$x'' = \left(\frac{y' - a''x'}{\sin.\nu.\sqrt{1+a''^2}}\right); \quad y'' = \left(\frac{y' - a'x'}{\sin.\nu.\sqrt{1+a'^2}}\right).$$

Nun ist:

$$\sin.\nu = \frac{a''-a'}{\sqrt{1+a''^2}\,.\,\sqrt{1+a'^2}}\,;$$

also:

$$x'' = \frac{(y'-a''x').\sqrt{1+a'^2}}{a''-a'}\,; \quad y'' = \frac{(y'-a'x').\sqrt{1+a''^2}}{a''-a'}\,.$$

170. *Gegen ein rechtwinklichtes Coordinatensystem ist die Lage eines andern durch die Gleichungen der Achsen gegeben. Man sucht die Lage eines Punktes, dessen Coordinaten $x'y'z'$ seyn sollen, gegen das zweite System.* Es seyen nun:

$$\left.\begin{aligned} y &= a'x\,; \\ z &= a'_{,}x\,; \end{aligned}\right\}(1) \quad \left.\begin{aligned} y &= a''x\,; \\ z &= a''_{,}x\,; \end{aligned}\right\}(2) \quad \left.\begin{aligned} y &= a'''x\,; \\ z &= a'''_{,}x\,; \end{aligned}\right\}(3)$$

die Gleichungen, welche die Lagen der drei Achsen des zweiten Systemes gegen das erste bestimmen. Wir wollen diese Achsen mit $x_{,}y_{,}z_{,}$ bezeichnen. Nun sey die Gl. der Ebene $x_{,}y_{,}$:

$$Ax + By + Cz = 0\,.$$

Da sowohl die Linie (1) als (2) in dieser Ebene liegen soll, so müssen ABC so angenommen werden, dass sie den zwei Bedingungsgleichungen Genüge leisten:

$$\left.\begin{aligned} A+Ba+Ca'_{,} &= 0; \\ A+Ba''+Ca''_{,} &= 0; \end{aligned}\right\}$$

Hieraus findet man folgende für ABC annehmbaren Werthe:

$$A=(a'a''_{,}-a'_{,}a'')\;;\quad B=(a'_{,}-a''_{,})\;;\quad C=(a''-a')\;;$$

Die Gleichung der Ebene $x_{,}y_{,}$ wird also seyn:

$$(a'a''_{,}-a'_{,}a'').x+(a'_{,}-a''_{,}).y+(a''-a').z=0 \quad . \quad . (a)$$

Auf ähnliche Art ist die Gleichung der Ebene $x_{,}z_{,}$:

$$(a'a'''_{,}-a'_{,}a''')x+(a'_{,}-a'''_{,})y+(a'''-a')z=0. \quad . (b)$$

Endlich ist die Gleichung der Ebene $y_{,}z_{,}$:

$$(a''a'''_{,}-a''_{,}a''')x+(a''_{,}-a'''_{,})y+(a'''-a'')z=0 \quad . (c)$$

Die Abstände des gegebenen Punktes, dessen Coordinaten $x'y'z'$ sind, von diesen drei Ebenen sind die neuen Coordinaten $x_{,}y_{,}z_{,}$ desselben Punktes. Setzt man nun der Kürze wegen:

$$\sqrt{\{(a'a''_{,}-a'_{,}a'')^2+(a'_{,}-a''_{,})^2+(a''-a')^2\}} = N_{,,,};$$

$$\sqrt{\{(a'a'''_{,}-a'_{,}a''')^2+(a'_{,}-a'''_{,})^2+(a'''-a')^2\}} = N_{,,};$$

$$\sqrt{\{(a''a'''_{,}-a''_{,}a''')^2+(a''_{,}-a'''_{,})^2+(a'''-a'')^2\}} = N_{,};$$

Dann hat man, gemäss Art. 128 Gl. (2):

$$\left.\begin{aligned} x_{,} &= \left\{\frac{(a''_{,}a'''-a''a'''_{,})x'+(a'''_{,}-a''_{,})y'+(a''-a''')z'}{N_{,}}\right\} \\ y_{,} &= \left\{\frac{(a'_{,}a'''-a'a'''_{,}).x'+(a'''_{,}-a'_{,}).y'+(a'-a''').z'}{N_{,,}}\right\} \\ z_{,} &= \left\{\frac{(a''_{,}a'''-a''a'''_{,})x'+(a'''_{,}-a''_{,})y'+(a''-a''')z'}{N_{,,,}}\right\} \end{aligned}\right\} . (1)$$

In diesen Gleichungen sind die Grössen $a'a''a'''a'_{,}a''_{,}a'''_{,}$ durch folgende Bedingungen mit einander verbunden:

$$\left.\begin{aligned} 1+a'a''+a'_{,}a''_{,} &= 0; \\ 1+a'a'''+a'_{,}a'''_{,} &= 0; \\ 1+a''a'''+a''_{,}a'''_{,} &= 0; \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . (2)$$

weil vorausgesetzt wird, dass die drei Linien 1, 2, 3 auf einander senkrecht stehen.

Die Formeln (1) stimmen genau mit denjenigen überein, welche wir Art. 65 angezeigt haben, indem man weis, dass z. B.

$$\left(\frac{a''_{,}a'''-a''a'''_{,}}{N_{,}}\right) = \cos.(x'.x_{,}).$$

FÜNFTES CAPITEL.

Relationen zwischen einer Geraden und einer Ebene.

Bestimmung der Coordinaten der Durchschnittspunkte einer Geraden im Raume mit einer Ebene und der Projektion jener Geraden in den coordinirten Ebenen mit den Knotenlinien der gegebenen Ebene. Besondere Betrachtung des Falles, da die Ebene durch einen gegebenen Punkt geht.

171. Indem wir im gegenwärtigen Capitel die Beziehungen betrachten, welche eine Gerade im Raume und eine Ebene gegen einander haben, werden wir voraussetzen, dass die Gleichungen der Geraden sind:

$$\left.\begin{aligned} y &= ax+b \\ z &= a_i x+b_i \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

und dass die Gleichung der Ebene sey:

$$Ax+By+Cz+D=0 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Wir werden ferner die gegebene Gerade die Linie 1, und die gegebene Ebene die Ebene I nennen.

Wenn man die Gerade gehörig verlängert, so wird sie, wenn sie nicht in einer zur gegebenen parallelen Ebene liegt, jene in irgend einem Punkte treffen. Da dieser Durchschnittspunkt zugleich ein Punkt der gegebenen Geraden und der Ebene ist; so werden seine Coordinaten, welche wir mit $\acute{x}\acute{y}\acute{z}$ be-

zeichnen wollen, von der Beschaffenheit seyn, dass sie sowohl den Gleichungen (1) als der Gleichung (2) ein Genüge leisten. Die Verbindung dieser drei Gleichungen und ihre Auflösung giebt sonach die Werthe dieser Coordinaten selbst. Man findet nun:

$$\left.\begin{aligned} x &= -\left\{\frac{Bb+Cb_{,}+D}{A+B\ +Ca_{,}}\right\}; \\ y &= \left\{\frac{Ab+C(a_{,}b-ab_{,})-Da}{A+Ba+Ca_{,}}\right\} \\ z &= \left\{\frac{Ab_{,}+B(ab_{,}-a_{,}b)-Da_{,}}{A+Ba+Ca_{,}}\right\} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (3)$$

Im Falle, als die Grössen ABC und $aa_{,}$ solche Werthe haben dass

$$A+Ba+Ca_{,}=0;$$

werden die Werthe der Coordinaten xyz unendlich gross, und diess zeigt an, dass gar kein Durchschnittspunkt der Geraden und der Ebene statt hat. Diess wird sich ereignen, so oft die Gerade in einer Ebene liegt, welche zur gegebenen Ebene *I* parallel ist. Die angezeigte Relation zwischen ABC und $aa_{,}$ wird demnach die Bedingungsgleichung seyn, dass die Gerade zur Ebene parallel ist. Wir werden weiter unten auf diese Relation zurück kommen.

172. Im Falle, als eine Gerade im Raume eine Ebene schneidet, werden auch die Projektionen dieser Geraden in den Ebenen xy, xz, yz die Knotenlinien der gegebenen Ebene in eben denselben respektiven coordinirten Ebenen schneiden.

Nennt man die Coordinaten der Durchschnittspunkte dieser Linien in den Ebenen xy, xz, yz respektive pq, $p_{,}q_{,}$, $p_{,,}q_{,,}$:

$$p=-\left(\frac{D+Bb}{A+Ba}\right); \quad q=\left(\frac{Ab-Da}{A+Ba}\right) \quad .\ .\ (1)$$

$$p_{,}=-\left(\frac{D+Cb_{,}}{A+Ca_{,}}\right); \quad q_{,}=\left(\frac{Ab_{,}-Da_{,}}{A+Ca_{,}}\right) \quad .\ .\ (2)$$

$$p_{,,}=\left(\frac{C(a_{,}b-ab_{,})-Da}{Ba+Ca_{,}}\right); \quad q_{,,}=\left(\frac{B(ab_{,}-a_{,}b)-Da_{,}}{Ba+Ca_{,}}\right) \quad (3)$$

Man findet diese Ausdrücke sehr leicht aus denen von $\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$ des vorigen Art.; und zwar die Ausdrücke (1) aus den Formeln für $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$, wenn darinn $C = 0$ gesetzt wird; die Ausdrücke (2) aus den Formeln für $\mathfrak{x}\mathfrak{z}$, wenn man darinn $B = 0$ setzt; endlich die Ausdrücke (3) aus den Formeln für $\mathfrak{y}\mathfrak{z}$; wenn darinn $A = 0$ angenommen wird.

173. Wir wollen nun aus diesen allgemeinen Ausdrücken der Coordinaten des Durchschnittspunktes der Geraden mit der Ebene die des besondern Falles, entwickeln, da die Ebene durch einen gegebenen Punkt des Raumes geht. Sind $x'y'z'$ die Coordinaten dieses Punktes; so hat man, weil ihre Gleichung ist:

$$A(x-x')+B(y-y')+C(z-z') = 0$$

offenbar: $D = -(Ax'+By'+Cz')$.

Setzt man diesen Werth von D in die Ausdrücke für $\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$ so erhält man,

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{x} &= \frac{Ax'+B(y'-b)+C(z'-b_{,})}{A+Ba+Ca_{,}}\,;\\
\mathfrak{y} &= \frac{A(ax'+b)+Bay'+C(az'+a_{,}b-ab_{,})}{A+Ba+Ca_{,}}\,;\\
\mathfrak{z} &= \frac{A(a_{,}x'+b_{,})+B(a_{,}y'+ab_{,}+a_{,}b)+Ca_{,}z'}{A+Ba+Ca_{,}}\,;
\end{aligned}\right\}\cdot(1)$$

Wenn endlich noch angenommen wird, dass auch die Gerade im Raume durch einen Punkt geht, dessen Coordinaten $x_{,}y_{,}z_{,}$ sind; dann hat man, weil ihre Gleichungen seyn werden:

$$\left.\begin{aligned}
y-y_{,} &= a.(x-x_{,})\\
z-z_{,} &= a_{,}(x-x_{,})
\end{aligned}\right\}$$

offenbar: $b = (y_{,}-ax_{,})$; $b_{,} = (z_{,}-a_{,}x_{,})$.

Bringt man diese Werthe von $bb_{,}$ in die Ausdrücke (1); so findet man:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{x} &= \frac{[A(x'-x_{,})+B(y'-y_{,})+C(z'-z_{,})]+x_{,}(A+Ba+Ca_{,})}{A+Ba+Ca_{,}}\\
\mathfrak{y} &= \frac{a[A(x'-x_{,})+B(y'-y_{,})+C(z'-z_{,})]+y_{,}(A+Ba+Ca_{,})}{A+Ba+Ca_{,}}\\
\mathfrak{z} &= \frac{a_{,}[A(x'-x_{,})+B(y'-y_{,})+C(z'-z_{,})]+z_{,}(A+Ba+Ca_{,})}{A+Ba+Ca_{,}}
\end{aligned}\right\}(2)$$

Die Unterschiede der Coordinaten der Punkte $(\dot{x}\dot{y}\dot{z})$ und $(x_{,}y_{,}z)$, welche auf der Geraden liegen, sind:

$$\left.\begin{array}{l} (\dot{x}-x_{,}) = \left\{\dfrac{A(x'-x_{,})+B(y'-y_{,})+C(z'-z_{,})}{A+Ba+Ca_{,}}\right\} \\ (\dot{y}-y_{,}) = \left\{\dfrac{A(x'-x_{,})+B(y'-y_{,})+C(z'-z_{,})}{A+Ba+Ca_{,}}\right\}.a; \\ (\dot{z}-z_{,}) = \left\{\dfrac{A(x'-x_{,})+B(y'-y_{,})+C(z'-z_{,})}{A+Ba+Ca_{,}}\right\}.a_{,}; \end{array}\right\} \quad (3)$$

Der Abstand dieser beiden Punkte von einander ist:

$$\sqrt{\{(\dot{x}-x_{,})^2+(\dot{y}-y_{,})^2+(\dot{z}-z_{,})^2\}} =$$

$$\{A(x'-x_{,})+B(y'-y_{,})+C(z'-z_{,})\}.\frac{\sqrt{1+a^2+a_{,}^2}}{A+Ba+Ca_{,}} \quad . \quad . \quad (4)$$

Setzt man wieder für $(Ax'+By'+Cz')$ den Buchstaben D; so erhält man:

$$-(Ax_{,}+By_{,}+Cz_{,}+D).\frac{\sqrt{1+a^2+a_{,}^2}}{A+Ba+Ca_{,}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

und dieses ist der Ausdruck des Abstandes eines Punktes $(x_{,}y_{,}z_{,})$ der gegebenen Geraden vom Durchschnittspunkte dieser Geraden mit der gegebenen Ebene.

Der Abstand desselben Punktes $(x_{,}y_{,}z_{,})$ von der gegebenen Ebene, die wir im dritten Capitel mit $E_{,}$ bezeichnet haben, ist:

$$E_{,} = \frac{-(Ax_{,}+By_{,}+Cz_{,}+D)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Bezeichnet man die Entfernung der Punkte $(\dot{x}\dot{y}\dot{z})$ und $(x_{,}y_{,}z_{,})$ mit $D_{,}$; so erhält man:

$$D_{,} = \frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{1+a^2+a_{,}^2}}{A+Ba+Ca_{,}}.E_{,};$$

Hieraus folgt nun:

$$\frac{E_{,}}{D_{,}} = \frac{A+Ba+Ca_{,}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{1+a^2+a_{,}^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Ausdrücke für den Sinus, Cosinus und die Tangente des Neigungswinkels der gegebenen Geraden im Raume gegen die gegebene Ebene. Bedingungen für den Parallellismus einer Geraden und einer Ebene, und der Perpendikularität der Geraden und der Ebene. Bestimmungen der Winkel der Geraden mit den Knotenlinien der Ebene, und der Projektionen dieser Geraden mit den Knotenlinien. Allgemeine Relationen zwischen diesen Winkeln. Betrachtung des besondern Falles, da die Gerade in der Ebene liegt.

174. Wenn eine Ebene von einer Geraden geschnitten wird; so ist diese gegen jene unter einem gewissen Winkel geneigt, den wir mit $(1.I)$ bezeichnen wollen. Denkt man sich nun von irgend einem Punkte m der Geraden, dessen Coordinaten $x_{,}y_{,}z_{,}$ seyn mögen, auf die gegebene Ebene, welche die verlängerte Gerade in einem Punkte, den wir o nennen wollen, schneide, ein Perpendikel herabgelassen, welches dieselbe Ebene im Punkte p treffe; so entsteht, wenn man o mit p durch eine gerade op verbindet, ein rechtwinklichtes Dreieck opm; in diesem ist der Winkel mop der Neigungswinkel der gegebenen Geraden gegen die Ebene; ferner mp das Loth vom Punkte m auf die Ebene, welches mit $E_{,}$ bezeichnet wurde; endlich ist om der Abstand des Durchschnittspunktes o der Geraden und Ebene vom Punkte m, welchen Abstand wir mit $D_{,}$ bezeichnet haben.

Es ist also:

$$D_{,} : E_{,} = 1 : \sin.(1.I).$$

oder:

$$\frac{E_{,}}{D_{,}} = \sin.(1.I);$$

d. h. das Verhältniss $\frac{E_{,}}{D_{,}}$ drückt den Sinus des Neigungswinkels der Geraden im Raume gegen die gegebene Ebene aus. Den Ausdruck für dieses Verhältniss haben wir aber schon im vorhergehenden Art. Gl. (6) gefunden; wir schliessen sonach, dass

$$\sin.(1.I) = \frac{A + Ba + Ca_{,}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.\sqrt{1 + a^2 + a_{,}^2}} \quad . \quad . \quad (1)$$

Uebrigens kann dieser Ausdruck noch auf folgende Art entwickelt werden.

Stellt man sich durch den Anfangspunkt der Coordinaten zwei gerade Linien gezogen vor, davon die eine senkrecht auf der Ebene steht, welche wir die Linie $1_{,}$ nennen wollen; die andere aber die correlative Linie der gegebenen Geraden sey; alsdann wird der Winkel, den diese zwei Geraden im Anfangspunkte mit einander bilden, und welchen wir mit $(1.1_{,})$ bezeichnen wollen, die Ergänzung des Neigungswinkels $(1.I)$ zu 90° seyn, d. h. es ist:

$$(1.1_{,}) = 90^\circ - (1.I).$$

Nun sind die Gleichungen der Linie $1_{,}$ (gemäss Art. 115 Gl. (6)):

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{B}{A}\cdot x; \\ z &= \frac{C}{A}\cdot x; \end{aligned}\right\}$$

und die Gleichungen der correlativen Linie der gegebenen Geraden sind:

$$\left.\begin{aligned} y &= ax; \\ z &= a_{,}x; \end{aligned}\right\}$$

folglich ist:

$$\cos.(1.1_{,}) = \frac{1 + \left(\frac{B}{A}\right)\cdot a + \left(\frac{C}{A}\right)\cdot a_{,}}{\sqrt{1 + \left(\frac{B}{A}\right)^2 + \left(\frac{C}{A}\right)^2}\cdot\sqrt{1 + a^2 + a_{,}^2}},$$

Multiplizirt man den Zähler und Nenner dieses Ausdruckes mit A, und bemerkt, dass

$$\cos.(1.1_{,}) = \sin.(1.I);$$

so geht alsobald die Gleichung (1) hervor.

Setzt man $\frac{B}{A} = \alpha$, $\frac{C}{A} = \alpha_{,}$; in den Formeln (4) (5) des Art. 157; so hat man ferner:

$$\cos.(1.I) = \frac{\sqrt{\{(B - Aa)^2 + (C - A.a_{,})^2 + (Ca - Ba_{,})^2\}}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.\ \sqrt{1 + a^2 + a_{,}^2}}; \quad . \ (2)$$

und:

$$\text{tg}.(1.I) = \frac{A + Ba + Ca_{,}}{\sqrt{(B - Aa)^2 + (C - Aa_{,})^2 + (Ca - Ba_{,})^2}}; \quad . \ . \ (3)$$

Die Grösse, welche im Zähler des Ausdruckes (2) steht, ist uns schon bei Auflösung einer Aufgabe im Art. 168 vorgekommen, wo wir sie mit N bezeichnet haben. Verbindet man nun mit der Gl. (2) daselbst die Gl. (2) des gegenwärtigen Art.; so findet man:

$$\left.\begin{array}{l} \cos.(2.x).\cos.(1.I) = (Ca - Ba_{,}) : \sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{1+a^2+a_{,}^2} \\ \cos.(2.y).\cos.(1.I) = (C - Aa_{,}) : \sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{1+a^2+a_{,}^2} \\ \cos.(2.z).\cos.(1.I) = (B - A.a) : \sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{1+a^2+a_{,}^2} \end{array}\right\} (4)$$

wo 2 eine Gerade ist, welche in der gegebenen Ebene liegt, und senkrecht auf der gegebenen Geraden steht.

175. Der Ausdruck (1) des vorhergehenden Art. giebt zu erkennen, wann die Gerade im Raume zur gegebenen Ebene parallel ist. In diesem Falle ist nemlich $(1.I) = 0$, oder $\sin.(1.I) = 0$; folglich:

$$A + B.a + C.a_{,} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (VI)$$

Diese Gleichung drückt die Relation aus, welche zwischen den Grössen ABC und $aa_{,}$ obwalten müsse, wenn die Gerade zur Ebene parallel seyn soll. Man nennt desswegen diese Relation die Bedingungsgleichung des Parallelismus einer Geraden und einer Ebene. In diesem Falle giebt es keinen Durchschnittspunkt der Geraden und der Ebene, wie wir schon oben angemerkt haben, indem die Werthe der Coordinaten xyz unendlich gross werden.

Der Ausdruck (2) desselben Art. giebt eben so zu erkennen, wann eine Gerade auf einer Ebene senkrecht steht. In diesem Falle ist nemlich $(1.I) = 90°$, oder $\cos.(1.I) = 0$; folglich:

$$\{(B - Aa)^2 + (C - Aa_{,})^2 + (Ca - Ba_{,})^2\} = 0.$$

Weil nun die Summe dreier Quadrate nur in dem Falle verschwinden kann, in welchem jedes einzelne für sich $= 0$ ist; so schliessen wir hieraus, dass für den in Rede stehenden Fall:

$$(B - Aa) = 0; \; (C - Aa_{,}) = 0; \; (Ca - Ba_{,}) = 0.$$

Da die dritte dieser Gleichungen schon eine Folge der zwei ersten ist; so ergiebt sich hieraus, dass, wenn die Grössen $aa_{,}$ und ABC nur den zwei ersten dieser Gleichungen ein Genüge leisten, der Zähler des Ausdruckes (2) des vorigen Art., d. i. cos.(1. I) verschwindet. Die Gleichungen:

$$a = \left(\frac{B}{A}\right);\ a_{,} = \left(\frac{C}{A}\right) \quad \ldots\ldots \quad \text{(VII)}$$

enthalten also die Relation, welche zwischen den Grössen ABC und $aa_{,}$ obwalten müsse, wenn die Gerade auf der Ebene senkrecht stehen soll. Diese Gleichungen werden aus dem Grunde auch die **Bedingungsgleichungen der Perpendikularität** einer Geraden auf einer Ebene genannt.

In diesem Falle durchschneidet die gegebene Gerade die Ebene in diesem Punkte, und die Ausdrücke der Coordinaten dieses Punktes werden seyn:

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{A(B.b+C.b_{,}+D)}{A^2+B^2+C^2}; \\ y &= \frac{(A^2+B^2+C^2).b-B.(Bb+Cb_{,}+D)}{A^2+B^2+C^2}; \\ z &= \frac{(A^2+B^2+C^2).b_{,}-C.(Bb+Cb_{,}+D)}{A^2+B^2+C^2}; \end{aligned}\right\} \quad \text{(1)}$$

Nennt man $x_{,}y_{,}z_{,}$ die Coordinaten eines Punktes auf der Geraden im Raume, welche hier senkrecht auf der gegebenen Ebene angenommen wird; dann findet man aus dem Ausdrucke (5) Art. 173 für die Entfernung dieses Punktes $(x_{,}y_{,}z_{,})$ vom Durchschnittspunkte der Geraden mit der Ebene, welche in diesem Falle das Loth ist, das aus dem Punkte $(x_{,}y_{,}z_{,})$ auf die gegebene Ebene herabgelassen wird:

$$\left\{\frac{Ax_{,}+By_{,}+Cz_{,}+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right\},$$

ein Ausdruck, welchen wir schon auf mehrere andere Arten gefunden haben.

Setzt man $B = A.a$; $C = A.a_{,}$ in den Ausdrücken (1) Art. 171; dann findet man:

$$\left.\begin{array}{l} x = -\left(\dfrac{ab+a_{,}b_{,}+\left(\dfrac{D}{A}\right)}{1+a^2+a_{,}^2}\right) \\ y = \left(\dfrac{b+a_{,}.(a_{,}b-ab_{,})-\left(\dfrac{D}{A}\right).a}{1+a^2+a_{,}^2}\right) \\ z = \left(\dfrac{b_{,}+a.(ab_{,}-a_{,}b)-\left(\dfrac{D}{A}\right).a_{,}}{1+a^2+a_{,}^2}\right) \end{array}\right\} \quad \ldots (2)$$

Geht die Ebene durch den Anfangspunkt der Coordinaten, dann hat man:

$$D = 0;$$

und die vorhergehenden Formeln werden in dieser Annahme:

$$\left.\begin{array}{l} x = -\left(\dfrac{ab+a_{,}b_{,}}{1+a^2+a_{,}^2}\right); \\ y = \left(\dfrac{(1+a_{,}^2).b-a.a_{,}b_{,}}{1+a^2+a_{,}^2}\right); \\ z = \left(\dfrac{(1+a^2).b_{,}-a.a_{,}.b}{1+a^2+a_{,}^2}\right); \end{array}\right\} \quad \ldots (3)$$

Diese sind die nemlichen Ausdrücke, welche wir Art. 94 Gl. (1) für die Coordinaten desjenigen Punktes gefunden haben, in welchem eine Gerade von dem aus dem Anfangspunkte der Coordinaten auf sie gefällten Lothe getroffen wird.

In der That ist auch die Gerade, welche den Anfangspunkt mit dem Durchschnittspunkte der auf die Ebene senkrechten Linie verbindet, jenes Loth auf diese gegebene Gerade im Raume.

In den Ausdrücken (1) wird man bemerken, dass zwischen den Coordinaten xyz eine gewisse Relation statt findet; es zeigt sich nemlich augenscheinlich, dass:

$$y = b + \frac{B}{A}.x; \quad z = b_{,} + \frac{C}{A}.x$$

diese Relationen gehören nemlich für alle Punkte der gegebenen Geraden, welche auf der Ebene senkrecht steht.

176. Wir wollen itzt die Ausdrücke für die Sinusse, Cosinusse und Tangenten der Winkel suchen, welche eine Gerade im Raume und ihre Projektionen in den coordinirten Ebenen mit den Knotenlinien einer Ebene machen. Wir werden die Knotenlinien wieder mit $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ bezeichnen, so dass $\bar{x}$ die Durchschnittslinie der Ebene *I* mit der Ebene yz ist u. s. w.

Die Gleichungen der Knotenlinien sind nun, und zwar:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{der Linie } \bar{x} \ldots & z = -\dfrac{B}{C}\cdot y - \dfrac{D}{C}; \\ \ldots \bar{y} \ldots & z = -\dfrac{A}{C}\cdot x - \dfrac{D}{C}; \\ \ldots \bar{z} \ldots & y = -\dfrac{A}{B}\cdot x - \dfrac{D}{B}; \end{array}\right\} \ldots (a)$$

und die Gleichungen der gegebenen Geraden 1 sind:

$$\left.\begin{array}{l} y = ax + b; \\ z = a_1 x + b_1; \end{array}\right\} \ldots\ldots (b)$$

Bezeichnet man die Projektionen der Geraden 1 in den coordinirten Ebenen xy, xz, yz mit $1'1''1'''$; so ist die Gleichung:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{der Linie } 1' \ldots & y = ax + b; \\ \ldots 1'' \ldots & z = a_1 x + b_1; \\ \ldots 1''' \ldots & z = \dfrac{a_1}{a}.y + \left(\dfrac{ab_1 - a_1 b}{a}\right). \end{array}\right\} (c)$$

Um die Ausdrücke für die Cosinusse, die Sinusse und die Tangenten der Winkel, welche diese Linien mit einander machen, zu finden, hat man nun die allgemeinen Formeln (3) (4) (5) hier in Anwendung zu bringen.

Diesem gemäss hat man nun:

$$\left.\begin{array}{l} \cos.(1.\bar{x}) = \dfrac{Ca - Ba_1}{\sqrt{1+a^2+a_1^2}.\sqrt{B^2+C^2}}; \\ \cos.(1.\bar{y}) = \dfrac{C - A.a_1}{\sqrt{1+a^2+a_1^2}.\sqrt{A^2+C^2}}; \\ \cos.(1.\bar{z}) = \dfrac{B - A.a}{\sqrt{1+a^2+a_1^2}.\sqrt{A^2+B^2}}; \end{array}\right\} \ldots (1)$$

$$\left.\begin{aligned}\sin.(1.\bar{x}) &= \left\{\frac{\sqrt{B^2+C^2+(Ba+Ca_,)^2}}{\sqrt{1+a^2+a_,^2}.\ \sqrt{B^2+C^2}}\right\};\\ \sin.(1.\bar{y}) &= \left\{\frac{\sqrt{(A^2+C^2).a^2+(A+Ca_,)^2}}{\sqrt{1+a^2+a_,^2}.\ \sqrt{A^2+C^2}}\right\};\\ \sin.(1.\bar{z}) &= \left\{\frac{\sqrt{(A^2+B^2).a_,^2+(A^2+Ba)^2}}{\sqrt{1+a^2+a_,^2}.\ \sqrt{A^2+B^2}}\right\};\end{aligned}\right\} \quad . (2)$$

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{tg}.(1.\bar{x}) &= \left\{\frac{\sqrt{(B^2+C^2)+(Ba+Ca_,)^2}}{Ca-Ba_,}\right\}\\ \mathrm{tg}.(1.\bar{y}) &= \left\{\frac{\sqrt{(A^2+C^2)a^2+(A+Ca_,)^2}}{Ca-Aa_,}\right\}\\ \mathrm{tg}.(1.\bar{z}) &= \left\{\frac{\sqrt{(A^2+B^2)a_,^2+(A+Ba)^2}}{B-Aa}\right\}\end{aligned}\right\} \quad . (3)$$

Wenn die gegebene Gerade zur gegebenen Ebene parallel ist, so dass man habe:

$$A+Ba+Ca_, = 0;$$

dann erhält man aus den Gl. (2), wenn der Kürze wegen gesetzt wird:

$$\sqrt{\left\{\frac{A^2+B^2+C^2}{1+a^2+a_,^2}\right\}} = N:$$

$$\sin.(1.\bar{x}) = \frac{N}{\sqrt{B^2+C^2}};\ \sin.(1.\bar{y}) = \frac{aN}{\sqrt{A^2+C^2}};\ \sin.(1.\bar{z}) = \frac{a_,.N}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Nach eben denselben allgemeinen Formeln entwickelt man die Ausdrücke für die Cosinusse, Sinusse und Tangenten der Winkel, welche die Projektionen der Linie 1 in den coordinirten Ebenen mit den Knotenlinien $\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}$ machen.

Zur Bestimmung der Winkel:

$$(1'.\bar{z});\ (1''.\bar{y});\ (1'''.\bar{x}),$$

welche wir von den übrigen absondern, hat man:

$$\left.\begin{aligned}\cos.(1'.\bar{z}) &= \frac{B-A.a}{\sqrt{1+a^2}.\sqrt{A^2+B^2}};\\ \cos.(1''.\bar{y}) &= \frac{C-A.a_,}{\sqrt{1+a_,^2}.\sqrt{A^2+C^2}};\\ \cos.(1'''.\bar{x}) &= \frac{Ca-Ba_,}{\sqrt{a^2+a_,^2}.\sqrt{B^2+C^2}};\end{aligned}\right\} \quad . \ . \ (4)$$

$$\left.\begin{aligned}\sin.(1'.z) &= \frac{A+Ba}{\sqrt{1+a^2}.\sqrt{A^2+B^2}};\\ \sin.(1''.y) &= \frac{A+Ca_{,}}{\sqrt{1+a_{,}^2}.\sqrt{A^2+C^2}};\\ \sin.(1'''.x) &= \frac{Ba+Ca_{,}}{\sqrt{a^2+a_{,}^2}.\sqrt{B^2+C^2}}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(5)$$

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{tg}.(1.z) &= \left(\frac{A+B.a}{B-A.a}\right);\\ \mathrm{tg}.(1''.y) &= \left(\frac{A+C.a_{,}}{C-A.a_{,}}\right);\\ \mathrm{tg}.(1'''.x) &= \left(\frac{Ba+Ca_{,}}{Ca-Ba_{,}}\right);\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(6)$$

Nebst diesen drei Winkeln hat man noch folgende sechs:

$(1'.x)$; $(1'.y)$; $(1''.x)$; $(1''.z)$; $(1'''.y)$; $(1'''.z)$;

für die Cosinusse, Sinusse und Tangenten dieser Winkel findet man nun die Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned}\cos.(1'.x) &= \frac{Ca}{\sqrt{1+a^2}.\sqrt{B^2+C^2}};\ \cos.(1'.y) = \frac{C}{\sqrt{1+a^2}.\sqrt{A^2+C^2}}\\ \cos.(1''.x) &= \frac{-B.a_{,}}{\sqrt{1+a_{,}^2}.\sqrt{B^2+C^2}};\ \cos.(1''.z) = \frac{B}{\sqrt{1+a_{,}^2}.\sqrt{A^2+B^2}}\\ \cos(1'''.y) &= \frac{-A.a_{,}}{\sqrt{a^2+a_{,}^2}.\sqrt{A^2+C^2}};\ \cos(1'''.z) = \frac{-A.a}{\sqrt{a^2+a_{,}^2}.\sqrt{A^2+B^2}}\end{aligned}\right\}(7)$$

$$\left.\begin{aligned}\sin.(1'.x) &= \frac{\sqrt{(1+a^2).B^2+C^2}}{\sqrt{1+a^2}.\sqrt{B^2+C^2}};\ \sin.(1'.y) = \frac{\sqrt{(1+a^2).A^2+C^2}}{\sqrt{1+a^2}.\sqrt{A^2+C^2}}\\ \sin.(1''.x) &= \frac{\sqrt{(1+a_{,}^2)C^2+B^2}}{\sqrt{1+a_{,}^2}.\sqrt{B^2+C^2}};\ \sin.(1''.z) = \frac{\sqrt{(1+a_{,}^2).A^2+B^2}}{\sqrt{1+a_{,}^2}.\sqrt{A^2+B^2}}\\ \sin.(1'''.y) &= \frac{\sqrt{(a^2+a_{,}^2).C^2+A^2}}{\sqrt{a^2+a_{,}^2}.\sqrt{A^2+C^2}};\ \sin.(1'''.z) = \frac{\sqrt{(a^2+a_{,}^2).B^2+A^2}}{\sqrt{a^2+a_{,}^2}.\sqrt{A^2+B^2}}\end{aligned}\right\}(8)$$

$$\left.\begin{array}{l}
\text{tg.}(1'.\bar{x}) = \dfrac{\sqrt{(1+a^2).B^2+C^2}}{C.a};\ \text{tg.}(1'.\bar{y}) = \dfrac{\sqrt{(1+a^2).A^2+C^2}}{C} \\
\text{tg.}(1''.\bar{x}) = \dfrac{\sqrt{(1+a_{,}^2).C^2+B^2}}{-Ba_{,}};\ \text{tg.}(1''.\bar{z}) = \dfrac{\sqrt{(1+a'^2).A^2+B^2}}{B} \\
\text{tg.}(1'''.\bar{y}) = \dfrac{\sqrt{(a^2+a_{,}^2)C^2+A^2}}{-Aa_{,}};\ \text{tg.}(1'''.\bar{z}) = \dfrac{\sqrt{(a^2+a_{,}^2).B^2+A^2}}{-A\,a}
\end{array}\right\}(9)$$

177. Ausser dem Neigungswinkel der Geraden im Raume gegen die gegebene Ebene kann man noch drei bemerken, welche aus der Beziehung der Geraden gegen die Ebene entspringen, nemlich: die Neigungswinkel der Projektionen der Geraden 1 in den Ebenen xy, xz, yz gegen jene Ebene, d. i. die Winkel: $(1'.I)$; $(1''.I)$; $(1'''.I)$.

Man findet die Ausdrücke für die Sinusse, für die Cosinusse und für die Tangenten dieser drei Winkel unmittelbar aus den allgemeinen Formeln (1) (2) (3) Art. 174; sie sind folgende:

$$\left.\begin{array}{l}
\sin.(1'.I) = \dfrac{A+Ba}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{1+a^2}}; \\
\sin.(1''.I) = \dfrac{A+Ca_{,}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{1+a_{,}^2}}; \\
\sin.(1'''.I) = \dfrac{Ba+Ca_{,}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{a^2+a_{,}^2}}
\end{array}\right\} \ldots (1)$$

$$\left.\begin{array}{l}
\cos.(1'.I) = \dfrac{\sqrt{\{(B-A.a)^2+C^2.(1+a^2)\}}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{1+a^2}}; \\
\cos.(1''.I) = \dfrac{\sqrt{\{(C-A.a_{,})^2+B^2(1+a_{,}^2)\}}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{1+a_{,}^2}}; \\
\cos.(1'''.I) = \dfrac{\sqrt{\{(Ca-Ba_{,})^2+A^2(a^2+a_{,}^2)\}}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{a^2+a_{,}^2}}
\end{array}\right\} \ldots (2)$$

$$\left.\begin{array}{l}
\text{tg.}(1'.I) = \dfrac{A+Ba}{\sqrt{\{(B-Aa)^2+C^2.(1+a^2)\}}} \\
\text{tg.}(1'.I) = \dfrac{A+Ca_{,}}{\sqrt{\{(C-A.a_{,})^2+B^2(1+a_{,}^2)\}}} \\
\text{tg.}(1'''.I) = \dfrac{Ba+Ca_{,}}{\sqrt{\{(Ca-Ba_{,})^2+A^2(a^2+a_{,}^2)\}}};
\end{array}\right\} . \ (3)$$

Die Gleichungen (1) (2) (3) Art. 174, die neun Systeme von Gleichungen Art. 176, und die drei Systeme von Gl. des gegenwärtigen Art. geben nun die Sinusse, Cosinusse und Tangenten der vorzüglichsten Winkel, welche man in den Beziehungen einer Geraden im Raume gegen eine Ebene bemerken kann, in Funktionen der Grössen $a a_{,}$, welche die Lage der Geraden, und der Grössen ABC, welche die Lage der Ebene bestimmen.

Diese Ausdrücke sind übrigens noch mannigfaltiger Umformungen fähig, wenn man die Gl. (α) (1) (2) (3) Art. 81; Gl. (1) (2) (3) Art. 110; Gl. (2) (3) (4) Art. 112 in Anwendung bringt.

Es ist also:

$$a = \frac{\cos.(1.y)}{\cos.(1.x)};\ a_{,} = \frac{\cos.(1.z)}{\cos.(1.x)}; \quad \ldots (a)$$

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} = \cos.(1'.x);\ \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} = \cos.(1'.y);\\
\frac{1}{\sqrt{1+a_{,}^2}} = \cos.(1''.x);\ \frac{a_{,}}{\sqrt{1+a_{,}^2}} = \cos.(1''.z);\\
\frac{a}{\sqrt{a^2+a_{,}^2}} = \cos.(1'''.y);\ \frac{a_{,}}{\sqrt{a^2+a_{,}^2}} = \cos.(1'''.z);
\end{array}\right\} \quad \ldots (b)$$

$$a = \mathrm{tg}.(1'.x);\ a_{,} = \mathrm{tg}.(1''.x);\ \frac{a_{,}}{a} = \mathrm{tg}.(1'''.y); \quad \ldots (c)$$

$$\frac{B}{A} = \frac{\cos.(I.xz)}{\cos.(I.yz)};\ \frac{C}{A} = \frac{\cos.(I.xy)}{\cos.(I.yz)};\ \frac{C}{B} = \frac{\cos.(I.xy)}{\cos.(I.xz)} \quad (d)$$

$$\left.\begin{array}{l}
B = +A.\mathrm{tg}.(\bar{z}.y) = -C.\mathrm{tg}.(\bar{x}.y);\\
C = +A.\mathrm{tg}.(\bar{y}.z) = +B.\mathrm{tg}.(\bar{x}.z);\\
A = -B.\mathrm{tg}.(\bar{z}.x) = -C.\mathrm{tg}.(\bar{y}.x);
\end{array}\right\} \quad \ldots (e)$$

$$\left.\begin{array}{l}
\sqrt{A^2+B^2} = \frac{+B}{\cos.(\bar{z}.x)} = \frac{-A}{\cos.(\bar{z}.y)} = \frac{-A}{\sin.(\bar{z}.x)} = \frac{+B}{\sin.(\bar{z}.y)};\\
\sqrt{A^2+C^2} = \frac{+C}{\cos.(\bar{y}.x)} = \frac{-A}{\cos.(\bar{y}.z)} = \frac{-A}{\sin.(\bar{y}.x)} = \frac{+C}{\sin.(\bar{y}.z)};\\
\sqrt{B^2+C^2} = \frac{+C}{\cos.(\bar{x}.z)} = \frac{-B}{\cos.(\bar{x}.z)} = \frac{-B}{\sin.(\bar{x}.y)} = \frac{+C}{\sin.(\bar{x}.z)};
\end{array}\right\} (f)$$

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{A^2+B^2+C^2}=\frac{C}{cs.(I,xy)}=\frac{B}{cs.(I,xz)}=\frac{A}{cs.(I,yz)};\\ \sqrt{A^2+B^2+C^2}=\\ \qquad\frac{AB}{C}.tg.(\bar{x}.\bar{y})=\frac{AC}{B}.tg.(\bar{x}.\bar{z})=\frac{BC}{A}.tg.(\bar{y}.\bar{z});\end{array}\right\}(g)$$

$$\sqrt{1+a^2+a_{,}^2}=\frac{1}{cos.(1.x)}=\frac{a}{cos.(1.y)}=\frac{a_{,}}{cos.(1.z)}\quad .\ .\ (h)$$

Diese Ausdrücke wollen wir nun zur Umformung derjenigen anwenden, welche wir in diesem und dem vorhergehenden Art. gefunden haben.

178. Setzt man für $aa_{,}$ in den Gl. (1) . . . (9) Art. 176 die Werthe aus den Gleichungen (a) des vorigen Art.; so erhält man:

$$\left.\begin{array}{l}cos.(1.\bar{x})=\left\{\frac{C.cos.(1.y)-B.cos.(1.z)}{\sqrt{B^2+C^2}}\right\}\\ cos.(1.\bar{y})=\left\{\frac{C.cos.(1.x)-A.cos.(1.z)}{\sqrt{A^2+C^2}}\right\}\\ cos.(1.\bar{z})=\left\{\frac{B.cos.(1.x)-A.cos.(1.y)}{\sqrt{A^2+B^2}}\right\}\end{array}\right\}\ .\ .\ (1)$$

$$\left.\begin{array}{l}sin.(1.\bar{x})=\sqrt{\left\{cos^2(1.x)+\frac{[B.cos.(1.y)+C.cos.(1.z)]^2}{B^2+C^2}\right\}}\\ sin.(1.\bar{y})=\sqrt{\left\{cos^2(1.y)+\frac{[A.cos.(1.x)+C.cos.(1.z)]^2}{A^2+C^2}\right\}}\\ sin.(1.\bar{z})=\sqrt{\left\{cos^2(1.z)+\frac{[A.cos.(1.x)+B.cos.(1.y)]^2}{A^2+B^2}\right\}}\end{array}\right\}(2)$$

$$\left.\begin{array}{l}tg.(1.\bar{x})=\frac{\sqrt{\{(B^2+C^2).cs^2(1.x)+[B.cs(1.y)+C.cs(1.z)]^2\}}}{C.cos.(1.y)-B.cos.(1.z)}\\ tg.(1.\bar{y})=\frac{\sqrt{\{(A^2+C^2).cs^2(1.y)+[A.cs(1.x)+C.cs(1.z)]^2\}}}{C.cos.(1.x)-A.cos.(1.z)}\\ tg.(1.\bar{z})=\frac{\sqrt{\{(A^2+B^2).cs^2(1.z)+[A.cs(1.x)+B.cs(1.y)]^2\}}}{B.cos.(1.x)-A.cos.(1.y)}\end{array}\right\}(3)$$

Zur fernern Reduktion dieser Formeln kann man bemerken, dass:

$$\{A.\cos.(1.x)+B.\cos.(1.y)+C.\cos.(1.z)\} = \frac{A.\sin.(1.I)}{\cos.(I.yz)} = \frac{B.\sin.(1.I)}{\cos.(I.xz)} = \frac{C.\sin.(1.I)}{\cos.(I.xy)};$$

$$\left.\begin{aligned}
\cos.(1'.\bar{z}) &= \frac{B.\cos.(1.x)-A.\cos.(1.y)}{\sin.(1.z).\sqrt{A^2+B^2}};\\
\cos.(1''.\bar{y}) &= \frac{C.\cos.(1.x)-A.\cos.(1.z)}{\sin.(1.y).\sqrt{A^2+C^2}};\\
\cos.(1'''.\bar{x}) &= \frac{C.\cos.(1.y)-B.\cos.(1.z)}{\sin.(1.x).\sqrt{B^2+C^2}};
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (4)$$

$$\left.\begin{aligned}
\sin.(1'.\bar{z}) &= \frac{A.\cos.(1.x)+B.\cos.(1.y)}{\sin.(1.z).\sqrt{A^2+B^2}};\\
\sin.(1''.\bar{y}) &= \frac{A.\cos.(1.x)+C.\cos.(1.z)}{\sin.(1.y).\sqrt{A^2+C^2}};\\
\sin.(1'''.\bar{x}) &= \frac{B.\cos.(1.y)+C.\cos.(1.z)}{\sin.(1.x).\sqrt{B^2+C^2}};
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (5)$$

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{tg}.(1'.\bar{z}) &= \left\{\frac{A.\cos.(1.x)+B.\cos.(1.y)}{B.\cos.(1.x)-A.\cos.(1.y)}\right\}\\
\mathrm{tg}.(1''.\bar{y}) &= \left\{\frac{A.\cos.(1.x)+C.\cos.(1.z)}{C.\cos.(1.x)-A.\cos.(1.z)}\right\}\\
\mathrm{tg}.(1'''.\bar{x}) &= \left\{\frac{B.\cos.(1.y)+C.\cos.(1.z)}{C.\cos.(1.y)-B.\cos.(1.z)}\right\}
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (6)$$

$$\left.\begin{aligned}
\cos.(1'.\bar{x}) &= \frac{C.\cos.(1.y)}{\sin.(1.z).\sqrt{B^2+C^2}}\\
\cos.(1''.\bar{x}) &= \frac{-B.\cos.(1.z)}{\sin.(1.y).\sqrt{B^2+C^2}}\\
\cos.(1'''.\bar{y}) &= \frac{-A.\cos.(1.z)}{\sin.(1.x).\sqrt{A^2+C^2}}\\
\cos.(1'.\bar{y}) &= \frac{C.\cos.(1.x)}{\sin.(1.z).\sqrt{A^2+C^2}}\\
\cos.(1''.\bar{z}) &= \frac{B.\cos.(1.x)}{\sin.(1.y).\sqrt{A^2+B^2}}\\
\cos.(1'''.\bar{z}) &= \frac{-A.\cos.(1.y)}{\sin.(1.x).\sqrt{A^2+B^2}}
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

$$\left.\begin{aligned}
\sin.(1'.\bar{x}) &= \frac{\sqrt{B^2\sin^2(1.z)+C^2\cos^2(1.x)}}{\sin.(1.z).\sqrt{B^2+C^2}} \\
\sin.(1''.\bar{x}) &= \frac{\sqrt{C^2\sin^2(1.y)+B^2\cos^2(1.x)}}{\sin.(1.y).\sqrt{B^2+C^2}} \\
\sin.(1'''.\bar{y}) &= \frac{\sqrt{C^2\sin^2(1.x)+A^2\cos^2(1.x)}}{\sin.(1.x).\sqrt{A^2+C^2}} \\
\sin.(1'.\bar{y}) &= \frac{\sqrt{A^2\sin^2(1.z)+C^2\cos^2(1.x)}}{\sin.(1.z).\sqrt{A^2+C^2}} \\
\sin.(1''.\bar{z}) &= \frac{\sqrt{A^2\sin^2(1.y)+B^2.\mathrm{cs}^2(1.x)}}{\sin.(1.y).\sqrt{A^2+B^2}} \\
\sin.(1'''.\bar{z}) &= \frac{\sqrt{B^2\sin^2(1.x)+A^2\cos^2(1.x)}}{\sin.(1.x).\sqrt{A^2+B^2}}
\end{aligned}\right\} \quad .\;.\;(8)$$

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{tg}.(1'.\bar{x}) &= \frac{\sqrt{B^2\sin^2(1.z)+C^2\cos^2(1.x)}}{C.\cos.(1.y)} \\
\mathrm{tg}.(1''.\bar{x}) &= \frac{\sqrt{C^2\sin^2(1.y)+B^2\cos^2(1.x)}}{-B.\cos.(1.z)} \\
\mathrm{tg}.(1'''.\bar{y}) &= \frac{\sqrt{C^2\sin^2(1.x)+A^2\cos^2(1.x)}}{-A.\cos.(1.z)} \\
\mathrm{tg}.(1'.\bar{y}) &= \frac{\sqrt{A^2\sin^2(1.z)+C^2\cos^2(1.x)}}{C.\cos.(1.x)} \\
\mathrm{tg}.(1''.\bar{z}) &= \frac{\sqrt{A^2\sin^2(1.y)+B^2\cos^2(1.x)}}{B.\cos.(1.x)} \\
\mathrm{tg}.(1'''.\bar{z}) &= \frac{\sqrt{B^2\sin^2(1.x)+A^2\cos^2(1.x)}}{-A.\cos.(1.y)}
\end{aligned}\right\} \quad .\;.\;(9)$$

179. Macht man auf gleiche Weise von den Formeln (*b*) Gebrauch; so geben die Ausdrücke (4) (5) (7) Art. 176:

$$\left.\begin{aligned}
\cos.(1'.\bar{z}) &= \frac{B.\cos.(1'.x) - A.\cos.(1'.y)}{\sqrt{A^2+B^2}} \\
\cos.(1''.\bar{y}) &= \frac{C.\cos.(1''.x) - A.\cos.(1''.z)}{\sqrt{A^2+C^2}} \\
\cos.(1'''.\bar{x}) &= \frac{C.\cos.(1'''.y) - B.\cos.(1'''.z)}{\sqrt{B^2+C^2}}
\end{aligned}\right\} \quad .\;.\;(1)$$

$$\left.\begin{aligned}
\sin.(1'.\bar{z}) &= \frac{A.\cos.(1'.x)+B.\cos.(1'.y)}{\sqrt{A^2+B^2}};\\
\sin.(1''.\bar{y}) &= \frac{A.\cos.(1''.x)+C.\cos.(1''.z)}{\sqrt{A^2+C^2}};\\
\sin.(1'''.\bar{x}) &= \frac{B.\cos.(1'''.y)+C.\cos.(1'''.z)}{\sqrt{B^2+C^2}};
\end{aligned}\right\} \quad . \quad (2)$$

$$\left.\begin{aligned}
\text{cs}.(1'.\bar{x}) &= \frac{C.\cos.(1'.y)}{\sqrt{B^2+C^2}}; \quad \cos.(1'.\bar{y}) = \frac{C.\cos.(1'.x)}{\sqrt{A^2+C^2}};\\
\text{cs}.(1''.\bar{y}) &= \frac{-B.\text{cs}.(1''.\bar{z})}{\sqrt{B^2+C^2}}; \quad \cos.(1''.\bar{z}) = \frac{B.\cos.(1''.x)}{\sqrt{A^2+B^2}};\\
\text{cs}.(1'''.\bar{y}) &= \frac{-A.\text{cs}.(1'''.z)}{\sqrt{A^2+C^2}}; \quad \cos.(1'''.\bar{z}) = \frac{-A.\text{cs}.(1'''.y)}{\sqrt{A^2+B^2}};
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

u. s. w.

und die Gl. (1) Art. 177 gehen in nachstehende über:

$$\left.\begin{aligned}
\sin.(1'.I) &= \frac{A.\cos.(1'.x)+B.\cos.(1'.y)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};\\
\sin.(1''.I) &= \frac{A.\cos.(1''.x)+C.\cos.(1''.z)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};\\
\sin.(1'''.I) &= \frac{B.\cos.(1'''.y)+C.\cos.(1'''.z)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};
\end{aligned}\right\} \quad . \quad (4)$$

Bedient man sich zur Reduktion dieser Ausdrücke der Formeln (c); so findet man aus den Ausdrücken (6) Art. 176:

$$\left.\begin{aligned}
\text{tg}.(1'.\bar{z}) &= \left\{\frac{A+B.\text{tg}.(1'.x)}{B-A.\text{tg}.(1'.x)}\right\};\\
\text{tg}.(1''.\bar{y}) &= \left\{\frac{A+C.\text{tg}.(1''.x)}{C-A.\text{tg}.(1''.x)}\right\};\\
\text{tg}.(1'''.\bar{x}) &= \left\{\frac{B+C.\text{tg}.(1'''.y)}{C-B.\text{tg}.(1'''.y)}\right\};
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (5)$$

180. Wir wollen itzt die Grössen aa, in obigen Ausdrücken der Art. 176 und 177 stehen lassen, allein für ABC andere Grössen einführen; und in der Absicht machen wir von den Gl. (d) (e) (f) (g) Gebrauch.

Die Gleichungen (1) (2) (3) Art. 176 geben nun:

$$\left.\begin{aligned}
\cos.(1,\bar{x}) &= \frac{a.\cos.(I.\,xy) - a_{,}.\cos.(I.\,xy)}{\sin.(I.yz).\sqrt{1+a^2+a_{,}^2}}\,;\\
\cos.(1,\bar{y}) &= \frac{\cos.(I.\,xy) - a_{,}.\cos.\,(I.\,yz)}{\sin.(I.\,xy).\sqrt{1+a^2+a_{,}^2}}\,;\\
\cos.(1.\,\bar{z}) &= \frac{\cos.\,(I.\,xz) - a.\cos.\,(I.\,yz)}{\sin.(I.\,yz).\sqrt{1+a^2+a_{,}^2}}\,;
\end{aligned}\right\}\quad .\quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned}
\sin.(1.\bar{x}) &= \frac{\sqrt{\sin.^2(I.\,yz) + [a.\cos.(I.\,xz) + a_{,}.\cos.(I.xy)]^2}}{\sin.(I.\,yz).\sqrt{1+a^2+a_{,}^2}}\\
\sin.(1.\bar{y}) &= \frac{\sqrt{\sin.^2(I.\,xz) + [\cos.\,(I.\,yz) + a_{,}.\cos.(I.\,xy)]^2}}{\sin.(I.xz).\sqrt{1+a^2+a_{,}^2}}\\
\sin.\,(1.\bar{z}) &= \frac{\sqrt{\sin.^2(I.\,xy) + [\cos.\,(I.\,yz) + a.\,\cos.(I.\,xz)]^2}}{\sin.(I.\,xy).\sqrt{1+a^2+a_{,}^2}}
\end{aligned}\right\}(2)$$

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{tg}.(1,\bar{x}) &= \frac{\sqrt{\sin.^2(I.yz) + [a.\,\cos.(I.\,xz) + a_{,}.\cos.(I.\,xy)]^2}}{a.\cos.(I.\,xy) - a_{,}.\cos.(I.\,xz)}\\
\mathrm{tg}.\,(1.\bar{y}) &= \frac{\sqrt{\sin.^2(I.\,xz) + [\cos.(I.\,yz) + a_{,}.\cos.\,(I.\,xy)]^2}}{\cos.(I.\,xy) - a_{,}.\cos.(I.\,yz)}\\
\mathrm{tg}.\,(1.\,\bar{z}) &= \frac{\sqrt{\sin.^2(I.\,xy) + [\cos.(I.\,yz) + a.\cos.(I.\,xz)]^2}}{\cos.(I.\,xz) - a.\,\cos.(I.\,yz)}
\end{aligned}\right\}\ (3)$$

Aus den Formeln (4) (5) (6) desselben Art. findet man ferner:

$$\left.\begin{aligned}
\cos.\,(1'.\bar{z}) &= \frac{\cos.(I.xz) - a.\cos.(I.yz)}{\sin.(I.xy).\sqrt{1+a^2}}\\
\cos.(1''.\bar{y}) &= \frac{\cos.(I.yz) - a_{,}.\cos.(I.yz)}{\sin.(I.xz).\sqrt{1+a_{,}^2}}\\
\cos.(1'''.\bar{x}) &= \frac{a.\cos.(I.xy) - a_{,}.\cos.(I.xz)}{\sin.(I.yz).\sqrt{a^2+a_{,}^2}}
\end{aligned}\right\}\quad .\ .\quad (4)$$

$$\left.\begin{aligned}\sin.(1'.\bar{z}) &= \frac{\cos.(I.yz)+a.\cos.(I.xz)}{\sin.(I.xy).\sqrt{1+a^2}}\\ \sin.(1''.\bar{y}) &= \frac{\cos.(I.yz)+a_{,}.\cos.(I.xy)}{\sin.(I.xz).\sqrt{1+a_{,}^2}}\\ \sin.(1'''.\bar{x}) &= \frac{a.\cos.(I.xz)+a_{,}.\cos.(I.xy)}{\sin.(I.yz).\sqrt{a^2+a_{,}^2}}\end{aligned}\right\}\ldots(5)$$

$$\left.\begin{aligned}\text{tg}.(1'.\bar{z}) &= \frac{\cos.(I.yz)+a.\cos.(I.xz)}{\cos.(I.xz)-a.\cos.(I.yz)}\\ \text{tg}.(1''.\bar{y}) &= \frac{\cos.(I.yz)+a_{,}.\cos.(I.xy)}{\cos.(I.xy)-a_{,}.\cos.(I.yz)}\\ \text{tg}.(1'''.\bar{x}) &= \frac{a.\cos.(I.xz)+a_{,}.\cos.(I.xy)}{a.\cos.(I.xy)-a_{,}.\cos.(I.xz)}\end{aligned}\right\}\ldots(6)$$

Die Gleichungen (9) geben ferner:

$$\left.\begin{aligned}\text{tg}.(1'.\bar{x}) &= \frac{\sqrt{\sin^2(I.yz)+a^2.\cos^2(I.xz)}}{a.\cos.(I.xy)}\\ \text{tg}.(1''.\bar{x}) &= \frac{\sqrt{\sin^2(I.yz)+a_{,}^2.\cos^2(I.xy)}}{-a_{,}.\cos.(I.xz)}\\ \text{tg}.(1'.\bar{y}) &= \frac{\sqrt{\sin^2(I.xz)+a^2.\cos^2(I.yz)}}{\cos.(I.xy)}\\ \text{tg}.(1''.\bar{z}) &= \frac{\sqrt{\sin^2(I.xy)+a_{,}^2.\cos^2(I.yz)}}{\cos.(I.xz)}\end{aligned}\right\}\ldots(7)$$

Die Gleichungen (1) Art. 177 geben endlich noch:

$$\left.\begin{aligned}\sin.(1'.I) &= \frac{\cos.(I.yz)+a.\cos.(I.xz)}{\sqrt{1+a^2}}\\ \sin.(1''.I) &= \frac{\cos.(I.yz)+a_{,}.\cos.(I.xy)}{\sqrt{1+a_{,}^2}}\\ \sin.(1'''.I) &= \frac{a.\cos.(I.xz)+a_{,}.\cos.(I.xy)}{\sqrt{a^2+a_{,}^2}}\end{aligned}\right\}\ldots(8)$$

U. s. w.

181. Wir wollen itzt den Ausdrücken Art. 176 noch einige andere Formen geben, indem wir von den Gl. (*e*) (*f*) Gebrauch machen.

Die Gl. (1) (4) (5) (6) geben:

$$\left.\begin{aligned} \cos.(1.\bar{x}) &= \frac{a.\cos.(\bar{x}.y) + a_{,}.\cos.(\bar{x}.z)}{\sqrt{1+a^2+a_{,}^2}}\,; \\ \cos.(1.\bar{y}) &= \frac{\cos.(\bar{y}.x) + a_{,}.\cos.(\bar{y}.z)}{\sqrt{1+a^2+a_{,}^2}}\,; \\ \cos.(1.\bar{z}) &= \frac{\cos.(\bar{z}.x) + a.\cos.(\bar{z}.y)}{\sqrt{1+a^2+a_{,}^2}}\,; \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (1)$$

$$\left.\begin{aligned} \cos.(1'.\bar{z}) &= \frac{\cos.(\bar{z}.x) + a.\cos.(\bar{z}.y)}{\sqrt{1+a^2}}\,; \\ \cos.(1''.\bar{y}) &= \frac{\cos.(\bar{y}.x) + a_{,}.\cos.(\bar{y}.z)}{\sqrt{1+a_{,}^2}} \\ \cos.(1'''.\bar{x}) &= \frac{a.\cos.(\bar{x}.y) + a_{,}.\cos.(\bar{x}.z)}{\sqrt{a^2+a_{,}^2}} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (2)$$

$$\left.\begin{aligned} \sin.(1'.\bar{z}) &= -\left\{\frac{\cos.(\bar{z}.y) - a.\cos.(\bar{z}.x)}{\sqrt{1+a^2}}\right\} \\ \sin.(1''.\bar{y}) &= -\left\{\frac{\cos.(\bar{y}.z) - a_{,}.\cos.(\bar{y}.z)}{\sqrt{1+a_{,}^2}}\right\} \\ \sin.(1'''.\bar{x}) &= -\left\{\frac{a.\cos.(\bar{x}.z) - a_{,}.\cos.(\bar{x}.y)}{\sqrt{a^2+a_{,}^2}}\right\} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (3)$$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{tg}.(1'.\bar{z}) &= \left\{\frac{a.\cos.(\bar{z}.x) - \cos.(\bar{z}.y)}{a.\cos.(\bar{z}.y) + \cos.(\bar{z}.x)}\right\}; \\ \mathrm{tg}.(1''.\bar{y}) &= \left\{\frac{a_{,}.\cos.(\bar{y}.z) - \cos.(\bar{y}.z)}{a_{,}.\cos.(\bar{y}.z) + \cos.(\bar{y}.x)}\right\}; \\ \mathrm{tg}.(1'''.\bar{x}) &= \left\{\frac{a_{,}.\cos.(\bar{x}.y) - a.\cos.(\bar{x}.z)}{a_{,}.\cos.(\bar{x}.z) + a.\cos.(\bar{x}.y)}\right\} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (4)$$

182. Bringt man die Ausdrücke für $\sqrt{A^2+B^2+C^2}$ aus den Gleichungen (*g*) in den Ausdruck (1) Art. 174; so bekömmt man:

$$\left.\begin{aligned}
\sin.(1.I) &= \frac{(A+Ba+Ca_,).\cos.(I.xy)}{C.\sqrt{1+a^2+a_,^2}} = \frac{(A+Ba+Ca_,).C}{nA.B.\mathrm{tg}.(\bar{x}.\bar{y})} \\
\sin.(1.I) &= \frac{(A+Ba+Ca_,).\cos.(I.xz)}{B.\sqrt{1+a^2+a_,^2}} = \frac{(A+Ba+Ca_,).B}{nA.C.\mathrm{tg}.(\bar{x}.\bar{z})} \\
\sin.(1.I) &= \frac{(A+Ba+Ca_,).\cos.(I.yz)}{A.\sqrt{1+a^2+a_,^2}} = \frac{(A+Ba+Ca_,).A}{nB.C.\mathrm{tg}.(\bar{y}.\bar{z})}
\end{aligned}\right\} \quad . \quad (1)$$

wo , , $n = \sqrt{1+a^2+a_,^2}$ gesetzt worden ist.

Macht man zur Reduktion dieser Ausdrücke Gebrauch von den Gleichungen (e); so findet man:

$$\left.\begin{aligned}
\sin.(1.I) &= \frac{[a_, - a.\mathrm{tg}.(\bar{x}.y) - \mathrm{tg}.(\bar{y}.x)].\cos.(I.xy)}{\sqrt{(1+a^2+a_,^2)}}; \\
\sin.(1.I) &= \frac{[a - \mathrm{tg}.(\bar{z}.x) + a_,.\mathrm{tg}.(\bar{x}.z)].\cos.(I.xz)}{\sqrt{(1+a^2+a_,^2)}}; \\
\sin.(1.I) &= \frac{[1 + a.\mathrm{tg}.(\bar{z}.y) + a_,.\mathrm{tg}.(\bar{y}.z)].\cos.(I.yz)}{\sqrt{(1+a^2+a_,^2)}};
\end{aligned}\right\} \quad . \quad (2)$$

$$\left.\begin{aligned}
\sin.(1.I) &= +\frac{\{a_, - a.\mathrm{tg}.(\bar{x}.y) - \mathrm{tg}.(\bar{y}.x)\}}{n.\mathrm{tg}.(\bar{x}.y).\mathrm{tg}.(\bar{y}.x).\mathrm{tg}.(\bar{x}.\bar{y})} \\
\sin.(1.I) &= -\frac{\{a - \mathrm{tg}.(\bar{z}.x) + a_,.\mathrm{tg}.(\bar{x}.z)\}}{n.\mathrm{tg}.(\bar{z}.x).\mathrm{tg}.(\bar{x}.z).\mathrm{tg}.(\bar{x}.\bar{z})} \\
\sin.(1.I) &= +\frac{\{1 + a.\mathrm{tg}.(\bar{z}.y) + a_,.\mathrm{tg}.(\bar{y}.z)\}}{n.\mathrm{tg}.(\bar{z}.y).\mathrm{tg}.(\bar{y}.z).\mathrm{tg}.(\bar{y}.\bar{z})}
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (3)$$

Aehnliche Reduktionen lassen sich mit den Gl. (1) Art. 177 vornehmen. So z. B. hat man:

$$\left.\begin{aligned}
\sin.(1'.I) &= -\frac{[a.\mathrm{tg}.(\bar{x}.y) + \mathrm{tg}.(\bar{y}.x)].\cos.(I.xy)}{\sqrt{1+a^2}} \\
\sin.(1''.I) &= +\frac{[a_,.\mathrm{tg}.(\bar{x}.z) - \mathrm{tg}.(\bar{z}.x)].\cos.(I.xz)}{\sqrt{1+a_,^2}} \\
\sin.(1'''.I) &= +\frac{[a.\mathrm{tg}.(\bar{z}.y) + a_,.\mathrm{tg}.(\bar{y}.z)].\cos.(I\,yz)}{\sqrt{a^2+a_,^2}}
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (4)$$

u. s. w.

183. Gebraucht man zur Reduktion der Ausdrücke Art. 176 und 177 nachstehende Formeln (nach Gl. (8) Art. 115):

$$\text{tg.}(I.x) = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}};\ \text{tg.}(I.y) = \frac{B}{\sqrt{A^2+C^2}};\ \text{tg.}(I.z) = \frac{A}{\sqrt{B^2+C^2}}$$

so findet man aus den Gl. (1) (4) Art. 176:

$$\left.\begin{aligned}
\cos.(1.\bar{x}) &= \frac{C.\cos.(1.y) - B.\cos.(1.z)}{A}\,.\,\text{tg.}(I.x)\ ; \\
\cos.(1.\bar{y}) &= \frac{C.\cos.(1.x) - A.\cos.(1.z)}{B}\,.\,\text{tg.}(I.y)\ ; \\
\cos.(1.\bar{z}) &= \frac{B.\cos.(1.x) - A.\cos.(1.y)}{C}\,.\,\text{tg.}(I.z)\ ;
\end{aligned}\right\}\ .\ (1)$$

$$\left.\begin{aligned}
\cos.(1'.\bar{z}) &= \left(\frac{B - Aa}{C.\sqrt{1+a^2}}\right).\text{tg.}(I.z)\ ; \\
\cos.(1''.\bar{y}) &= \left(\frac{C - Aa}{B.\sqrt{1+a_{,}^2}}\right).\text{tg.}(I.y)\ ; \\
\cos.(1'''.\bar{x}) &= \left(\frac{Ca - Ba_{,}}{A.\sqrt{a^2+a_{,}^2}}\right).\text{tg.}(I.x)\ ;
\end{aligned}\right\}\ .\ .\ (2)$$

$$\left.\begin{aligned}
\sin.(1'.\bar{z}) &= \left(\frac{A + Ba}{C.\sqrt{1+a^2}}\right).\text{tg.}(I.z)\ ; \\
\sin.(1''.\bar{y}) &= \left(\frac{A + Ca_{,}}{B.\sqrt{1+a_{,}^2}}\right).\text{tg.}(I.y)\ ; \\
\sin.(1'''.\bar{x}) &= \left(\frac{Ba + Ca_{,}}{A.\sqrt{a^2+a_{,}^2}}\right).\text{tg.}(I.x)\ ;
\end{aligned}\right\}\ .\ .\ (3)$$

Aehnliche Formeln findet man auch aus den Gl. (7). Führt man anstatt $aa_{,}$ Winkel in den Formeln (2) (3) des gegenwärtigen Art. ein; so findet man noch:

$$\left.\begin{aligned}
\cos.(1'.\bar{z}) &= \frac{B.\cos.(1.x) - A.\cos.(1.y)}{C.\sin.(1.z)}\,.\,\text{tg.}(I.z)\ ; \\
\cos.(1''.\bar{y}) &= \frac{C.\cos.(1.x) - A.\cos.(1.z)}{B.\sin.(1.y)}\,.\,\text{tg.}(I.y)\ ; \\
\cos.(1'''.\bar{x}) &= \frac{C.\cos.(1.y) - B.\cos.(1.z)}{A.\sin.(1.x)}\,.\,\text{tg.}(I.x);
\end{aligned}\right\}\ .\ (4)$$

Oder auch:

$$\left.\begin{aligned}
\cos.(1'.\bar{z}) &= \frac{B.\cos.(1'.x) - A.\cos.(1'.y)}{C.\mathrm{tg}.(I\,xy)} \\
\cos.(1''.\bar{y}) &= \frac{C.\cos.(1''.x) - A.\cos.(1''.z)}{B.\mathrm{tg}.(I.xz)} \\
\cos.(1'''.\bar{x}) &= \frac{C.\cos.(1'''.y) - B.\cos.(1'''.z)}{A.\mathrm{tg}.(I.yz)}
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (5)$$

u. s. w.

Diese Formeltafeln der Sinusse, Cosinusse und Tangenten der Winkel, welche aus den Beziehungen einer Geraden gegen eine Ebene entspringen, lassen sich noch durch eine unzählbare Menge anderer mehr oder weniger wichtiger Formeln vermehren, welche sich durch ähnliche Combinationen der bisher sowohl im zweiten und dritten, als auch im gegenwärtigen Capitel erlangten Gleichungen noch ferner zusammnan setzen und entwickeln lassen. Wenn sich nun alsogleich noch nicht absehen lässt, welcher unmittelbare Gebrauch von den hier entwickelten Gleichungen gemacht werden könne, so bleibt es doch wichtig, den Geist der Methode kennen zu lernen, welche hier zur Entdeckung neuer Relationen zwischen den Winkeln gebraucht wird, so aus der Bezeichnung einer geraden Linie und einer Ebene gegen das coordinirte Achsensystem, und der geraden Linie gegen die Ebene entspringen. Von diesen Relationen will ich nun, weil sie ohne Schwierigkeiten die vorhergehenden Formeln gleichsam von selbst darbiethen, die vorzüglichsten bloss anzeigen.

184. Es ist also:

$$\left.\begin{aligned}
\cos.(1.\bar{x}) &= \{\cos.(\bar{x}.y).\cos.(1.y) + \cos.(\bar{x}.z).\cos.(1.z)\} \\
\cos.(1.\bar{y}) &= \{\cos.(\bar{y}.x).\cos.(1.x) + \cos.(\bar{y}.z).\cos.(1.z)\} \\
\cos.(1.\bar{z}) &= \{\cos.(\bar{z}.y).\cos.(1.y) + \cos.(\bar{z}.x).\cos.(1.x)\}
\end{aligned}\right\} . \; (1)$$

$$\left.\begin{aligned}
\cos.(1.\bar{x}).\cos.(I.x) &= \cos.(1.y).\sin.(I.z) + \cos.(1.z).\sin.(I.y) \\
\cos.(1.\bar{y}).\cos.(I.y) &= \cos.(1.x).\sin.(I.z) + \cos.(1.z).\sin.(I.x) \\
\cos.(1.\bar{z}).\cos.(I.z) &= \cos.(1.x).\sin.(I.y) + \cos.(1.y)\sin.(I.x)
\end{aligned}\right\} (2)$$

$$\left.\begin{aligned}
\cos.(1.\bar{x}).\mathrm{tg}.(I.yz) &= \cos.(1.z).\mathrm{tg}.(\bar{z}.y) - \cos.(1.y).\mathrm{tg}.(\bar{y}.z) \\
\cos.(1.\bar{y}).\mathrm{tg}.(I.xz) &= \cos.(1.z).\mathrm{tg}.(\bar{z}.x) - \cos.(1.x).\mathrm{tg}.(\bar{x}.z) \\
\cos.(1.\bar{z}).\mathrm{tg}.(I.xy) &= \cos.(1.y).\mathrm{tg}.(\bar{y}.x) - \cos.(1.x).\mathrm{tg}.(\bar{x}.y)
\end{aligned}\right\} (3)$$

$$\left.\begin{aligned}
\cos.(1.\bar{x}) &= \{\cos.(1.y).\sin.(I.z) - \cos.(1.z).\sin.(I.y)\} : \cos.(I.x) \\
\cos.(1.\bar{y}) &= \{\cos.(1.x).\sin.(I.z) - \cos.(1.z).\sin.(I.x)\} : \cos.(I.y) \\
\cos.(1.\bar{z}) &= \{\cos.(1.x).\sin.(I.y) - \cos.(1.y).\sin.(I.x)\} : \cos.(I.z)
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Die Cosinusse der Winkel, welche eine Gerade im Raume mit den Knotenlinien einer Ebene macht, lassen sich nun auf verschiedene Arten durch rationale Funktionen der Sinusse, Cosinusse oder der Tangenten der Winkel ausdrücken, welche diese Linie, oder die Ebene, oder ihre Knotenlinien mit den coordinirten Achsen machen. Nicht so aber die Sinusse und Tangenten dieser drei Winkel. Ferner hat man:

$$\left.\begin{aligned}
\cos.(1'.\bar{z}).\mathrm{tg}.(I.xy) &= \cos.(1'.y).\mathrm{tg}.(\bar{y}.x) - \cos.(1'.x).\mathrm{tg}.(\bar{x}.y) \\
\cos.(1''.\bar{y}).\mathrm{tg}.(I.xz) &= \cos.(1''.z).\mathrm{tg}.(\bar{z}.x) - \cos.(1''.x).\mathrm{tg}.(\bar{x}.z) \\
\cos.(1'''.\bar{x}).\mathrm{tg}.(I.yz) &= \cos.(1'''.z).\mathrm{tg}.(\bar{z}.y) - \cos.(1'''.y).\mathrm{tg}.(\bar{y}.z)
\end{aligned}\right\} (5)$$

$$\left.\begin{aligned}
\sin.(1'.\bar{z}).\mathrm{tg}.(I.xy) &= -\{\mathrm{tg}.(\bar{y}.x).\mathrm{cs}.(1'.x) + \mathrm{tg}.(\bar{x}.y).\mathrm{cs}.(1'.y)\} \\
\sin.(1''.\bar{y}).\mathrm{tg}.(I.xz) &= -\{\mathrm{tg}.(\bar{z}.x).\mathrm{cs}.(1''.x) - \mathrm{tg}.(\bar{x}.z).\mathrm{cs}.(1''.z)\} \\
\sin.(1'''.\bar{x}).\mathrm{tg}.(I.yz) &= +\{\mathrm{tg}.(\bar{z}.y).\mathrm{cs}.(1'''.y) + \mathrm{tg}.(\bar{y}.z).\mathrm{cs}.(1'''.z)\}
\end{aligned}\right\} (6)$$

$$\left.\begin{aligned}
\cos.(1'.\bar{z}) &= \cos.(\bar{z}.x).\cos.(1'.x) + \cos.(\bar{z}.y).\cos.(1'.y) \\
\cos.(1''.\bar{y}) &= \cos.(\bar{y}.x).\cos.(1''.x) + \cos.(\bar{y}.z).\cos.(1''.z) \\
\cos.(1'''.\bar{x}) &= \cos.(\bar{x}.y).\cos.(1'''.y) + \cos.(\bar{x}.z).\cos.(1'''.z)
\end{aligned}\right\} . \; (7)$$

$$\left.\begin{aligned}
\sin.(1'.\bar{z}) &= \cos.(1'.y).\cos.(\bar{z}.x) - \cos.(1'.x).\cos.(\bar{z}.y) \\
\sin.(1''.\bar{y}) &= \cos.(1''.z).\cos.(\bar{y}.x) - \cos.(1''.x).\cos.(\bar{y}.z) \\
\sin.(1'''.\bar{x}) &= \cos.(1'''.z).\cos.(\bar{x}.y) - \cos.(1'''.y).\cos.(\bar{x}.z)
\end{aligned}\right\} . \; (8)$$

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{tg}.(1'.\bar{z}) &= \left\{\frac{\mathrm{tg}.(\bar{y}.x).\cos.(1'.x) + \mathrm{tg}.(\bar{x}.y).\cos.(1'.y)}{\mathrm{tg}.(\bar{x}.y).\cos.(1'.x) - \mathrm{tg}.(\bar{y}.x).\cos.(1'.y)}\right\} \\
\mathrm{tg}.(1''.\bar{y}) &= \left\{\frac{\mathrm{tg}.(\bar{x}.z).\cos.(1''.z) - \mathrm{tg}.(\bar{z}.x).\cos.(1''.x)}{\mathrm{tg}.(\bar{z}.x).\cos.(1''.z) - \mathrm{tg}.(\bar{x}.z).\cos.(1''.x)}\right\} \\
\mathrm{tg}.(1'''.\bar{x}) &= \left\{\frac{\mathrm{tg}.(\bar{y}.z).\cos.(1'''.z) + \mathrm{tg}.(\bar{z}.y).\cos.(1'''.y)}{\mathrm{tg}.(\bar{z}.y).\cos.(1'''.z) - \mathrm{tg}.(\bar{y}.z).\cos.(1'''.y)}\right\}
\end{aligned}\right\} . \; (9)$$

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{tg}.(1'.\bar{z}) &= \left\{\frac{\sin.(I.y).\cos.(1.y) + \sin.(I.x).\cos.(1.x)}{\sin.(I.y).\cos.(1.x) - \sin.(I.x).\cos.(1.y)}\right\} \\
\mathrm{tg}.(1''.\bar{y}) &= \left\{\frac{\sin.(I.z).\cos.(1.z) + \sin.(I.x).\cos.(1.x)}{\sin.(I.z).\cos.(1.x) - \sin.(I.x).\cos.(1.z)}\right\} \\
\mathrm{tg}.(1'''.\bar{x}) &= \left\{\frac{\sin.(I.y).\cos.(1.y) + \sin.(I.z).\cos.(1.z)}{\sin.(I.z).\cos.(1.y) - \sin.(I.y).\cos.(1.z)}\right\}
\end{aligned}\right\} . \; (10)$$

$$\left.\begin{aligned}
\cos.(1'.\bar{z}).\cos.(I.z) &= \cos.(1'.y).\sin.(I.x) - \cos.(1'.x).\sin.(I.y)\\
\cos.(1''.\bar{y}).\cos.(I.y) &= \cos.(1''.z).\sin.(I.x) - \cos.(1''.x).\sin.(I.z)\\
\cos.(1'''.\bar{x})\cos.(I.x) &= \cos.(1'''.z)\sin.(I.y) - \cos.(1'''.y)\sin.(I.z)
\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

$$\left.\begin{aligned}
\cos.(1'.\bar{z}) &= \frac{\sin.(I.y).\cos.(1.x) - \sin.(I.x).\cos.(1.y)}{\cos.(I.z).\sin.(1.z)}\\
\cos.(1''.\bar{y}) &= \frac{\sin.(I.z).\cos.(1.x) - \sin.(I.x).\cos.(1.z)}{\cos.(I.y).\sin.(1.y)}\\
\cos.(1'''.\bar{x}) &= \frac{\sin.(I.z).\cos.(1.y) - \sin.(I.y).\cos.(1.z)}{\cos.(I.x).\sin.(1.x)}
\end{aligned}\right\} . \quad (12)$$

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{tg}.(1'.\bar{z}) &= \frac{\{\sin.(I.y.\cos.(1'.y) + \sin.(I.x).\cos.(1'.x)\}}{\{\sin.(I.y).\cos.(1'.x) - \sin.(I.x).\cos.(1'.y)\}}\\
\mathrm{tg}.(1''.\bar{y}) &= \frac{\{\sin.(I.z).\cos.(1''.z) + \sin.(I.x).\cos.(1''.x)\}}{\{\sin.(I.z).\cos.(1''.x) - \sin.(I.x).\cos.(1''.z)\}}\\
\mathrm{tg}.(1'''.\bar{x}) &= \frac{\{\sin.(I.z).\cos.(1'''.z) + \sin.(I.y).\cos.(1'''.y)\}}{\{\sin.(I.z).\cos.(1'''.y) - \sin.(I.y).\cos.(1'''.z)\}}
\end{aligned}\right\} . \quad (13)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\mathrm{cs}.(1'.\bar{x}) = \mathrm{cs}.(\bar{x}.y).\mathrm{cs}.(1'.y)\,;\ \mathrm{cs}.(1'.\bar{y}) = \mathrm{cs}.(\bar{y}.x).\mathrm{cs}.(1'.x)\\
&\mathrm{cs}.(1''.\bar{x}) = \mathrm{cs}.(\bar{x}.z).\mathrm{cs}.(1''.z)\,;\ \mathrm{cs}.(1''.\bar{z}) = \mathrm{cs}.(\bar{z}.x).\mathrm{cs}.(1''.x)\\
&\mathrm{cs}.(1'''.\bar{y}) = \mathrm{cs}.(\bar{y}.z).\mathrm{cs}.(1'''.z)\,;\ \mathrm{cs}.(1'''.\bar{z}) = \mathrm{cs}.(\bar{z}.y).\mathrm{cs}.(1'''.z)
\end{aligned}\right\} . \quad (14)$$

$$\left.\begin{aligned}
\sin.(1'.I) &= \cos.(1'.x).\cos.(I.yz) + \cos.(1'.y).\cos.(I.xz)\\
\sin.(1''.I) &= \cos.(1''.x).\cos.(I.yz) + \cos.(1''.z).\cos.(I.xy)\\
\sin.(1'''.I) &= \cos.(1'''.y).\cos.(I.xz) + \cos.(1'''.z)\cos.(I.xy)
\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\sin.(1.I)}{\sin.(I.z)} &= \{\cos.(1.z) - \cos.(1.y).\mathrm{tg}.(\bar{x}.y) - \cos.(1.x).\mathrm{tg}.(\bar{y}.x)\}\\
\frac{\sin.(1.I)}{\sin.(I.y)} &= \{\cos.(1.y) - \cos.(1.x).\mathrm{tg}.(\bar{z}.x) + \cos.(1.z).\mathrm{tg}.(\bar{x}.z)\}\\
\frac{\sin.(1.I)}{\sin.(I.x)} &= \{\cos.(1.x) + \cos.(1.y).\mathrm{tg}.(\bar{z}.y) + \cos.(1.z).\mathrm{tg}.(\bar{y}.z)\}
\end{aligned}\right\} \quad (16)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\sin.(1'.I)}{\sin.(I.z)} &= -\{\cos.(1'.y).\mathrm{tg}.(\bar{x}.y) + \cos.(1'.x).\mathrm{tg}.(\bar{y}.x)\}\\
\frac{\sin.(1''.I)}{\sin.(I.y)} &= -\{\cos.(1''.x).\mathrm{tg}.(\bar{z}.x) - \cos.(1''.z).\mathrm{tg}.(\bar{x}.z)\}\\
\frac{\sin.(1'''.I)}{\sin.(I.x)} &= -\{\cos.(1'''.y).\mathrm{tg}.(\bar{z}.y) + \cos.(1'''.z).\mathrm{tg}.(\bar{y}.z)\}
\end{aligned}\right\} \quad (17)$$

185. Alle in dem vorhergehenden Art. angeführten Ausdrücke stellen sich unter einer rationalen Form dar. Nun

giebt es aber einige Winkel, deren Sinusse, Cosinusse oder Tangenten, durch keine solche Form dargestellt werden können, z. B. die Ausdrücke (2) (3) Art. 174; (2) (3) (8) (9) Art. 176; (2) (3) Art. 177. Jedoch können auch diese durch Einführung eines Hilfswinkels rational ausgedrückt werden. Solche Winkel zur Reduktion des Ausdruckes (2) Art. 174 sind diejenigen, welche eine in der Ebene liegende und senkrecht auf der gegebenen Geraden stehende Linie, mit den coordinirten Achsen macht; diese Linie haben wir Art. 168 mit 2 bezeichnet. Die Gl. (4) Art. 174 geben nun:

$$\left.\begin{aligned} \cos.(1.I) &= \frac{Ca-Ba}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{1+a^2+a_{,}^2}}\cdot\frac{1}{\cos(2.x)} \\ \cos.(1.I) &= \frac{C-Aa_{,}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{1+a^2+a_{,}^2}}\cdot\frac{1}{\cos(2.y)} \\ \cos.(1.I) &= \frac{B-Aa}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{1+a^2+a_{,}^2}}\cdot\frac{1}{\cos.(2.z)} \end{aligned}\right\}$$

Wendet man zur Reduktion dieser Ausdrücke die Gl. (g) (h) Art. 177 an; so findet man:

$$\left.\begin{aligned} \cos.(1.I) &= \left\{\frac{\cos.(I.xy).\cos.(1.y)-\cos.(I.xz).\cos.(1.z)}{\cos.(2.x)}\right\} \\ \cos.(1.I) &= \left\{\frac{\cos.(I.xy).\cos.(1.x)-\cos.(I.yz).\cos.(1.z)}{\cos.(2.y)}\right\} \\ \cos.(1.I) &= \left\{\frac{\cos.(I.xz).\cos.(1.x)-\cos.(I.yz).\cos.(1.y)}{\cos.(2.z)}\right\} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Oder:

$$\left.\begin{aligned} \cos.(1.I) &= \frac{tg.(\bar{y}.x).\cos.(1.z)-tg.(\bar{z}.x).\cos.(1.y)}{tg.(\bar{y}.\bar{z}).\cos.(2.x)} \\ \cos.(1.I) &= \frac{tg.(\bar{z}.y).\cos.(1.x)-tg.(\bar{x}.y).\cos.(1.z)}{tg.(\bar{x}.\bar{z}).\cos.(2.y)} \\ \cos.(1.I) &= \frac{tg.(\bar{y}.z).\cos.(1.x)-tg.(\bar{x}.z).\cos.(1.y)}{tg.(\bar{x}.\bar{y}).\cos.(1.z)} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (2)$$

Um den Ausdruck (2) Art. 176 zu reduziren, setze man:

$$\text{tg.}(\alpha) = \frac{Ba+Ca_{,}}{\sqrt{B^2+C^2}} = \cos.(\bar{x}.y).\text{tg.}(1''.x).-\cos.(\bar{x}.z).\text{tg.}(1'.x);$$

$$\text{tg.}(\beta) = \frac{A+Ca_{,}}{a.\sqrt{A^2+C^2}} = \cos.(\bar{y}.x).\text{tg.}(1'''.y)-\cos.(\bar{y}.z).\text{tg.}(1'.y);$$

$$\text{tg.}(\gamma) = \frac{A+Ba}{a_{,}.\sqrt{A^2+B^2}} = \cos.(\bar{z}.x).\text{tg.}(1'''.z)-\cos.(\bar{z}.y).\text{tg.}(1''z);$$

$$\sin.(1.\bar{x}) = \left\{\frac{\text{cs.}(1.x)}{\text{cs.}(\alpha)}\right\};\ \sin.(1.\bar{y}) = \left\{\frac{\cos.(1.y)}{\cos.(\beta)}\right\};\ \sin(1.\bar{z}) = \left\{\frac{\text{cs.}(1.z)}{\cos.(\gamma)}\right\} \quad (3)$$

$$\left.\begin{aligned}
\text{tg.}(1.\bar{x}) &= \frac{\cos.(1.x)}{\cos.(\alpha).[\cos.(\bar{x}.y).\cos.(1.y)+\cos.(\bar{x}.z).\cos.(1.z)]} \\
\text{tg.}(1.\bar{y}) &= \frac{\cos.(1.y)}{\cos.(\beta).[\cos.(\bar{y}.x).\cos.(1.x)+\cos.(\bar{y}.z).\cos.(1.z)]} \\
\text{tg.}(1.\bar{z}) &= \frac{\cos.(1.z)}{\cos.(\gamma).[\cos.(\bar{z}.x).\cos.(1.x)+\cos.(\bar{z}.y).\cos.(1.y)]}
\end{aligned}\right\} (4)$$

Man lernt hier nun ein neues Verfahren kennen, durch welches alle vorhergehende Ausdrücke noch unter andern Formen gebracht werden können, indem man schickliche Hilfswinkel einführt.

186. Unter den Relationen des Art. 184 bewähren sich die Gl. (7) schon an sich als identische; denn sie zeigen ganz deutlich an, dass:

$$\begin{aligned}
(1'.\bar{z}) &= [(\bar{z}.x)-(1'.x)] \\
(1''.\bar{y}) &= [(\bar{y}.x)-(1''.x)] \\
(1'''.\bar{x}) &= [(\bar{x}.y)-(1'''.y)]
\end{aligned}$$

welche Gleichungen offenbar identisch sind.

Was nun die Ausdrücke der Cosinusse und Tangenten dieser drei Winkel betrifft; so will ich noch einige Formen derselben anführen. Es ist nemlich:

$$\left.\begin{aligned}
\cos.(1'.\bar{z}) &= \frac{\cos.(1.\bar{z})}{\sin.(1.z)} = \frac{\cos.(1.\bar{z})}{\cos.(1.xy)}; \\
\cos.(1''.\bar{y}) &= \frac{\cos.(1.\bar{y})}{\sin.(1.y)} = \frac{\cos.(1.\bar{y})}{\cos.(1.xz)}; \\
\cos.(1'''.\bar{x}) &= \frac{\cos.(1.\bar{x})}{\sin.(1.x)} = \frac{\cos.(1.\bar{x})}{\cos.(1.yz)};
\end{aligned}\right\} \ldots (1)$$

$$\left.\begin{aligned}
tg.(1'.\bar{z}) &= \frac{\cos.(\bar{z}.x).\cos.(1.y) - \cos.(\bar{z}.y).\cos.(1.x)}{\cos.(1.z)} \\
tg.(1''.\bar{y}) &= \frac{\cos.(\bar{y}.x).\cos.(1.z) - \cos.(\bar{y}.z).\cos.(1.x)}{\cos.(1.y)} \\
tg.(1'''.\bar{x}) &= \frac{\cos.(\bar{x}.y).\cos.(1.z) - \cos.(\bar{x}.z).\cos.(1.y)}{\cos.(1.x)}
\end{aligned}\right\} . (2)$$

$$\left.\begin{aligned}
tg.(1'.\bar{z}) &= \frac{\sin.(I.y).\cos.(1.y) - \sin.(I.x).\cos.(1.x)}{\cos.(1.z).\cos.(I.z)} \\
tg.(1''.\bar{y}) &= \frac{\sin.(I.z).\cos.(1.z) - \sin.(I.x).\cos.(1.x)}{\cos.(1.y).\cos.(I.y)} \\
tg.(1'''.\bar{x}) &= \frac{\sin.(I.z).\cos.(1.z) - \sin.(I.y).\cos.(1.y)}{\cos.(1.x).\cos.(I.x)}
\end{aligned}\right\} . (3)$$

$$\left.\begin{aligned}
tg.(1'.\bar{z}) &= \frac{\cos.(\bar{z}.x).\cos.(1.y) - \cos.(\bar{z}.y).\cos.(1.x)}{\cos.(\bar{z}.x).\cos.(1.x) + \cos.(\bar{z}.y).\cos.(1.y)} \\
tg.(1''.\bar{y}) &= \frac{\cos.(\bar{y}.x).\cos.(1.z) - \cos.(\bar{y}.z).\cos.(1.x)}{\cos.(\bar{y}.x).\cos.(1.x) + \cos.(\bar{y}.z).\cos.(1.z)} \\
tg.(1'''.\bar{x}) &= \frac{\cos.(\bar{x}.y).\cos.(1.z) - \cos.(\bar{x}.z).\cos.(1.y)}{\cos.(\bar{x}.y).\cos.(1.y) + \cos.(\bar{x}.z).\cos.(1.z)}
\end{aligned}\right\} . (4)$$

$$\left.\begin{aligned}
\sin.(1'.\bar{z}) &= \frac{\cos.(\bar{z}.x).\cos.(1.y) - \cos.(\bar{z}.y).\cos.(1.x)}{\sin.(1.z)} \\
\sin.(1''.\bar{y}) &= \frac{\cos.(\bar{y}.x).\cos.(1.z) - \cos.(\bar{y}.z).\cos.(1.x)}{\sin.(1.y)} \\
\sin.(1'''.\bar{x}) &= \frac{\cos.(\bar{x}.y).\cos.(1.z) - \cos.(\bar{x}.z).\cos.(1.y)}{\sin.(1.x)}
\end{aligned}\right\} . (5)$$

187. Alle bisher angeführten Gleichungen sind von der Art, dass sie die Beziehungen eines der Winkel, welche die Linien 1, 1', 1'', 1''' mit den Linien $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ oder mit der Ebene I machen, gegen die Winkel, welche diese Linien mit den coordinirten Achsen bilden, enthalten. Verknüpft man aber die Gleichungen der Art. 174, 176, 177; so kann man, wenn die Combinationen dieser Gleichungen schicklich gewählt werden, neue und sehr merkwürdige Relationen unter diesen Winkeln finden. So z. B. giebt die Verbindung der Gleichungen (1) und (4) Art. 176:

$$\left.\begin{aligned}
\cos.(1.\bar{z}) &= \cos.(1'.\bar{z}).\frac{\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{1+a^2+a_{\prime}^2}} = \cos.(1'.\bar{z}).\sin.(1.z)\\
\cos.(1.\bar{y}) &= \cos.(1''.\bar{y}).\frac{\sqrt{1+a_{\prime}^2}}{\sqrt{1+a^2+a_{\prime}^2}} = \cos.(1''.\bar{y}).\sin.(1.y)\\
\cos.(1.\bar{x}) &= \cos.(1'''.\bar{x}).\frac{\sqrt{a^2+a_{\prime}^2}}{\sqrt{1+a^2+a_{\prime}^2}} = \cos.(1'''.\bar{x})\sin.(1.x)
\end{aligned}\right\}(1)$$

Auf ähnliche Art giebt die Verbindung der Gleichungen (5) Art. 176 mit den Gl. (1) Art. 177:

$$\left.\begin{aligned}
\sin.(1'.I) &= \frac{\sin.(1'.\bar{z}).\sqrt{A^2+B^2}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \sin.(1'.\bar{z}).\cos.(I.z)\\
\sin.(1''.I) &= \frac{\sin.(1''.\bar{y}).\sqrt{A^2+C^2}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \sin(1''.\bar{y}).\cos.(I.y)\\
\sin.(1'''.I) &= \frac{\sin.(1'''.\bar{x}).\sqrt{B^2+C^2}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \sin.(1'''.\bar{x}).\cos.(I.x)
\end{aligned}\right\}(2)$$

Die Verbindungen der Gleichungen (1)* Art. 176 unter einander geben:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\cos.(1.\bar{x})}{\cos.(1.\bar{y})} &= \left(\frac{Ca-Ba_{\prime}}{C-Aa_{\prime}}\right).\frac{\sqrt{A^2+C^2}}{\sqrt{B^2+C^2}};\\
\frac{\cos.(1.\bar{x})}{\cos.(1.\bar{z})} &= \left(\frac{Ca-Ba_{\prime}}{B-Aa_{\prime}}\right).\frac{\sqrt{A^2+B^2}}{\sqrt{B^2+C^2}};\\
\frac{\cos.(1.\bar{y})}{\cos.(1.\bar{z})} &= \left(\frac{C-Aa_{\prime}}{B-Aa}\right).\frac{\sqrt{A^2+B^2}}{\sqrt{A^2+C^2}};
\end{aligned}\right\}\ .\ .\ (3)$$

Verbindet man mit diesen Gleichungen die Gl. (6) und (7) Art. 112; so findet man:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\cos.(1.\bar{x})}{\cos.(1.\bar{y})} &= \left(\frac{Ca-Ba_{\prime}}{C-Aa_{\prime}}\right).\frac{A.\sin.(\bar{y}.\bar{z})}{B.\sin.(\bar{x}.\bar{z})};\\
\frac{\cos.(1.\bar{x})}{\cos.(1.\bar{z})} &= \left(\frac{Ca-Ba_{\prime}}{B-Aa}\right).\frac{A.\sin.(\bar{y}.\bar{z})}{C.\sin.(\bar{x}.\bar{y})};\\
\frac{\cos.(1.\bar{y})}{\cos.(1.\bar{z})} &= \left(\frac{C-Aa_{\prime}}{B-Aa}\right).\frac{B.\sin.(\bar{x}.\bar{z})}{C.\sin.(\bar{x}.\bar{y})};
\end{aligned}\right\}\ .\ .\ (4)$$

Und:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\cos.(1.\bar{x})}{\cos.(1.\bar{y})} &= \left(\frac{Ca-Ba_{,}}{C-Aa_{,}}\right).\frac{B.\cos.(\bar{x}.\bar{z})}{A.\cos.(\bar{y}.\bar{z})};\\ \frac{\cos.(1.\bar{x})}{\cos.(1.\bar{z})} &= \left(\frac{Ca-Ba_{,}}{B-Aa}\right).\frac{C.\cos.(\bar{x}.\bar{y})}{A.\cos.(\bar{y}.\bar{z})};\\ \frac{\cos.(1.\bar{y})}{\cos.(1.\bar{z})} &= \left(\frac{C-Aa_{,}}{B-Aa}\right).\frac{C.\cos.(\bar{x}.\bar{y})}{B.\cos.(\bar{x}.\bar{z})};\end{aligned}\right\}\quad ..\,(5)$$

Mit Rücksicht auf die Gl. (2) Art. 168 hat man hieraus ferner:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\cos.(1.\bar{x})}{\cos.(1.\bar{y})} &= \left\{\frac{\cos.(2.x).\sin.(\bar{y}.\bar{z}).\sin.(I.x)}{\cos.(2.y).\sin.(\bar{x}.\bar{z}).\sin.(I.y)}\right\}\\ \frac{\cos.(1.\bar{x})}{\cos.(1.\bar{z})} &= \left\{\frac{\cos.(2.x).\sin.(\bar{y}.\bar{z}).\sin.(I.x)}{\cos.(2.z).\sin.(\bar{x}.\bar{y}).\sin.(I.z)}\right\}\\ \frac{\cos.(1.\bar{y})}{\cos.(1.\bar{z})} &= \left\{\frac{\cos.(2.y).\sin.(\bar{x}.\bar{z}).\sin.(I.y)}{\cos.(2.z).\sin.(\bar{x}.\bar{y}).\sin.(I.z)}\right\}\end{aligned}\right\}\quad ..\,(6)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\cos.(1.\bar{x})}{\cos.(1.\bar{y})} &= \left\{\frac{\cos.(2.x).\cos.(\bar{x}.\bar{z}).\cos.(I.xz)}{\cos.(2.y).\cos.(\bar{y}.\bar{z}).\cos.(I.yz)}\right\}\\ \frac{\cos.(1.\bar{x})}{\cos.(1.\bar{z})} &= \left\{\frac{\cos.(2.x).\cos.(\bar{x}.\bar{y}).\cos.(I.xy)}{\cos.(2.z).\cos.(\bar{y}.\bar{z}).\cos.(I.yz)}\right\}\\ \frac{\cos.(1.\bar{y})}{\cos.(1.\bar{z})} &= \left\{\frac{\cos.(2.y).\cos.(\bar{x}.\bar{y}).\cos.(I.xy)}{\cos.(2.z).\cos.(\bar{x}.\bar{z}).\cos.(I.xz)}\right\}\end{aligned}\right\}\quad ..\,(7)$$

Durch solche Verfahrungsarten lassen sich nun eine grosse Menge der interessantesten Relationen gewinnen, vorzüglich, wenn man auch noch auf diejenigen Rücksicht nimmt, welche wir Art. 113 Gl. (4) u. s. w. bis (14) gefunden haben. So z. B. giebt die Verbindung der Gl. (5) dieses Art. 113 mit den Gl. (5) des gegenwärtigen Art.:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\cos.(1.\bar{x})}{\cos.(1.\bar{y})} &= \left(\frac{Ca-Ba_{,}}{C-Aa_{,}}\right).\frac{l}{l_{,}} = \frac{l.\cos.(2.x)}{l_{,}.\cos.(2.y)}\\ \frac{\cos.(1.\bar{x})}{\cos.(1.\bar{z})} &= \left(\frac{Ca-Ba_{,}}{B-Aa_{,}}\right).\frac{l}{l_{,,}} = \frac{l.\cos.(2.x)}{l_{,,}.\cos.(2.z)}\\ \frac{\cos.(1.\bar{y})}{\cos.(1.\bar{z})} &= \left(\frac{C-Aa_{,}}{B-Aa}\right).\frac{l_{,}}{l_{,,}} = \frac{l_{,}.\cos.(2.y)}{l_{,,}.\cos.(2.z)}\end{aligned}\right\}\quad ..\,(8)$$

so dass:

$$\cos.(1.\bar{x}):\cos.(1.\bar{y}):\cos.(1.\bar{z}) = l.\cos.(2.x):l_{,}.\cos.(2.y):l_{,,}.\cos.(2.z);$$

Verbindet man die Gl. (7) Art. 176 unter einander; so findet man:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\cos.(1'.\bar{x})}{\cos.(1'.\bar{y})} &= a.\sqrt{\left(\frac{A^2+C^2}{B^2+C^2}\right)}; \\ \frac{\cos.(1''.\bar{x})}{\cos.(1''.\bar{z})} &= -a_{,}.\sqrt{\left(\frac{A^2+B^2}{B^2+C^2}\right)}; \\ \frac{\cos.(1'''.\bar{y})}{\cos.(1'''.\bar{z})} &= \frac{a_{,}}{a}.\sqrt{\left(\frac{A^2+B^2}{A^2+C^2}\right)}; \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (9)$$

Mit Rücksicht auf dieselben Gl. (6) und (7) Art. 112 findet man hieraus noch weiter:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\cos.(1'.\bar{x})}{\cos.(1'.\bar{y})} &= \frac{A.\sin.(\bar{y}.\bar{z})}{B.\sin.(\bar{x}.\bar{z})}.a = \frac{B.\cos.(\bar{x}.\bar{z})}{A.\sin.(\bar{y}.\bar{z})}.a \\ \frac{\cos.(1''.\bar{x})}{\cos.(1''.\bar{z})} &= -\frac{A.\sin.(\bar{y}.\bar{z})}{C.\sin.(\bar{x}.\bar{y})}.a_{,} = -\frac{C.\cos.(\bar{x}.\bar{y})}{A.\cos.(\bar{y}.\bar{z})}.a_{,} \\ \frac{\cos.(1'''.\bar{y})}{\cos.(1'''.\bar{z})} &= \frac{B.\sin.(\bar{x}.\bar{z})}{C.\sin.(\bar{x}.\bar{y})}.\frac{a_{,}}{a} = \frac{C.\cos.(\bar{x}.\bar{y})}{B.\cos.(\bar{x}.\bar{z})}.\frac{a_{,}}{a} \end{aligned}\right\} \quad . \quad (10)$$

Hieraus erhält man wieder:

(11)

$$\begin{aligned} \frac{\text{cs}.(1'.\bar{x})}{\text{cs}.(1'.\bar{y})} &= \frac{\sin.(\bar{y}.\bar{z})\sin.(I.x)\text{cs}.(1.y)}{\sin.(\bar{x}.\bar{z})\sin.(I.y)\text{cs}.(1.x)} = \frac{\text{cs}.(I.xz)\text{cs}.(\bar{x}.\bar{z}).\text{cs}.(1.y)}{\text{cs}.(I.yz)\text{cs}.(\bar{y}.\bar{z})\text{cs}.(1.x)} \\ \frac{\text{cs}.(1''.\bar{x})}{\text{cs}.(1''.\bar{z})} &= -\frac{\sin.(\bar{y}.\bar{z})\sin.(I.x)\text{cs}.(1.z)}{\sin.(\bar{x}.\bar{y})\sin.(I.z)\text{cs}.(1.x)} = -\frac{\text{cs}.(I.xy)\text{cs}.(\bar{x}.\bar{y})\text{cs}.(1.z)}{\text{cs}.(I.yz)\text{cs}.(\bar{y}.\bar{z}).\text{cs}.(1.x)} \\ \frac{\text{cs}(1'''.\bar{y})}{\text{cs}.(1'''.\bar{z})} &= \frac{\sin.(\bar{x}.\bar{z}).\sin.(I.y)\text{cs}.(1.z)}{\sin.(\bar{x}.\bar{y})\sin.(I.z)\text{cs}.(1.y)} = \frac{\text{cs}.(I.xy)\text{cs}.(\bar{x}.\bar{y}).\text{cs}.(1.z)}{\text{cs}.(I.xz)\text{cs}.(\bar{x}.\bar{z})\text{cs}.(1.y)} \end{aligned}$$

Aus den Gl. (10) findet man ferner, wenn man die Gl. (5) Art. 113 anwendet:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\cos.(1'.\bar{x})}{\cos.(1'.\bar{y})} &= \frac{l}{l_{,}}.a = \frac{l.\cos.(1.y)}{l_{,}.\cos.(1.x)}; \\ \frac{\cos.(1''.\bar{x})}{\cos.(1''.\bar{z})} &= -\frac{l}{l_{,,}}.a_{,} = -\frac{l.\cos.(1.z)}{l_{,,}.\cos.(1.x)}; \\ \frac{\cos.(1'''.\bar{y})}{\cos.(1'''.\bar{z})} &= \frac{l_{,}}{l_{,,}}.\frac{a_{,}}{a} = \frac{l_{,}.\cos.(1.z)}{l_{,,}.\cos.(1.y)}; \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (12)$$

188. Die bisher entwickelten Ausdrücke sind ganz allgemein, und gelten, welches auch immer die Lage sowohl de Geraden als auch der Ebene seyn mag. Nun aber wollen wi

noch einen merkwürdigen besondern Fall in Betrachtung ziehen, und zwar denjenigen, wo angenommen wird, dass die gerade Linie 1 zugleich in der Ebene I liegt; die Bedingung, welche erforderlich ist, damit eine Gerade ganz in einer Ebene liege, wird leicht aufgefunden. Denn setzt man die Werthe von yz aus den gegebenen Gleichungen der Geraden in die Gleichung der Ebene; so muss dieselbe, im Falle die Gerade ganz in der Ebene liegt, identisch werden. Da man nun erhält:

$$(A+Ba+Ca_{,}).x+(Bb+Cb_{,}+D) = 0;$$

so folgt, dass in diesem Falle die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} A+Ba+Ca_{,} = 0 \\ Bb+Cb_{,}+D = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (a)$$

statt finden müssen, wenn jene für jeden Werth von x idendisch werden soll. Die zwei Gleichungen (a) sind mithin die Bedingungsgleichungen, damit eine Gerade ganz in eine Ebene falle.

Die erste dieser Gleichungen für sich enthält die Bedingung, dass die Gerade der Ebene parallel sey; die zweite für sich enthält die Bedingung, dass der Abstand dieser Parallelen von der Ebene gleich Null werde.

Im Allgemeinen ist demnach eine Gerade im Raume, deren Gleichungen sind:

$$\left.\begin{array}{l} y = ax+b; \\ z = -\left(\frac{A+Ba}{C}\right).x - \left(\frac{Bb+D}{C}\right); \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (b)$$

ganz in derjenigen Ebene enthalten, deren Gleichung:

$$Ax+By+Cz+D = 0$$

ist. Und umgekehrt, wenn die Gleichung einer Ebene ist:

$$\{D.a+(ab_{,}-a_{,}b).C\}.x-(Cb+D).y+C.b.z+bD = 0;$$

so wird man schliessen können, dass in ihr die geraden Linien liegen, deren Gleichungen sind:

$$\left.\begin{array}{l} y = ax+b; \\ z = a_{,}x+b_{,}; \end{array}\right\}$$

Wenn die gerade Linie und die Ebene durch den Anfangspunkt geht, in welchem Falle:

$$b = 0; \ b_{,} = 0; \ D = 0,$$

werden wird; so reicht es hin, wenn die Werthe den Grössen $aa_{,}ABC$ nur der einzigen Bedingungsgleichung:

$$A+Ba+Ca_{,}=0$$

ein Genüge leisten, damit die Gerade ganz in der Ebene liege.

189. Auf dieser Geraden, welche durch den Anfangspunkt geht, und ganz in einer Ebene liegt, nehmen wir nun einen Punkt an, dessen Entfernung vom Anfangspunkte der Coordinaten zur Einheit angenommen werde. Die Coordinaten dieses Punktes seyen $x'y'z'$; so ist:

$$a=\frac{y'}{x'};\ a_{,}=\frac{z'}{x'};\Big\}\ \ldots\ldots \quad (1)$$

und $x'=\cos.(1.x)$; $y'=\cos.(1.y)$; $z'=\cos.(1.z)$; . (2)

Die Lage der Geraden wollen wir also hier durch $x'y'z'$ bestimmen. Die Gleichungen der Projektionen der Geraden 1 in den coordinirten Ebenen sind dann, und zwar:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{der Linie } 1' \ \ldots & (x'y-xy')=0; \\ \ldots\ 1'' \ \ldots & (x'z-xz')=0; \\ \ldots\ 1''' \ \ldots & (yz'-y'z)=0; \end{array}\right\} \ldots (3)$$

Man hat also:

$$\text{tg.}(1'.x)=\left(\frac{y'}{x'}\right);\ \text{tg.}(1''.x)=\left(\frac{z'}{x'}\right);\ \text{tg.}(1'''.x)=\left(\frac{y'}{z'}\right) \quad .\ (4)$$

Nun hat man von einer andern Seite:

$$\left.\begin{array}{l} x'=\cos.(1.z).\cos.(z.x)-\sin.(1.z).\sin.(z.x).\sin.(I.z); \\ y'=\cos.(1.z).\sin.(z.x)+\sin.(1.z).\cos.(z.x).\sin.(I.z); \\ z'=\sin.(1.z).\cos.(I.z); \end{array}\right\} \quad (5)$$

Diese Ausdrücke ergeben sich nemlich unmittelbar aus denjenigen, welche Art. 62 im ersten Capitel entwickelt worden sind, wenn man daselbst 1 anstatt $x_{,}$ schreibt, und dabei bemerkt, dass $\cos.(x_{,}.x)$; $\cos.(x_{,}.y)$; $\cos.(x_{,}.z)$ hier $\cos.(1.x)$, $\cos.(1.y)$, $\cos.(1.z)$ oder $x'y'z'$ sind.

190. Unter diesen Voraussetzungen erhält man nun aus den Gleichungen Art. 176.

$$\left.\begin{aligned}\cos.(1.\bar{z}) &= \left\{\frac{Bx'-Ay'}{\sqrt{A^2+B^2}}\right\};\\ \cos.(1.\bar{y}) &= \left\{\frac{Cx'-Az'}{\sqrt{A^2+C^2}}\right\};\\ \cos.(1.\bar{x}) &= \left\{\frac{Cy'-Bz'}{\sqrt{B^2+C^2}}\right\};\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (1)$$

$$\left.\begin{aligned}\sin.(1.\bar{x}) &= \frac{x'.\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{\sqrt{B^2+C^2}} = \frac{x'}{\cos.(I.x)};\\ \sin.(1.\bar{y}) &= \frac{y'.\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{\sqrt{A^2+C^2}} = \frac{y'}{\cos.(I.y)};\\ \sin.(1.z) &= \frac{z'.\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{z'}{\cos.(I.z)};\end{aligned}\right\} \quad . (2)$$

$$\left.\begin{aligned}\text{tg}.(1.\bar{x}) &= \frac{x'.\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{Cy'-Bz'} = \frac{x'}{y'\sin.(I.z)-z'\sin.(I.y)};\\ \text{tg}.(1.\bar{y}) &= \frac{y'.\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{Cx'-Az'} = \frac{y'}{x'.\sin.(I.z)-z'.\sin.(I.x)};\\ \text{tg}.(1.\bar{z}) &= \frac{z'.\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{Bx'-Ay'} = \frac{z'}{x'.\sin.(I.y)-y'.\sin(I.x)};\end{aligned}\right\} (3)$$

$$\left.\begin{aligned}\cos.(1'.\bar{z}) &= \frac{Bx'-Ay'}{\sqrt{x'^2+y'^2}.\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{Bx'-Ay'}{\sin.(1.z).\sqrt{A^2+B^2}};\\ \cos.(1''.\bar{y}) &= \frac{Cx'-Az'}{\sqrt{x'^2+z'^2}.\sqrt{A^2+C^2}} = \frac{Cx'-Az'}{\sin.(1.y).\sqrt{A^2+C^2}};\\ \cos.(1'''.\bar{x}) &= \frac{Cy'-Bz'}{\sqrt{y'^2+z'^2}.\sqrt{B^2+C^2}} = \frac{Cy'-Bz'}{\sin.(1.x).\sqrt{B^2+C^2}};\end{aligned}\right\} (4)$$

$$\left.\begin{aligned}\sin.(1'.\bar{z}) &= \frac{-C.z'}{\sqrt{x'^2+y'^2}.\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{-C.z'}{\sin.(1.z).\sqrt{A^2+B^2}}\\ \sin.(1''.\bar{y}) &= \frac{-B.y'}{\sqrt{x'^2+z'^2}.\sqrt{A^2+C^2}} = \frac{-B.y'}{\sin.(1.y).\sqrt{A^2+C^2}}\\ \sin.(1'''.\bar{x}) &= \frac{-A.x'}{\sqrt{y'^2+z'^2}.\sqrt{B^2+C^2}} = \frac{-A.x'}{\sin.(1.x).\sqrt{B^2+C^2}}\end{aligned}\right\} (5)$$

$$\left.\begin{aligned}\text{tg.}(1'.\bar{z}) &= \left(\frac{-C.z'}{Bx'-A.y'}\right);\\ \text{tg.}(1''.\bar{y}) &= \left(\frac{-B.y'}{Cx'-A.z'}\right);\\ \text{tg.}(1'''.\bar{x}) &= \left(\frac{-A.x'}{Cy'-B.z'}\right);\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ (6)$$

$$\left.\begin{aligned}\cos.(1'.\bar{x}) &= \frac{+C.y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}.\sqrt{B^2+C^2}} = \frac{+Cy'}{\sin.(1.z).\sqrt{B^2+C^2}}\\ \cos.(1''.\bar{x}) &= \frac{-.Bz'}{\sqrt{x'^2+z'^2}.\sqrt{B^2+C^2}} = \frac{-B.z'}{\sin.(1.y).\sqrt{B^2+C^2}}\\ \cos.(1'''.\bar{y}) &= \frac{-A.z'}{\sqrt{y'^2+z'^2}.\sqrt{A^2+C^2}} = \frac{-A.z'}{\sin.(1.x).\sqrt{A^2+C^2}}\\ \cos.(1'.\bar{y}) &= \frac{+.Cx'}{\sqrt{x'^2+y'^2}.\sqrt{A^2+C^2}} = \frac{+Cx'}{\sin.(1.z).\sqrt{A^2+C^2}}\\ \cos.(1''.\bar{z}) &= \frac{+B.x'}{\sqrt{x'^2+z'^2}.\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{+B.x'}{\sin.(1.y).\sqrt{A^2+B^2}}\\ \cos.(1'''.\bar{z}) &= \frac{-A.y'}{\sqrt{y'^2+z'^2}.\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{-A.y'}{\sin.(1.x).\sqrt{A^2+B^2}}\end{aligned}\right\}(7)$$

Die Gleichungen (1) Art. 177 geben:

$$\left.\begin{aligned}\sin.(1'.I) &= \frac{-C.z'}{\sqrt{x'^2+y'^2}.\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{-z'.\cos.(I.xy)}{\sin.(1.z)};\\ \sin.(1''.I) &= \frac{-B.y'}{\sqrt{x'^2+z'^2}.\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{-y'.\cos.(I.xz)}{\sin.(1.y)};\\ \sin.(1'''.I) &= \frac{-A.x'}{\sqrt{y'^2+z'^2}.\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{-x'.\cos.(I.yz)}{\sin.(1.x)};\end{aligned}\right\}(8)$$

In dem besondern Falle, den wir betrachten, hat man offenbar:

$$[(1.\bar{y})-(1.\bar{z})] = (\bar{y}.\bar{z});$$
$$[(1.\bar{z})-(1.\bar{x})] = (\bar{x}.\bar{z});$$
$$[(1.\bar{x})-(1.\bar{y})] = (\bar{x}.\bar{y});$$

Es ist also:

$$\left.\begin{aligned}\cos.[(1.\bar{y})-(1.\bar{z})] &= \cos.(\bar{y}.\bar{z}) = -\text{tg.}(I.y).\text{tg.}(I.z);\\ \cos.[(1.\bar{x})-(1.\bar{x})] &= \cos.(\bar{x}.\bar{z}) = -\text{tg.}(I.z).\text{tg.}(I.x);\\ \cos.[(1.\bar{x})-(1.\bar{y})] &= \cos.(\bar{x}.\bar{y}) = -\text{tg.}(I.x).\text{tg.}(I.y);\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

191. Die im vorigen Capitel entwickelten Ausdrücke geben wieder verschiedene merkwürdige Relationen zwischen Winkeln; aber sie sind nur für den Fall gültig, da die Gerade zugleich in der Ebene liegt. Einige davon sind folgende:

$$\left.\begin{aligned} \text{cs.}(1.\bar{x}) &= \sin.(\bar{x}.y)\,\text{cs.}(1.z)+\text{cs.}(\bar{x}.y)\,\text{cs}(1.y)=\sin.(1.x)\,\text{cs.}(1'''.\bar{x}) \\ \text{cs.}(1.\bar{y}) &= \sin.(\bar{y}.z).\text{cs.}(1.x)+\text{cs.}(\bar{y}.z)\,\text{cs.}(1.z)=\sin.(1.y).\text{cs.}(1''.\bar{y}) \\ \text{cs.}(1.\bar{z}) &= \sin.(\bar{z}.x)\,\text{cs.}(1.y)+\text{cs.}(\bar{z}.x)\,\text{cs.}(1.x)=\sin.(1.z).\text{cs.}(1'.\bar{z}) \end{aligned}\right\}(1)$$

$$\left.\begin{aligned} \text{tg.}(1.\bar{x}) &= \frac{\text{tg.}(1.yz)}{\cos.(I.x).\cos.(1'''.\bar{x})}; \\ \text{tg.}(1.\bar{y}) &= \frac{\text{tg.}(1.xz)}{\cos.(I.y).\cos.(1''.\bar{z})}; \\ \text{tg.}(1.\bar{z}) &= \frac{\text{tg.}(1.xy)}{\cos.(I.z).\cos.(1'.\bar{z})}; \end{aligned}\right\}\ldots(2)$$

$$\text{tg.}(1'.x)=\frac{\cos.(1.y)}{\cos.(1.x)};\ \text{tg.}(1''.z)=\frac{\cos.(1.x)}{\cos.(1.z)};\ \text{tg.}(1'''.y)=\frac{\cos.(1.z)}{\cos.(1.y)}\ (3)$$

$$\left.\begin{aligned} \sin.(1'.\bar{z}) &= \frac{\text{tg.}(1.xy)}{\text{tg.}(I.xy)} = \frac{\text{tg.}(I.z)}{\text{tg.}(1.z)}; \\ \sin.(1''.\bar{y}) &= \frac{\text{tg.}(1.xz)}{\text{tg.}(I.xz)} = \frac{\text{tg.}(I.y)}{\text{tg.}(1.y)}; \\ \sin.(1'''.\bar{x}) &= \frac{\text{tg.}(1.yz)}{\text{tg.}(I.yz)} = \frac{\text{tg.}(I.x)}{\text{tg.}(1.x)}; \end{aligned}\right\}\ldots(4)$$

$$\text{cs.}(1'.\bar{z})=\frac{\cos.(1.\bar{z})}{\sin.(1.z)};\ \text{cs.}(1''.\bar{y})=\frac{\cos.(1.y)}{\sin.(1.y)};\ \text{cs.}(1'''.\bar{x})=\frac{\cos.(1.\bar{x})}{\sin.(1.x)}\ (5)$$

192. Zwischen den Grössen $x'y'z'$ und ABC giebt es mehrere Relationen, die man aus den beiden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= Ax'+By'+Cz'; \\ 1 &= x'^2+y'^2+z'^2; \end{aligned}\right\}$$

ableiten kann. Setzt man nemlich der Kürze wegen:

$$A^2+B^2+C^2 = P$$

so findet man:

$$\left.\begin{aligned} (A^2+B^2).(A^2+C^2) &= (A^2P^2+B^2C^2); \\ (A^2+B^2).(B^2+C^2) &= (B^2P^2+A^2C^2); \\ (A^2+C^2).(B^2+C^2) &= (C^2P^2+A^2B^2); \end{aligned}\right\}\ldots(1)$$

$$\left.\begin{aligned} (x'^2+y'^2).(x'^2+z'^2) &= (x'^2+y'^2z'^2); \\ (x'^2+y'^2).(y'^2+z'^2) &= (y'^2+x'^2z'^2); \\ (x'^2+z'^2).(y'^2+z'^2) &= (z'^2+x'^2y'^2); \end{aligned}\right\}\ldots(2)$$

$$\left.\begin{array}{l} A = y'.(Ay'-Bx')-z'.(Cx'-Az'): \\ B = z'.(Bz'-Cy')-x'.(Ay'-Bx'); \\ C = x'.(Cx'-Az')-y'.(Bz'-Cy'); \end{array}\right\} \quad . \; . \; (3)$$

$$\left.\begin{array}{l} (Ay'-Bx') = (A^2+B^2-P^2.z'^2); \\ (Cx'-Az') = (C^2+A^2-P^2.y'^2); \\ (Bz'-Cy') = (B^2+C^2-P^2.x'^2); \end{array}\right\} \quad . \; . \; (4)$$

Diese Relationen wird man anwenden können, um den in den vorhergehenden Art. gefundenen Ausdrücken andere Formen zu geben. So z. B. ist:

$$\cos.(1.\bar{y}) = \frac{A^2+C^2-P^2y'^2}{\sqrt{A^2+C^2}} = \left\{\sqrt{A^2+C^2} - \frac{P^2}{\sqrt{A^2+C^2}}.y'^2\right\};$$

u. s. w.

Gleichung einer Geraden, welche durch einen gegebenen Punkt geht, und auf einer gegebenen Ebene senkrecht steht. Abstand eines Punktes von der Ebene. Ebene, welche durch den Anfangspunkt und durch eine gegebene Gerade gelegt wird, und Gerade, welche durch den Anfangspunkt und durch den gegebenen im Raume geht. Hieraus entspringende Winkel und Relationen zwischen ihnen.

193. Die Gleichungen der Geraden, welche durch den gegebenen Punkt geht, dessen Coordinaten $x'y'z'$ sind, und auf einer Ebene senkrecht steht, deren Gleichung:

$$Ax+By+Cz+D = 0$$

ist; lassen sich auf eine sehr einfache Art durch folgende Schlüsse erhalten. Weil die gesuchte Gerade durch den Punkt $x'y'z'$ geht; so werden ihre Gleichungen die Form haben:

$$\left.\begin{array}{l} (y-y') = a.(x-x'); \\ (z-z') = a_{,}(x-x'); \end{array}\right\}$$

Die Grössen $aa_{,}$ werden nun durch die Bedingung bestimmt, dass die Linie auf der gegebenen Ebene senkrecht stehen soll; die Gleichungen dieser Bedingung sind:

$$\left. a = \frac{B}{A};\; a_{,} = \frac{C}{A}; \right\}$$

daher sind die Gleichungen der gesuchten Geraden:

$$\left.\begin{aligned}(y-y') &= \frac{B}{A}.(x-x') \\ (z-z') &= \frac{C}{A}.(x-x')\end{aligned}\right\}$$

Jede dieser Gleichungen ist die Gleichung der Projektion dieser Geraden (in der Ebene xy und xz). Man kann ihnen auch noch folgende Gestalt geben: Die Gleichung der Projektion der Linie 1

$$\left.\begin{aligned}&\text{in der Ebene } xy \text{ ist:} & y &= \frac{B}{A}.\ x+\left(\frac{Ay'-Bx'}{A}\right); \\ &\quad\ldots\ldots\ xz\ . & z &= \frac{C}{A}.\ x+\left(\frac{Az'-Cx'}{A}\right); \\ &\quad\ldots\ldots\ yz\ . & z &= \frac{C}{B}.\ y+\left(\frac{Bz'-Cy'}{B}\right);\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

In dem besondern Falle, als der gegebene Punkt in der Ebene liegt, hat man, wenn $p'q'$ die Coordinaten dieses Punktes heissen, wegen $x' = p'$; $y' = q'$; $z' = 0$; zu den Gleichungen der Geraden, welche durch diesen Punkt senkrecht auf die Ebene gezogen wird:

$$\left.\begin{aligned}y &= \frac{B}{A}.\ x+\left(\frac{Aq'-Bp'}{A}\right); \\ z &= \frac{C}{A}.\ x+\frac{Cp'}{A}\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (2)$$

194. Um die Coordinaten des Durchschnittspunktes dieser Geraden, deren Gleichungen im vorigen Art. unter (1) gegeben worden sind, mit der Ebene, oder die Länge des Lothes zu finden, das man vom Punkte $x'y'z'$ auf die Ebene herablässt, setze man in den Ausdrücken (1) Art. 171:

$$\left.\begin{aligned}a &= \frac{B}{A};\ b = \left(\frac{Ay'-Bx'}{A}\right) \\ a_{\prime} &= \frac{C}{A};\ b_{\prime} = \left(\frac{Az'-Cx'}{A}\right)\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (a)$$

so erhält man:

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x} = (x'-A.N); \\ \dot{y} = (y'-B.N); \\ \dot{z} = (z'-C.N); \end{array}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (1)$$

wo man der Kürze wegen:

$$N = \left\{\frac{Ax'+By'+Cz'+D}{A^2+B^2+C^2}\right\}$$

gesetzt hat. Da nun der Abstand der Punkte $(\dot{x}\dot{y}\dot{z})$ und $(x'y'z')$ durch die Formel:

$$\sqrt{\{(\dot{x}-x')^2+(\dot{y}-y')^2+(\dot{z}-z')^2\}}$$

ausgedrückt wird; so wird man nach der Substitution der Werthe von $\dot{x}\dot{y}\dot{z}$ in demselben erhalten:

$$-N.\sqrt{A^2+B^2+C^2}$$

d. i.

$$\frac{-(Ax'+By'+Cz'+D)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

welchen Ausdruck für das Loth vom Punkte $(x'y'z')$ auf die Ebene wir schon oben gefunden haben.

195. Wir werden itzt diejenige Ebene betrachten, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten und durch die Gerade gelegt wird, welche auf der Ebene I senkrecht steht, und durch den Punkt $(x'y'z')$ geht.

Setzt man die Ausdrücke für $a a_{\prime} b b_{\prime}$, welche im vorigen Art. Gl. (a) angeführt sind, in die Gl. (4) Art. 114; so erhält man zur Gleichung der in Rede stehenden Ebene

$$(Cy'-Bz').x+(Az'-Cx').y+(Bx'-Ay')z = 0 \quad . \quad (1)$$

Wir wollen jene Ebene, auf welcher die gegebene Gerade senkrecht steht, die Ebene I, und diese hier, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten und durch diese Gerade gelegt wird, die Ebene II nennen. Ihre Knotenlinien in den Ebenen xy, xz, yz werden wir mit $\bar{\bar{z}}$, $\bar{\bar{y}}$, $\bar{\bar{x}}$ bezeichnen.

Dieses vorausgesetzt, hat man nun zur Gleichung:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{der Linie } \bar{\bar{z}} & . \ . & (Cy'-Bz')x+(Az'-Cx')y = 0; \\ . \ . \ . \ \bar{\bar{y}} & . \ . & (Cy'-Bz')x+(Bx'-Ay')z = 0; \\ . \ . \ . \ \bar{\bar{x}} & . \ . & (Az'-Cx')y+(Bx'-Ay')z = 0; \end{array}\right\} \quad (2)$$

Hieraus folgt nun:

$$\left.\begin{aligned} \text{tg.}(\bar{\bar{z}}.x) &= -\left(\frac{Cy'-Bz'}{Az'-Cx'}\right); \\ \text{tg.}(\bar{y}.x) &= -\left(\frac{Cy'-Bz'}{Bx'-Ay'}\right); \\ \text{tg.}(\bar{\bar{x}}.y) &= -\left(\frac{Az'-Cx'}{Bx'-Ay'}\right); \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (3)$$

Ferner, wenn man der Kürze wegen setzt:

$$V = \sqrt{\{(Cy'-Bz')^2+(Az'-Cx')^2+(Bx'-Ay')^2\}},$$

$$\left.\begin{aligned} \cos.(II.xy) &= \left(\frac{Bx'-Ay'}{V}\right); \\ \cos.(II.xz) &= \left(\frac{Az'-Cx'}{V}\right); \\ \cos.(II.yz) &= \left(\frac{Cy'-Bz'}{V}\right); \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (4)$$

Drückt man in den Gl. (3) die Werthe von ABC aus; so findet man:

$$\left.\begin{aligned} \text{tg.}(\bar{\bar{z}}.x) &= \left\{\frac{y'.\sin.(I.z)-z'.\sin.(I.y)}{x'.\sin.(I.z)-z'.\sin.(I.x)}\right\}; \\ \text{tg.}(\bar{y}.x) &= \left\{\frac{z'.\sin.(I.y)-y'.\sin.(I.z)}{x'.\sin.(I.y)-y'.\sin.(I.x)}\right\}; \\ \text{tg.}(\bar{\bar{x}}.y) &= \left\{\frac{z'.\sin.(I.x)-x'.\sin.(I.z)}{y'.\sin.(I.x)-x'.\sin.(I.z)}\right\}; \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (5)$$

Setzt man:

$$Ax'+By'+Cz' = H;$$
$$A^2+B^2+C^2 = P^2;$$

so ist:

$$\left.\begin{aligned} \text{tg.}(1'.\bar{\bar{z}}) &= \left(\frac{Ay'-Bx'}{\frac{P^2}{C}.z'-H}\right); \\ \text{tg.}(1''.\bar{y}) &= \left(\frac{Cx'-Az'}{\frac{P^2}{B}.y'-H}\right); \\ \text{tg.}(1'''.\bar{x}) &= \left(\frac{Bz'-Cy'}{\frac{P^2}{A}.x'-H}\right); \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (6)$$

196. Ziehen wir durch den Anfangspunkt der Coordinaten und durch den Punkt $(x'y'z')$ eine Gerade, welche wir die Linie 2 nennen wollen; so sind bekanntlich ihre Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} y-y' &= \frac{y'}{x'}.(x-x'); \\ z-z' &= \frac{z'}{x'}.(x-x'); \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Setzt man den Abstand des Punktes $(x'y'z')$ vom Anfangspunkte der Coordinaten oder $\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2} = r$; so ist:

$$\cos.(2.x) = \frac{x'}{r}; \ \cos.(2.y) = \frac{y'}{r}; \ \cos.(2.z) = \frac{z'}{r} \ . \ (2)$$

Diese Gerade durchschneidet die gegebene Ebene in einem Punkte, dessen Coordinaten, wenn sie $\dot{x}'\dot{y}'\dot{z}'$ genannt werden, sind:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}' &= \frac{-D.x'}{Ax'+By'+Cz'}; \\ \dot{y}' &= \frac{-D.y'}{Ax'+By'+Cz'}; \\ \dot{z}' &= \frac{-D.z'}{Ax'+By'+Cz'}; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Wenn der Punkt $(x'y'z')$ in der Ebene I liegt; alsdann ist:

$$Ax'+By'+Cz' = -D$$

folglich $\dot{x}' = x'$; $\dot{y}' = y'$; $\dot{z}' = z'$; wie von selbst erhellet.

Der Abstand des Punktes $(\dot{x}'\dot{y}'\dot{z}')$, der überhaupt R heissen mag, ist $= \sqrt{\{\dot{x}'^2+\dot{y}'^2+\dot{z}'^2\}}$, oder

$$R = \frac{-D.r}{Ax'+By'+Cz'} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Die Gl. (1) Art. 194 geben dann:

$$\left.\begin{aligned} (\dot{x}-x') &= -\frac{A.D}{A^2+B^2+C^2}\left(\frac{\dot{x}'-x'}{\dot{x}'}\right); \\ (\dot{y}-y') &= -\frac{B.D}{A^2+B^2+C^2}\left(\frac{\dot{y}'-y'}{\dot{y}'}\right); \\ (\dot{z}-z') &= -\frac{C.D}{A^2+B^2+C^2}\left(\frac{\dot{z}'-z'}{\dot{z}'}\right); \end{aligned}\right\} \quad . \ . \quad (5)$$

Setzt man den Abstand des Punktes $(x'y'z')$ vom Punkte $(\dot{x}\dot{y}\dot{z})$, d. i. die Länge des Lothes $= E_{,}$; dann ist:

$$E_{,} = \frac{D}{A^2+B^2+C^2} \sqrt{\left\{ \left(\frac{\dot{x}'-x'}{\dot{x}'}\right)^2 A^2 + \left(\frac{\dot{y}'-y'}{\dot{y}'}\right)^2 B^2 + \left(\frac{\dot{z}'-z'}{\dot{z}'}\right)^2 C^2 \right\}} \quad 6$$

Setzt man $(Ax'+By'+Cz') = -\frac{Dr}{R}$ aus (4) in die allgemeine Formel des Abstandes:

$$E_{,} = -\frac{Ax'+By'+Cz'+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};$$

so hat man:

$$E_{,} = \frac{D.(r-R)}{R.\sqrt{A^2+B^2+C^2}}; \quad \ldots \quad (7)$$

Die drei Punkte $(\dot{x}\dot{y}\dot{z})$, $(\dot{x}'\dot{y}'\dot{z}')$, $(x'y'z')$ bilden ein rechtwinklichtes Dreieck; nennt man in demselben e die Hypotenuse; dann hat man:

$$\frac{E}{e} = \cos.(1.2) = \sin.(I.2) = \frac{Ax'+By'+Cz'+D}{e.\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Nun ist der Cosinus, den die Linie 1 mit 2 macht,

$$\cos.(1.2) = \frac{1+\frac{B}{A}.\frac{y'}{x'}+\frac{C}{A}.\frac{z'}{x'}}{\sqrt{1+\frac{B^2}{A^2}+\frac{C^2}{A^2}}.\sqrt{1+\frac{y'^2}{x'^2}+\frac{z'^2}{x'^2}}}$$

oder

$$\cos.(1.2) = \frac{Ax'+By'+Cz'}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}} \quad \ldots \quad (8)$$

folglich hat man:

$$\frac{e}{r}.\{Ax'+By'+Cz'\} = (Ax'+By'+Cz'+D) \quad . \quad (9)$$

Diese Relationen geben nun einige merkwürdige Beziehungen zu erkennen, welche zwischen den zwei geraden Linien und der Ebene obwalten. Man kann sie benützen, um noch manchen andern bemerkenswerthen Ausdruck für diejenigen Stücke zu finden, welche aus der Beziehung eines Punktes oder einer Geraden gegen eine Ebene entspringen. So z. B. ist:

$$E_{,} = -\frac{e}{r}.\frac{Ax'+By'+Cz'}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

oder $E_{,} = -\frac{e}{r}\cdot\{x'.\cos.(I.yz)+y'.\cos.(I.xz)+z'.\cos.(I.xy)\}$,

oder

$E_{,} = -e.\{\mathrm{cs}.(2.x).\mathrm{cs}.(I.yz)+\mathrm{cs}.(2.y).\mathrm{cs}.(I.xz)+\mathrm{cs}.(2.z).\mathrm{cs}.(I.xy)\}$;

u. dergl.

Zur Bestimmung der Winkel, welche diese Gerade 2 mit den Knotenlinien der Ebene I macht, findet man, den allgemeinen Formeln gemäss nachstehende Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} \cos.(2.\bar{x}) &= \frac{Cy'-Bz'}{r.\sqrt{B^2+C^2}}; \\ \cos.(2.\bar{y}) &= \frac{Cx'-Az'}{r.\sqrt{A^2+C^2}}; \\ \cos.(2.\bar{z}) &= \frac{Bx'-Ay'}{r.\sqrt{A^2+B^2}}; \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (10)$$

und diese Gleichungen geben:

$$\left.\begin{aligned} \cos.(2.\bar{x}) &= \cos.(2.y).\cos.(\bar{x}.y)+\cos.(2.z).\cos.(\bar{x}.z); \\ \cos.(2.\bar{y}) &= \cos.(2.x).\cos.(\bar{y}.x)+\cos.(2.z).\cos.(\bar{y}.z); \\ \cos.(2.\bar{z}) &= \cos.(2.x).\cos.(\bar{z}.x)+\cos.(2.y).\cos.(\bar{z}.y); \end{aligned}\right\} (11)$$

197. Wir wollen $e\,e_{,}e_{,,}$ die Durchschnittspunkte der Geraden 1 mit den coordinirten Ebenen xy, xz, yz nennen, und ihre Coordinaten mit pq; $p_{,}q_{,}$; $p_{,,}q_{,,}$ bezeichnen. Den allgemeinen Ausdrücken gemäss, welche wir Art. 91 Gl. (1) gefunden haben, ist:

$$\left.\begin{aligned} p &= \left(\frac{Cx'-Az'}{C}\right);\ p_{,} = \left(\frac{Bx'-Ay'}{B}\right);\ p_{,,} = \left(\frac{Ay'-Bx'}{A}\right); \\ q &= \left(\frac{Cy'-Bz'}{C}\right);\ q_{,} = \left(\frac{Bz'-Cy'}{B}\right);\ q_{,,} = \left(\frac{Az'-Cx'}{A}\right); \end{aligned}\right\} (1)$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen kann man der Gl. (1) Art. 195 noch andere Gestalten geben, z. B.

$$Cq.x+A.q_{,,}.y+B.p_{,}.z = 0,$$

oder $$Bq_{,}.x+Cp.y+A.p_{,,}.z = 0, \text{ u. s. w.}$$

Zugleich folgen aus diesen Gleichungen nachstehende Relationen:

$$Cp+Aq_{,,} = 0;\ Bp+Ap_{,,} = 0;\ Cq+Bq_{,} = 0; \quad . \quad (2)$$

$$BC.p+ABq_{,}+AC.p_{,,} = 0;\ BC.p_{,}+ABq_{,,}+AC.q = 0; \quad (3)$$

Aus diesen Gleichungen (2) (3) lassen sich durch verschiedene Verbindungen derselben noch andere erhalten.

Der Ausdruck für die Grösse, welche wir Art. 195 mit V bezeichneten, wird dann:

$$\sqrt{\{A^2q^2{}_{,,}+B^2p_{,}{}^2+C^2q^2\}} = \sqrt{\{C^2p^2+A^2p^2{}_{,,}+B^2q_{,}{}^2\}} \text{ u. s. w.}$$

Lässt man vom Anfangspunkte der Coordinaten auf die gegebene Gerade 1 ein Perpendikel, und bezeichnet die Coordinaten ihres Durchschnittspunktes mit diesem Lothe durch $x''y''z''$; so hat man, den oben gegebenen allgemeinen Formeln gemäss:

$$\left.\begin{aligned} x'' &= \frac{B(Bx'-Ay')+C(Cx'-Az')}{A^2+B^2+C^2}; \\ y'' &= \frac{A.(Ay'-Bx')+C(Cy'-Bz')}{A^2+B^2+C^2}; \\ z'' &= \frac{A(Az'-Cx')+B(Bz'-Cy')}{A^2+B^2+C^2}; \end{aligned}\right\} \quad \ldots . \ (4)$$

Diesen Ausdrücken kann man noch andere Gestalten geben. Man setze wie oben:

$$A^2+B^2+C^2 = P^2; \ Ax'+By'+Cz' = H;$$

so ist:

$$x'' = \left(x'-\frac{A.H}{P^2}\right); y'' = \left(y'-\frac{B.H}{P^2}\right); z'' = \left(z'-\frac{C.H}{P^2}\right) \quad (5)$$

Folglich ist die Entfernung der zwei Punkte $(x''y''z'')$ und $(x'y'z')$ von einander $= \sqrt{(x''-x')^2+(y''-y')^2+(z''-z')^2} = \left(\frac{H}{P}\right)$

Diese Ausdrücke hätte man auch noch durch die Bemerkung erhalten können, dass $(x-x'')$, $(y-y'')$, $(z-z'')$ die Coordinaten des Durchschnittspunktes sind, in welchem das vom Anfangspunkte auf die Ebene I herabgelassene Loth diese Ebene trifft. Setzt man also in die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} x-x'' &= -\frac{A.D}{A^2+B^2+C^2}; \\ y-y'' &= -\frac{B.D}{A^2+B^2+C^2}; \\ z-z'' &= -\frac{C.D}{A^2+B^2+C^2}; \end{aligned}\right\}$$

die obigen Werthe für xyz; so erhält man die Gl. (5).

Die Ausdrücke (6) Art. 195 werden, mit Rücksicht auf die Gl. (5) des gegenwärtigen Art.:

$$\left.\begin{aligned} tg.(1'.\bar{z}) &= \frac{(Bx'-Ay')C}{P^2.z''} = \frac{B.C.p_{,}}{P^2.z''}; \\ tg.(1''.\bar{y}) &= \frac{(Az'-Cx')B}{P^2y''} = \frac{AB.q_{,,}}{P^2.y''}; \\ tg.(1'''.\bar{x}) &= \frac{(Cy'-Bz')A}{P^2.x''} = \frac{AC.q}{P^2.x''}; \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (6)$$

Gleichung einer Ebene, welche durch einen gegebenen Punkt geht, und zwei gegebenen Geraden parallel ist. Knotenlinien dieser Ebene. Winkel, welche sie mit den Achsen machen. Gleichungen einer Geraden, welche auf zwei gegebenen zugleich senkrecht steht. Gleichung einer Ebene, welche durch einen gegebenen Punkt geht, und senkrecht auf einer gegebenen Geraden steht. Ebene, welche durch zwei sich schneidende Linien gelegt wird. Lage eines rechtwinklichten Achsensystems gegen das andere. Allgemeine Auflösung des Problems der Transformation der rechtwinklichten Coordinaten.

198. Die Lage einer Ebene ist bekanntlich bestimmt, wenn es die Grössen $ABCD$ sind, welche in ihrer Gleichung vorkommen. Wir haben schon im dritten Capitel einige dieser Bestimmungsarten untersucht, hier aber, wo wir von den Beziehungen einer Geraden und einer Ebene handeln, wollen wir noch einige Probleme auflösen, worin man die Lage der Ebene von der Lage einer oder zweier Geraden abhängen lässt.

Es sey nun die Gleichung einer Ebene zu suchen, deren Lage dadurch bestimmt werde, dass sie durch einen gegebenen Punkt $(x'y'z')$ gehen soll, und zu zwei gegebenen Geraden zugleich parallel sey. Die Gleichung dieser Ebene wird nun die Form haben:

$$A.(x-x')+B.(y-y')+C.(z-z') = 0.$$

Es handelt sich also nur noch darum, die Grössen ABC aus den gegebenen Bedingungen der Aufgabe zu bestimmen.

Es seyen also:

$$\left.\begin{array}{l} y = ax+b; \\ z = a_{,}x+b_{,}; \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

die Gleichungen der Linie 1, und

$$\left.\begin{array}{l} y = \alpha x+\beta; \\ z = \alpha_{,}x+\beta_{,}; \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

die Gleichungen der Linie 2.

Damit die gesuchte Ebene der Linie 1 parallel sey, ist

$$A+Ba+Ca_{,} = 0;$$

und damit sie zur Linie 2 parallel sey, ist nöthig, dass

$$A+B\alpha+C\alpha_{,} = 0.$$

Aus diesen zwei Bedingungsgleichungen ergeben sich für ABC folgende annehmbare Werthe:

$$A = (a\alpha_{,}-a_{,}\alpha);\ B = (a_{,}-\alpha_{,});\ C = (\alpha-a); \quad . \quad (3)$$

die Gleichung der gesuchten Ebene wird also seyn:

$$(a\alpha_{,}-a_{,}\alpha)(x-x')+(a_{,}-\alpha_{,})(y-y')+(\alpha-a)(z-z') = 0 \quad . \quad (4)$$

Die Gleichungen der Knotenlinien dieser Ebene in den coordinirten Ebenen xy, xz, yz sind also, und zwar die Gleichung

$$\left.\begin{array}{l} \text{der Linie } \bar{z} \ . \ . \ y = \left(\frac{a_{,}\alpha-a\alpha_{,}}{a_{,}-\alpha_{,}}\right).x+\left(\frac{Ax'+By'+Cz'}{a_{,}-\alpha_{,}}\right); \\ \quad . \quad . \quad . \ \bar{y} \ . \ . \ z = \left(\frac{a_{,}\alpha-a\alpha_{,}}{\alpha-a}\right).x+\left(\frac{Ax'+By'+Cz'}{\alpha-a}\right); \\ \quad . \quad . \quad . \ \bar{x} \ . \ . \ z = \left(\frac{\alpha_{,}-a_{,}}{\alpha-a}\right).\ x+\left(\frac{Ax'+By'+Cz'}{\alpha-a}\right); \end{array}\right\} \quad (5)$$

Die Winkel, welche die Knotenlinien dieser Ebene mit den coordinirten Achsen machen, werden nun durch folgende Ausdrücke bestimmt:

$$\left.\begin{array}{l} \text{tg.}(\bar{z}.x) = \left(\frac{a_{,}\alpha-a\alpha_{,}}{a_{,}-\alpha_{,}}\right); \\ \text{tg.}(\bar{y}.x) = \left(\frac{a\alpha_{,}-a_{,}a}{a-\alpha}\right); \\ \text{tg.}(\bar{x}.y) = \left(\frac{a_{,}-\alpha_{,}}{a-\alpha}\right); \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Diese Ausdrücke haben wir schon Art. 163 Gl. (1) erhalten; es ergiebt sich nemlich daraus, dass:

$$\left(\frac{\alpha_{,}-a_{,}}{a_{,}\alpha-a\alpha_{,}}\right);\ \left(\frac{a-\alpha}{a_{,}\alpha-a\alpha_{,}}\right);\ \left(\frac{a-\alpha}{\alpha_{,}-a_{,}}\right);$$

die Tangenten der Winkel sind, welche die Projektionen der auf beiden gegebenen Linien zugleich senkrecht stehenden Geraden in den Ebenen xy, xz, yz mit den Achsen x, x, y respektive machen. Bezeichnet man diese Gerade mit 3, und ihre Projektionen in den coordinirten Ebenen xy, xz, yz mit $3'\,3''\,3'''$;

$$\left(\frac{a_{,}\alpha-a\alpha_{,}}{a_{,}-\alpha_{,}}\right)=-\ \mathrm{tg.}(3'y)=-\frac{\cos.(3.x)}{\cos.(3.y)};$$

$$\left(\frac{a\alpha_{,}-a_{,}\alpha}{a-\alpha}\right)=-\ \mathrm{tg.}(3''.z)=+\frac{\cos.(3.x)}{\cos.(3.z)};$$

$$\left(\frac{a_{,}-\alpha_{,}}{a-\alpha}\right)=-\ \mathrm{tg.}(3'''.z)=+\frac{\cos.(3.y)}{\cos.(3.z)};$$

Diese Gleichungen geben zu erkennen, dass die Projektionen der Linie 3 in den coordinirten Ebenen xy, xz, yz auf den Knotenlinien der Ebene I in denselben coordinirten Ebenen senkrecht stehen. Es ist diess auch schon an sich klar, weil die Linien 1 und 2 senkrecht auf der Geraden 3 stehen, so muss diese auch zugleich auf der jenen beiden Geraden parallelen Ebene I senkrecht stehen. Dann stellt man sich durch die Durchschnittspunkte der Linien 1 und 3 eine zur Linie 2 parallele Gerade gezogen vor; so bildet sie mit der Linie 1 eine Ebene, auf welcher die Linie 3 senkrecht stehen wird; und da zu dieser Ebene auch die gesuchte parallel ist; so steht auch die Linie 3 auf der gesuchten Ebene perpendikulär.

In dem besondern Falle, dass n' der Punkt sey, in welchem die Linie 1 die Ebene xy treffe, und durch welchen die gesuchte Ebene gelegt werden, ist, wenn $p'q'$ die Coordinaten dieses Punktes sind, die Gleichung der gesuchten Ebene:

$$(a\alpha_{,}-a_{,}\alpha)(x-p')+(a_{,}-\alpha_{,})(y-q')+(\alpha-a)z=0\quad.\quad(7)$$

199. Die Bemerkung, dass die Linie 3 auf der gesuchten Ebene senkrecht steht, leitet auf ein sehr einfaches Verfahren,

die Gleichungen der Geraden 3 zu finden, welche auf den beiden gegebenen Geraden 1, 2 zugleich senkrecht steht. Diese Gerade 1 treffe nemlich die Ebene xy in einem Punkte n', dessen Coordinaten $p'q'$ seyn sollen. Ebenso treffe die Linie 2 dieselbe Ebene xy in einem Punkte n'', dessen Coordinaten $p''q''$ sind. Man stelle sich nun durch den Punkt n' eine Ebene I' gelegt vor, welche zu den Geraden 1 und 2 zugleich parallel ist, oder, was dasselbe ist, durch die Gerade 1 eine Ebene, welche zur Geraden 2 parallel ist. Ebenso denke man sich durch den Punkt n'' eine zweite Ebene I'' gelegt, welche auch zu den Linien 1 und 2 zugleich parallel ist.

Es werden folglich die Ebenen I' und I'' einander parallel seyn. In der einen dieser Ebenen I' liegt die Gerade 1, in der andern I'' liegt die Gerade 2.

Nun sind die Gleichungen dieser zwei Ebenen, und zwar die Gleichung der Ebene I' . . $A(x-p')+B.(y-q')+Cz=0$
. I'' . . $A(x-p'')+B.(y-q'')+Cz=0$

wo ABC die Werthe aus den Gl. (3) des vorigen Art. haben. Zieht man durch die Punkte $n'n''$ senkrecht auf diese Ebenen gerade Linien, welche wir mit $1_{\prime}$ $2_{\prime}$ bezeichnen wollen; so werden die Gleichungen;

der Linie $1_{\prime}$ seyn $\begin{cases} y-q_{\prime} = \frac{B}{A}(x-p'); \\ z = \frac{C}{A}(x-p'); \end{cases}$

der Linie $2_{\prime}$. . $\begin{cases} y-q'' = \frac{B}{A}(x-p''); \\ z = \frac{C}{A}(x-p''); \end{cases}$

Endlich stelle man sich durch die Geraden 1 und $1_{\prime}$, welche sich im Punkte n' durchschneiden, eine Ebene gelegt vor, welche wir die Ebene $I_{\prime}$ nennen. Da sie durch den Punkt n' geht; so wird ihre Gleichung die Form haben:

$$A_{\prime}.(x-p')+B_{\prime}.(y-q')+C_{\prime}.z = 0.$$

Setzt man in der Gl. (7) des vorhergehenden Art.

$$\alpha = \frac{B}{A},\ \alpha_{,} = \frac{C}{A};$$

und reduzirt sie gehörig; so findet man durch Vergleichung:

$$A_{,} = (C\alpha - B\alpha_{,});\ B_{,} = (A\alpha_{,} - C);\ C_{,} = (B - A\alpha).$$

Die Ebene $I_{,}$ hat also zu ihrer Gleichung:

$$(C\alpha - B\alpha_{,})(x - p') + (A\alpha_{,} - C)(y - q') + (B - A\alpha)z = 0 \quad (1)$$

Eben so wird die Ebene, welche durch die Linien 2 und $2_{,}$, die sich in n'' schneiden, und welche die Ebene $I_{,,}$ heissen mag, zur Gleichung haben:

$$(B\alpha_{,} - C\alpha)(x - p'') + (C - A\alpha_{,})(y - q'') + (B - A\alpha)z = 0\ . \quad (2)$$

Jede dieser zwei Ebenen wird nun die Gerade 3 enthalten, welche auf den gegebenen Linien 1 und 2 zugleich senkrecht steht. Die zwei Gleichungen (1) (2) zusammengenommen sind demnach die gesuchten Gleichungen der Geraden 3. Setzt man nun die obigen Werthe aus den Gl. (3) des vorigen Art. für ABC in diese beiden Gleichungen; so reduziren sie sich auf folgende:

$$(a\alpha + a_{,}\alpha_{,} - a^2 - a_{,}^2)(x - p') + [a - \alpha + a_{,}(a\alpha_{,} - a_{,}\alpha)]\ (y - q')$$
$$+ [a_{,} - \alpha_{,} + a(a_{,}\alpha - a\alpha_{,})].z = 0;$$
$$(a\alpha + a_{,}\alpha_{,} - \alpha^2 - \alpha_{,}^2)(x - p'') + [\alpha - a - \alpha_{,}(a\alpha_{,} - a_{,}\alpha)]\ (y - q'')$$
$$+ [a_{,} - \alpha_{,} - \alpha(a\alpha_{,} - a_{,}\alpha)].z = 0.$$

In diesen zwei Gleichungen sind noch $p'q'$ und $p''q''$ enthalten. Diess sind die Coordinaten der Punkte $n'n''$, in welchen die verlängerten Geraden 1, 2 die coordinirte Ebene xy treffen. Setzt man also die bekannten Ausdrücke:

$$p' = -\frac{b_{,}}{a_{,}};\ q' = \left(\frac{a_{,}b - ab_{,}}{a_{,}}\right);\ p'' = -\frac{\beta_{,}}{\alpha_{,}};\ q'' = \left(\frac{\alpha_{,}\beta - \alpha\beta_{,}}{\alpha_{,}}\right);$$

noch in jene beiden Gleichungen; so erhalten diese nur noch die gegebenen Grössen $aa_{,}bb_{,}$ und $\alpha\alpha_{,}\beta\beta_{,}$, wodurch die Lagen der Linien 1 und 2 bestimmt werden, auf welchen die Gerade 3 zugleich senkrecht steht.

Fällt man vom Anfangspunkte der Coordinaten ein Perpendikel auf die Ebene I', das folglich auch auf der ihr pa-

rallelen Ebene I'' senkrecht stehen wird; so wird, wenn man der Kürze wegen:

$$N = \sqrt{A^2+B^2+C^2} = \sqrt{\{(a-\alpha)^2+(a_{\prime}-\alpha_{\prime})^2+(a_{\prime}\alpha-a\alpha_{\prime})^2\}}$$ setzt,

die Länge des Lothes vom Anfangspunkte

auf die Ebene I' gleich seyn: $\frac{Ap'+Bq'}{N} = \frac{(a_{\prime}-\alpha_{\prime})b-(a-\alpha)b_{\prime}}{N}$;

. . . . I'' $\frac{Ap''+Bq''}{N} = \frac{(a_{\prime}-\alpha_{\prime})\beta-(a-\alpha)\beta_{\prime}}{N}$;

Der Unterschied dieser zwei Lothe ist der Abstand der zwei parallelen Ebenen I' und I'' von einander, in denen die Linien 1 und 2 liegen, oder die Länge des zwischen ihnen liegenden Stückes der Linie 3; dieser kürzeste Abstand der beiden Geraden 1 und 2 ist also =

$$\frac{A(p'-p'')+B(q'-q'')}{N} = \left\{\frac{(a_{\prime}-\alpha_{\prime})(b-\beta)-(a-\alpha)(b_{\prime}-\beta_{\prime})}{N}\right\};$$

ein Resultat, welches genau mit dem Art. 164 in der Gl. (7) gefundenen übereinstimmt.

200. Wird die Gleichung einer Ebene gesucht, welche durch den gegebenen Punkt $x'y'z'$ gehen und auf einer gegebenen Geraden senkrecht stehen soll; deren Gleichungen sind:

$$\left.\begin{array}{l} y = ax+b \\ z = a_{\prime}x+b_{\prime} \end{array}\right\};$$

so braucht man nur, da die Form der Gleichung dieser Ebene seyn wird:

$$A.(x-x')+B.(y-y')+C.(z-z') = 0,$$

die Grössen ABC der Bedingung gemäss zu bestimmen, dass die Gerade auf dieser Ebene senkrecht stehen soll.

Die Gleichungen, welche diese Bedingung ausdrücken, sind:

$$a = \frac{B}{A};\ a_{\prime} = \frac{C}{A}.$$

Die für ABC annehmbaren Werthe sind also:

$$A = 1;\ B = a;\ C = a_{\prime};$$

und die Gleichung der verlangten Ebene ist daher:

$$(x-x')+a.(y-y')+a_{\prime}.(z-z') = 0 \quad . \ . \ . \quad (1)$$

Die Gleichungen der Knotenlinien dieser Ebene sind, und zwar:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{der Linie } \bar{z} & \ldots & y = -\frac{1}{a}.x+\left(\frac{x'+ay'+a_{,}z'}{a}\right); \\ \ldots\ \bar{y} & \ldots & z = -\frac{1}{a_{,}}.x+\left(\frac{x'+ay'+a_{,}z'}{a_{,}}\right); \\ \ldots\ \bar{x} & \ldots & z = -\frac{a}{a_{,}}.x+\left(\frac{x'+ay'+a_{,}z'}{a_{,}}\right); \end{array}\right\} \quad (2)$$

Man schliesst hieraus, dass die Projektionen der gegebenen Geraden in den Ebenen xy, xz, yz auf den Knotenlinien der gesuchten Ebene senkrecht stehen, wie von selbst klar ist.

Ist die gegebene Gerade diejenige, welche vom Anfangspunkte der Coordinaten zum Punkte $x'y'z'$ gezogen wird; dann ist:

$$a = \frac{y'}{x'};\ a_{,} = \frac{z'}{x'};\ b = 0,\ b_{,} = 0;$$

folglich die Gleichung der auf diese Gerade senkrechten Ebene:

$$x'.(x-x')+y'.(y-y')+z'.(z-z') = 0.$$

Geht die Ebene durch den Anfangspunkt der Coordinaten, so hat man überhaupt zu ihrer Gleichung:

$$x+ay+a_{,}z = 0;$$

und in dem besondern Falle, dass sie auf derjenigen Geraden senkrecht steht, welche durch den Anfangspunkt und einen Punkt des Raumes gezogen wird, dessen Coordinaten $x'y'z'$ sind; hat man zu ihrer Gleichung:

$$x'x+y'y+z'z = 0.\ \text{(Vergl. Art. 121).}$$

Wenn überhaupt der Punkt, durch welchen die Ebene gelegt werden soll, zugleich in der gegebenen Geraden liegt; dann wird $y' = ax'+b$; $z' = a_{,}x'+b_{,}$; folglich wird in diesem Falle die Gleichung der Ebene:

$$(x-x')+a(y-ax'-b)+a_{,}(z-a_{,}x'-b_{,}) = 0,$$

oder:

$$x+ay+a_{,}z = (1+a^2+a_{,}^2).\,x'+(ab+a_{,}b_{,}).$$

Wird vom Anfangspunkte der Coordinaten auf die gesuchte Ebene ein Loth gefällt, und nennt man die Länge desselben E;

so wie die Coordinaten des Punktes, in welchem dasselbe die Ebene trifft, $\dot{x}\dot{y}\dot{z}$; dann hat man:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= \left(\frac{x'+ay'+a_{,}z'}{1+a^2+a_{,}^2}\right); \\ \dot{y} &= \frac{a(x'+ay'+a_{,}z')}{1+a^2+a_{,}^2}; \\ \dot{z} &= \frac{a_{,}(x'+ay'+a_{,}z')}{1+a^2+a_{,}^2}; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

und die Länge dieses Lothes wird seyn:

$$E = \frac{x'+ay'+a_{,}z'}{\sqrt{1+a^2+a_{,}^2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Kürzlich will ich hier noch einige Relationen anzeigen, welche man aus den allgemeinen Formeln des dritten Capitels leicht findet. Es ist nemlich:

$$\left.\begin{aligned} \cos.(\bar{x}.\bar{y}) &= \frac{a}{\sqrt{(1+a_{,}^2)(a^2+a_{,}^2)}} = \mathrm{tg}.(1.xz).\mathrm{tg}.(1.yz); \\ \cos.(\bar{x}.\bar{z}) &= \frac{a_{,}}{\sqrt{(1+a^2)(a^2+a_{,}^2)}} = \mathrm{tg}.(1.xy).\mathrm{tg}.(1.yz); \\ \cos.(\bar{y}.\bar{z}) &= \frac{a.a_{,}}{\sqrt{(1+a^2)(1+a_{,}^2)}} = \mathrm{tg}.(1.xy).\mathrm{tg}.(1.xz); \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{tg}.(\bar{x}.\bar{y}) &= \frac{a_{,}}{a}.\sqrt{1+a^2+a_{,}^2} = \frac{\cos.(1.z)}{\cos.(1.x).\cos.(1.y)}; \\ \mathrm{tg}.(\bar{x}.\bar{z}) &= \frac{a}{a_{,}}.\sqrt{1+a^2+a_{,}^2} = \frac{\cos.(1.y)}{\cos.(1.x).\cos.(1.z)}; \\ \mathrm{tg}.(\bar{y}.\bar{z}) &= \frac{1}{a.a_{,}}.\sqrt{1+a^2+a_{,}^2} = \frac{\cos.(1.x)}{\cos.(1.y).\cos.(1.z)}; \end{aligned}\right\} \quad . \quad (6)$$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{tg}.(\bar{x}.\bar{y}).\cos.^2(1.y) &= \mathrm{tg}.(\bar{x}.\bar{z}).\cos.^2(1.z) \\ \mathrm{tg}.(\bar{x}.\bar{y}).\cos.^2(1.x) &= \mathrm{tg}.(\bar{y}.\bar{z}).\cos.^2(1.z) \\ \mathrm{tg}.(\bar{y}.\bar{z}).\cos.^2(1.y) &= \mathrm{tg}.(\bar{x}.\bar{z}).\cos.^2(1.x) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (7)$$

d. i. $\mathrm{tg}.(\bar{y}.\bar{z}) : \mathrm{tg}.(\bar{x}.\bar{z}) : \mathrm{tg}.(\bar{x}.\bar{y}) = \cos.^2(1.x) : \cos.^2(1.y) : \cos.^2(1.z)$.

Es ist überflüssig, noch mehrere solche Relationen aus den allgemeinen Formeln zu entwickeln, in welchen man, um sie zu erhalten, nur $A = 1$, $B = a$, $C = a_{,}$ zu setzen braucht.

201. Wir werden endlich noch die Gleichung der Ebene suchen, welche durch zwei gegebene gerade Linien gelegt wird, die sich in einem Punkte schneiden. Sie könnte zwar unmittelbar aus der allgemeinen Gleichung Art. 198 hergeleitet werden, wo man die Gleichung derjenigen Ebene gesucht hat, welche durch einen gegebenen Punkt geht, und zwei gegebenen Geraden parallel ist; hier ist also der gegebene Punkt zugleich der Durchschnittspunkt der zwei Geraden. Sie verdient aber, besonders betrachtet zu werden.

Es seyen also wieder die gegebenen Gleichungen:

der Geraden 1 . . $\left\{ \begin{array}{l} y = ax + b \; ; \\ z = a_1 x + b_1 \; ; \end{array} \right.$

der Geraden 2 . . $\left\{ \begin{array}{l} y = \alpha x + \beta \; ; \\ z = \alpha_1 x + \beta_1 \; ; \end{array} \right.$

Da sie sich in einem Punkte des Raumes durchschneiden sollen; so hat man als nothwendige Bedingung:

$$\left(\frac{a-\alpha}{a_1-\alpha_1}\right) = \left(\frac{b-\beta}{b_1-\beta_1}\right).$$

Es seyen $\dot{x}\dot{y}\dot{z}$ die Coordinaten des Durchschnittspunktes, dann hat man, gemäss Gl. (3) Art. 155:

$$\dot{x} = -\left(\frac{b-\beta}{a-\alpha}\right) = -\left(\frac{b_1-\beta_1}{a_1-\alpha_1}\right);$$

$$\dot{y} = \left(\frac{a\beta-\alpha b}{a-\alpha}\right); \quad \dot{z} = \left(\frac{a_1\beta_1-\alpha_1 b_1}{a_1-\alpha_1}\right);$$

Die gesuchte Gleichung der Ebene ist folglich:

$$(a\alpha_1-a_1\alpha)\left[x+\left(\frac{b-\beta}{a-\alpha}\right)\right]+(a_1-\alpha_1)\left[y+\frac{\alpha b-a\beta}{a-\alpha}\right]$$

$$+(\alpha-a)\left[z+\frac{\alpha_1 b_1-a_1\beta_1}{a_1-\alpha_1}\right] = 0;$$

Auf diese Gleichung kann man nun durch folgende Schlüsse gelangen:

Da die Linie 1 in der gesuchten Ebene liegen soll; so müssen die Werthe von yz aus ihren gegebenen Gleichungen in die gesuchte Gleichung der Ebene gesetzt, diese letzte identisch machen; weil man nun nach verrichteter Substitution erhält:

$$(A+Ba+Ca_{,})x+(Bb+Cb_{,}+D) = 0\ ,$$

und da diese Gleichung für jeden Werth von x identisch werden soll; so hat man, als Bedingungsgleichungen:

$$A+Ba+Ca_{,} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

$$Bb+Cb_{,}+D = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

Auf ähnliche Art erhält man aus der Bedingung, dass auch die Gerade 2 in dieser Ebene liegen solle, die Gleichungen:

$$A+B\alpha+C\alpha_{,} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (c)$$

$$B\beta+C\beta_{,}+D = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (d)$$

Man weis, dass zur Bestimmung der Lage der Ebene nur drei Bedingungsgleichungen hinreichend sind, aus denen die für $ABCD$ annehmbaren Werthe gefunden werden; hier muss aber durch die Werthe $ABCD$ vier Gleichungen Genüge geschehen; sucht man also aus dreien derselben die für $ABCD$ annehmbaren Werthe, und setzt sie in die vierte; so erhält man eine blosse Relation zwischen den Grössen $aa_{,}bb_{,}$ und $\alpha\alpha_{,}\beta\beta_{,}$. Dieses will aber so viel sagen, als die Stücke, wodurch die Lagen der gegebenen Geraden 1 und 2 bestimmt werden, müssen von der Art seyn, dass sie dieser erhaltenen Relation ein Genüge leisten, wenn die Auflösung der Aufgabe möglich seyn soll. Die Rechnung wird zeigen, dass diese Relation mit der Gl. (III) Art. 155 übereinkömmt, welche die Bedingungsgleichung des Durchschneidens der zwei gegebenen Geraden in einem Punkte des Raumes ist. Es ist an sich klar, was hier die Analys ausspricht, dass nemlich nur in dem Falle, da beide Linien einen Punkt mit einander gemein haben, eine Auflösung der Aufgabe d. i. eine Ebene durch beide gerade Linien zu legen, möglich sey.

Die Gleichungen (a) und (c) geben nun:

$$A = (a\alpha_{,}-a_{,}\alpha)\ ;\quad B = (a_{,}-\alpha_{,})\ ;\quad C = (\alpha-a)\ ;$$

Zieht man die Gleichungen (b) und (d) von einander ab, so erhält man:

$$B.(b-\beta)+C.(b_{,}-\beta_{,}) = 0\ ,$$

d. i. $$(a_{,}-\alpha_{,})(b-\beta) = (a-\alpha)(b_{,}-\beta_{,})\ ,$$

welche die bekannte Bedingungsgleichung ist.

Aus den Gl. (b) (d) findet man sodann:

$$D = \{b.(\alpha_{,}-a_{,})+b_{,}.(a-\alpha)\};$$

oder

$$D = \{\beta.(\alpha_{,}-a_{,})+\beta_{,}.(a-\alpha)\};$$

Die gesuchte Gleichung der Ebene wird also seyn:

$$(a\alpha_{,}-a_{,}\alpha)x+(a_{,}-\alpha_{,})y+(\alpha-a)z+[b_{,}(a-\alpha)-b(a_{,}-\alpha_{,})]=0 \quad (1)$$

in welcher Gleichung anstatt des letzten Gliedes noch gesetzt werden kann:

$$[\beta_{,}(a-\alpha)-\beta(a_{,}-\alpha_{,})],$$

und beide Grössen lassen sich noch unter den Formen:

$$(a-\alpha)\left\{\frac{b\beta_{,}-b_{,}\beta}{b-\beta}\right\} \text{ und } (a_{,}-\alpha_{,})\left\{\frac{b\beta_{,}-b_{,}\beta}{b_{,}-\beta_{,}}\right\}$$

darstellen.

Die Gleichungen der Knotenlinien dieser Ebene sind, und zwar:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{der Linie } z \;\ldots & y = \left(\frac{a_{,}\alpha-a\alpha_{,}}{a_{,}-\alpha_{,}}\right).x+\left(\frac{b_{,}\beta-b\beta_{,}}{b_{,}-\beta_{,}}\right) \\ \ldots\ldots\ \bar{y} \;\ldots & z = \left(\frac{a\alpha_{,}-a_{,}\alpha}{a-\alpha}\right).x+\left(\frac{b\beta_{,}-b_{,}\beta}{b-\beta}\right) \\ \ldots\ldots\ \bar{x} \;\ldots & z = \left(\frac{a_{,}-\alpha_{,}}{a-\alpha}\right).y+\left(\frac{b\beta_{,}-b_{,}\beta}{b-\beta}\right) \end{array}\right\} \quad (2)$$

Wendet man nun die Gl. (1) Art. 113 auf den gegenwärtigen Fall an; dann findet man:

$$\left.\begin{array}{l} l = \left(\frac{b\beta_{,}-b_{,}\beta}{b-\beta}\right).\cos.(\bar{x}.y); \\ l_{,} = \left(\frac{b_{,}\beta-b\beta_{,}}{b-\beta}\right).\cos.(\bar{y}.x); \\ l_{,,} = \left(\frac{b_{,}\beta-b\beta_{,}}{b_{,}-\beta_{,}}\right).\cos.(\bar{z}.x); \end{array}\right\} \ldots\ldots (3)$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich folgende merkwürdige Relationen:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{l_{,,}}{l_{,}}=\left(\frac{b-\beta}{b_{,}-\beta_{,}}\right).\frac{\cos.(\bar{z}.x)}{\cos.(\bar{y}.x)}=\left(\frac{a-\alpha}{a_{,}-\alpha_{,}}\right).\frac{\text{cs}.(\bar{z}.x)}{\text{cs}.(\bar{y}.x)}=\frac{\text{cs}.(\bar{x}.y)\text{cs}.(\bar{z}.x)}{\text{cs}.(\bar{y}.x)\text{cs}.(\bar{x}.z)} \\ \frac{l_{,}}{l}=-\frac{\cos.(\bar{y}.x)}{\cos.(\bar{x}.y)};\quad \frac{l}{l_{,,}}=-\frac{\cos.(\bar{x}.z)}{\cos.(\bar{z}.x)}; \end{array}\right\} (4)$$

Die Ebene durchschneidet ferner die drei coordinirten Achsen xyz in Punkten, dessen Entfernungen vom Anfangspunkte der Coordinaten, wenn sie mit $f\,f_{,}f_{,,}$ bezeichnet werden, sind:

$$\left.\begin{aligned} f &= \left(\frac{b_{,}\beta - b\beta_{,}}{b-\beta}\right)\cdot\left(\frac{a-\alpha}{a\alpha_{,}-a_{,}\alpha}\right) = \left(\frac{b_{,}\beta - b\beta_{,}}{b_{,}-\beta_{,}}\right)\cdot\left(\frac{a_{,}-\alpha_{,}}{a\alpha_{,}-a_{,}\alpha}\right) \\ f_{,} &= \left(\frac{b_{,}\beta - b\beta_{,}}{b_{,}-\beta_{,}}\right);\quad f_{,,} = \left(\frac{b_{,}\beta - b\beta_{,}}{b-\beta}\right). \end{aligned}\right\}(5)$$

Die erste dieser Gleichungen giebt:

$$f = \left(\frac{b\beta_{,}-b_{,}\beta}{b-\beta}\right).\,\mathrm{tg}.(y.z) = \left(\frac{b\beta_{,}-b_{,}\beta}{b_{,}-\beta_{,}}\right):\mathrm{tg}.(z.x);$$

Die beiden andern Gleichungen geben hierauf:

$$f = -f_{,}.\mathrm{tg}.(z.y) = -f_{,,}.\mathrm{tg}\,(y.z).$$

Die Länge des Lothes endlich, das vom Anfangspunkte der Coordinaten auf diese Ebene herabgelassen wird, ist:

$$E = \left(\frac{a-\alpha}{N}\right).\left(\frac{b_{,}\beta-b\beta_{,}}{b-\beta}\right);$$

wo $N = \sqrt{\{(a-\alpha)^2+(a_{,}-\alpha_{,})^2+(a\alpha_{,}-a_{,}\alpha)^2\}}$ gesetzt worden ist.

Die Coordinaten des Durchschnittspunktes dieses Lothes mit der Ebene werden dann durch folgende Ausdrücke bestimmt:

$$x = \frac{(a-\alpha).(a_{,}\alpha-a\alpha_{,}).(b\beta_{,}-b_{,}\beta)}{(b-\beta).N^2} = \left(\frac{a\alpha_{,}-a_{,}\alpha}{N}\right)^2.f;$$

$$y = \frac{(a_{,}-\alpha_{,})^2\,(b_{,}\beta-b\beta_{,})}{(b_{,}-\beta_{,}).N^2} = \left(\frac{a_{,}-\alpha_{,}}{N}\right)^2.f_{,};$$

$$z = \frac{(a-\alpha)^2(b\beta_{,}-b_{,}\beta)}{(b-\beta).N^2} = -\left(\frac{a-\alpha}{N}\right)^2.f_{,,};$$

202. Wenn die zwei gegebenen Geraden durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehen; alsdann ist:

$$b = 0;\quad b_{,} = 0;\quad \beta = 0;\quad \beta_{,} = 0.$$

Dieser Fall verdient noch insbesondere betrachtet zu werden. Die Gleichungen der gegebenen Geraden 1 und 2 seyn also:

$$\left.\begin{array}{l} y = ax\,; \\ z = a_1 x\,; \end{array}\right\} \text{ und } \left\{\begin{array}{l} y = \alpha x\,; \\ z = \alpha_1 x\,; \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (a)$$

Die Gleichung der durch sie gelegten Ebene wird seyn:

$$(a\alpha_1 - a_1\alpha).x + (a_1 - \alpha_1).y + (\alpha - a).z = 0 \quad . \quad . \quad (b)$$

Die Gleichungen der Knotenlinien endlich sind, und zwar:

$$\left.\begin{array}{l} \text{der Linie } \bar{z} \; . \; . \; . \; y = \left(\frac{a_1\alpha - a\alpha_1}{a_1 - \alpha_1}\right).x\,; \\ . \; . \; . \; . \; \bar{y} \; . \; . \; . \; z = \left(\frac{a\alpha_1 - a_1\alpha}{a - \alpha}\right).x\,; \\ . \; . \; . \; . \; \bar{x} \; . \; . \; . \; z = -\left(\frac{a_1 - \alpha_1}{a - \alpha}\right).y\,; \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

Auf diese besondern Fälle wollen wir nun die obigen allgemeinen Formeln anwenden, in denen man zu setzen hat:

$$A = (a\alpha_1 - a_1\alpha); \quad B = (a_1 - \alpha_1); \quad C = (\alpha - a).$$

Was die Neigungen dieser Ebene I gegen die coordinirten Ebenen anbelangt; so hat man erstlich, um sie zu bestimmen:

$$\left.\begin{array}{l} \cos.(I.xy) = \left(\frac{\alpha - a}{N}\right); \\ \cos.(I.xz) = \left(\frac{a_1 - \alpha_1}{N}\right); \\ \cos.(I.yz) = \left(\frac{a\alpha_1 - a_1\alpha}{N}\right); \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

wo $N = \sqrt{\{(a-\alpha)^2 + (a_1 - \alpha_1)^2 + (a\alpha_1 - a_1\alpha)^2\}}$ gesetzt worden ist.

Die allgemeinen Ausdrücke Art. 112 Gl. (4) geben ferner:

$$\left.\begin{array}{l} \text{tg.}(\bar{y}.\bar{z}) = \left[\frac{a_1\alpha - a\alpha_1}{(a - \alpha).(a_1 - \alpha_1)}\right].N\,; \\ \text{tg.}(\bar{x}.\bar{z}) = \left[\frac{a_1 - \alpha_1}{(a - \alpha)(a_1\alpha - a\alpha_1)}\right].N\,; \\ \text{tg.}(\bar{x}.\bar{y}) = \left[\frac{a - \alpha}{(a_1 - \alpha_1).(a_1\alpha - a\alpha_1)}\right].N \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (2)$$

und aus den allgemeinen Formeln Art. 176 u. s. f. erhält man:

$$\left.\begin{aligned}
\cos.(1.\bar{x}) &= \frac{(a\alpha+a_{,}\alpha_{,})-(a^2+a_{,}^2)}{\sqrt{1+a^2+a_{,}^2}.\sqrt{(a_{,}-\alpha_{,})^2+(a-\alpha)^2}}\\
\cos.(1.\bar{y}) &= \frac{\alpha(1+a_{,}^2)-a(1+a_{,}\alpha_{,})}{\sqrt{1+a^2+a_{,}^2}.\sqrt{(a\alpha_{,}-a_{,}\alpha)^2+(a-\alpha)^2}}\\
\cos.(1.\bar{z}) &= \frac{a_{,}(1+a\alpha)-\alpha_{,}(1+a^2)}{\sqrt{1+a^2+a_{,}^2}.\sqrt{(a\alpha_{,}-a_{,}\alpha)^2+(a_{,}-\alpha_{,})^2}}
\end{aligned}\right\}. (3)$$

$$\left.\begin{aligned}
\cos.(2.\bar{x}) &= \frac{(\alpha^2+\alpha_{,}^2)-(a\alpha+a_{,}\alpha_{,})}{\sqrt{1+\alpha^2+\alpha_{,}^2}.\sqrt{(a_{,}-\alpha_{,})^2+(a-\alpha)^2}}\\
\cos.(2.\bar{y}) &= \frac{\alpha(1+a_{,}\alpha_{,})-a(1+\alpha_{,}^2)}{\sqrt{1+\alpha^2+\alpha_{,}^2}.\sqrt{(a\alpha_{,}-a_{,}\alpha)^2+(a-\alpha)^2}}\\
\cos.(2.\bar{z}) &= \frac{a_{,}(1+\alpha^2)-\alpha_{,}(1+a\alpha)}{\sqrt{1+\alpha^2+\alpha_{,}^2}.\sqrt{(a\alpha_{,}-a_{,}\alpha)^2+(a_{,}-\alpha_{,})^2}}
\end{aligned}\right\}. (4)$$

Nennt man nun die Gerade, welche senkrecht auf die Ebene I durch den Anfangspunkt gelegt wird, die Linie 3; dann hat man, weil ihre Gleichungen sind:

$$\left.\begin{aligned}
y &= \left(\frac{a_{,}-\alpha_{,}}{a\alpha_{,}-a_{,}\alpha}\right).x\,;\\
z &= \left(\frac{\alpha-a}{a\alpha_{,}-a_{,}\alpha}\right).x\,;
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (d)$$

$$\text{cs.}(3'.x)=\frac{(a\alpha_{,}-a_{,}\alpha)}{\sqrt{(a_{,}-\alpha_{,})^2+(a\alpha_{,}-a_{,}\alpha)^2}}\,;\ \text{cs.}(3'.y)=\frac{a_{,}-\alpha_{,}}{\sqrt{(a_{,}-\alpha_{,})^2+(a\alpha_{,}-a_{,}\alpha)^2}}$$

$$\text{cs.}(3''.x)=\frac{a\alpha_{,}-a_{,}\alpha}{\sqrt{(a-\alpha)^2+(a\alpha_{,}-a_{,}\alpha)^2}}\,;\ \text{cs.}(3''.z)=\frac{\alpha-a}{\sqrt{(a-\alpha)^2+(a\alpha_{,}-a_{,}\alpha)^2}}$$

$$\text{cs.}(3'''.y)=\frac{a_{,}-\alpha_{,}}{\sqrt{(a-\alpha)^2+(a_{,}-\alpha_{,})^2}}\,;\ \text{cs.}(3'''.z)=\frac{\alpha-a}{\sqrt{(a-\alpha)^2+(a_{,}-\alpha_{,})^2}}$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen werden die Ausdrücke (3) (4) geben:

$$\left.\begin{aligned}
\cos.(1.\bar{x}) &= \{\cos.(1.y).\cos.(3'''.z)-\cos.(1.z).\cos.(3'''.y)\}\\
\cos.(1.\bar{y}) &= \{\cos.(1.x).\cos.(3''.z)-\cos.(1.z).\cos.(3''.x)\}\\
\cos.(1.z) &= \{\cos.(1.x).\cos.(3'.y)-\cos.(1.y).\cos.(3'.x)\}
\end{aligned}\right\}. (5)$$

und

$$\left.\begin{aligned}\cos.(2.x) &= \{\cos.(2.y).\cos.(3'''.z)-\cos.(2.z).\cos.(3'''.y)\}\\ \cos.(2.y) &= \{\cos.(2.x).\cos.(3''.z)-\cos.(2.z).\cos.(3''.x)\}\\ \cos.(2.z) &= \{\cos.(2.x).\cos.(3'.y)-\cos.(2.y).\cos.(3'.x)\}\end{aligned}\right\} .(6)$$

Aus diesen Gleichungen findet man für die Cosinusse der Winkel, welche die Projektionen $3'\,3''\,3'''$ der Linie 3 in den coordinirten Ebenen xy, xz, yz mit den Achsen machen, nachstehende Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned}\cos.(3'.x) &= \frac{\cos.(1.z).\cos.(2.x)-\cos.(2.z).\cos.(1.x)}{\cos.(1.x).\cos.(2.y)-\cos.(2.x).\cos.(1.y)}\\ \cos.(3'.y) &= \frac{\cos.(1.z).\cos.(2.y)-\cos.(2.z).\cos.(1.y)}{\cos.(1.x).\cos.(2.y)-\cos.(2.x).\cos.(1.y)}\\ \cos.(3''.x) &= \frac{\cos.(1.y).\cos.(2.x)-\cos.(2.y).\cos.(1.x)}{\cos.(1.x).\cos.(2.z)-\cos.(2.x).\cos.(1.z)}\\ \cos.(3''.z) &= \frac{\cos.(1.y).\cos.(2.z)-\cos.(2.y).\cos.(1.z)}{\cos.(1.x).\cos.(2.z)-\cos.(2.x).\cos.(1.z)}\\ \cos.(3'''.y) &= \frac{\cos.(1.x).\cos.(2.y)-\cos.(2.x).\cos.(1.y)}{\cos.(1.y).\cos.(2.z)-\cos.(2.y).\cos.(1.z)}\\ \cos.(3'''.z) &= \frac{\cos.(1.x).\cos.(2.z)-\cos.(2.x).\cos.(1.z)}{\cos.(1.y).\cos.(2.z)-\cos.(2.y).\cos.(1.z)}\end{aligned}\right\} .(7)$$

Auch ist noch:

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{tg}.(3.yz) &= \mathrm{tg}.(I.x) = \frac{a\alpha_{,}-a_{,}\alpha}{\sqrt{(a-\alpha)^2+(a_{,}-\alpha_{,})^2}}\\ \mathrm{tg}.(3.xz) &= \mathrm{tg}.(I.y) = \frac{a_{,}-\alpha_{,}}{\sqrt{(a-\alpha)^2+(a\alpha_{,}-a_{,}\alpha)^2}}\\ \mathrm{tg}.(3.xy) &= \mathrm{tg}.(I.z) = \frac{\alpha-a}{\sqrt{(a_{,}-\alpha_{,})^2+(a\alpha_{,}-a_{,}\alpha)^2}}\end{aligned}\right\} . \quad (8)$$

Die Gleichungen (3) (4) geben dann weiter:

$$\left.\begin{aligned}\cos.(1.x) &= \left\{\frac{C.\cos.(1.y)-B.\cos.(1.z)}{A.\mathrm{tg}.(3.x)}\right\};\\ \cos.(1.y) &= \left\{\frac{C.\cos.(1.x)-A.\cos.(1.z)}{B.\mathrm{tg}.(3.y)}\right\};\\ \cos.(1.z) &= \left\{\frac{B.\cos.(1.x)-A.\cos.(1.y)}{C.\mathrm{tg}.(3.z)}\right\};\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (9)$$

$$\left.\begin{aligned}\cos.(2.\bar{x}) &= \left\{\frac{C.\cos.(2.y) - B.\cos.(2.z)}{A.\mathrm{tg}.(3.x)}\right\};\\ \cos.(2.\bar{y}) &= \left\{\frac{C.\cos.(2.x) - A.\cos.(1.z)}{B.\mathrm{tg}.(3.y)}\right\};\\ \cos.(2.\bar{z}) &= \left\{\frac{B.\cos.(1.x) - A.\cos.(1.y)}{C.\mathrm{tg}.(3.z)}\right\};\end{aligned}\right\} \;.\; (10)$$

wo man für ABC die obigen Werthe zu setzen hat.

Die Verbindungen der Gleichungen (9) und (10) geben endlich noch:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\cos.(1.\bar{x})}{\cos.(2.\bar{x})} &= \left\{\frac{\cos.(1.y).\sin.(I.z) - \cos.(1.z).\sin.(I.y)}{\cos.(2.y).\sin.(I.z) - \cos.(2.z).\sin.(I.y)}\right\}\\ \frac{\cos.(1.\bar{y})}{\cos.(2.\bar{y})} &= \left\{\frac{\cos.(1.x).\sin.(I.z) - \cos.(1.z).\sin.(I.x)}{\cos.(2.x).\sin.(I.z) - \cos.(2.z).\sin.(I.x)}\right\}\\ \frac{\cos.(1.\bar{z})}{\cos.(2.\bar{z})} &= \left\{\frac{\cos.(1.x).\sin.(I.y) - \cos.(1.y)\sin.(I.x)}{\cos.(2.x).\sin.(I.y) - \cos.(2.y).\sin.(I.x)}\right\}\end{aligned}\right\} (11)$$

Diese Ausdrücke haben nur dann ihre Richtigkeit, wenn die Linien 1 und 2 in der Ebene I liegen.

203. Die Ausdrücke (2) Art. 176 geben ferner:

$$\left.\begin{aligned}\sin.(1.\bar{x}) &= \frac{N}{\sqrt{1+a^2+a_1^2}.\sqrt{C^2+B^2}};\\ \sin.(1.\bar{y}) &= \frac{N.a}{\sqrt{1+a^2+a_1^2}.\sqrt{A^2+C^2}};\\ \sin.(1.\bar{z}) &= \frac{N.a_1}{\sqrt{1+a^2+a_1^2}.\sqrt{B^2+A^2}};\\ \sin.(2.\bar{x}) &= \frac{N}{\sqrt{1+\alpha^2+\alpha_1^2}.\sqrt{C^2+B^2}};\\ \sin.(2.\bar{y}) &= \frac{N.\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2+\alpha_1^2}.\sqrt{A^2+C^2}};\\ \sin.(2.\bar{z}) &= \frac{N.\alpha_1}{\sqrt{1+\alpha^2+\alpha_1^2}.\sqrt{B^2+A^2}};\end{aligned}\right\} \;.\;.\; (1)$$

wo N den im vorigen Art. angezeigten Werth hat.

Aus diesen Gleichungen fliessen nun abermals einige sehr merkwürdige Relationen. So z. B. hat man:

$$\sin.(1.\bar{x}) = \frac{\sin.(1.x)}{\cos.(I.x)}; \quad \sin.(1.\bar{y}) = \frac{\sin.(1.y)}{\cos.(I.y)}; \text{ u. s. w.}$$

ferner:

$$\frac{\sin.(1.\bar{x})}{\sin.(2.\bar{x})} = \frac{\sin.(1.x)}{\sin.(2.x)};$$

$$\frac{\sin.(1.\bar{y})}{\sin.(2.\bar{y})} = \frac{\sin.(1.y)}{\sin.(2.y)}; \text{ u. s. w.}$$

Die Ausdrücke (3) desselben Art. geben:

$$\left.\begin{array}{l} \text{tg.}(1.\bar{x}) = \dfrac{N}{Ca-Ba_{,}}; \quad \text{tg.}(2.\bar{x}) = \dfrac{N}{C\alpha-B\alpha_{,}}; \\ \text{tg.}(1.\bar{y}) = \dfrac{N}{C-Aa_{,}}; \quad \text{tg.}(2.\bar{y}) = \dfrac{N}{C-A\alpha_{,}}; \\ \text{tg.}(1.\bar{z}) = \dfrac{N}{B-Aa}; \quad \text{tg.}(2.\bar{z}) = \dfrac{N}{B-A\alpha}; \end{array}\right\} \ldots (2)$$

Hieraus fliessen wieder:

$$\frac{\text{tg.}(1.\bar{x})}{\text{tg.}(2.\bar{x})} = \left(\frac{C\alpha-B\alpha_{,}}{Ca-Ba_{,}}\right); \quad \frac{\text{tg.}(1.\bar{y})}{\text{tg.}(2.\bar{y})} = \left(\frac{C-A\alpha_{,}}{C-Aa_{,}}\right);$$

$$\frac{\text{tg.}(1.\bar{z})}{\text{tg.}(2.\bar{z})} = \left(\frac{B-A\alpha}{B-Aa}\right);$$

Die Ausdrücke (6) geben ferner:

$$\left.\begin{array}{l} \text{tg.}(1'.\bar{z}) = \dfrac{C.a_{,}}{Aa-B} = \dfrac{a_{,}(\alpha-a)}{a(a\alpha_{,}-a_{,}\alpha)-a_{,}+\alpha_{,}} \\ \text{tg.}(1''.\bar{y}) = \dfrac{Ba}{Aa_{,}-C} = \dfrac{a(a_{,}-\alpha_{,})}{a_{,}(a\alpha_{,}-a_{,}\alpha)+a-\alpha} \\ \text{tg.}(1'''.\bar{x}) = \dfrac{A}{Ba_{,}-Ca} = \dfrac{a\alpha_{,}-a_{,}\alpha}{a_{,}(a_{,}-\alpha_{,})+a(a-\alpha)} \end{array}\right\} \ldots (3)$$

Aehnliche Ausdrücke erhält man für tg.$(2'.\bar{z})$ u. s. w. Die Gleichungen (1) Art. 177 geben endlich noch:

$$\left.\begin{array}{l} \sin.(1'.I) = \dfrac{-Ca_{,}}{N.\sqrt{1+a^2}}; \quad \sin.(2'.I) = \dfrac{-C\alpha_{,}}{N.\sqrt{1+\alpha^2}} \\ \sin.(1''.I) = \dfrac{-Ba}{N.\sqrt{1+a_{,}^2}}; \quad \sin.(2''.I) = \dfrac{-B\alpha}{N.\sqrt{1+\alpha_{,}^2}} \\ \sin.(1'''.I) = \dfrac{-A}{N.\sqrt{a^2+a_{,}^2}}; \quad \sin.(2'''.I) = \dfrac{-A}{N.\sqrt{\alpha^2+\alpha_{,}^2}} \end{array}\right\} (4)$$

Gemäss Gl. (4) Art. 89 ergeben sich nun aus diesen Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\sin.(1'.I) &= \cos.(1'.3) = -\frac{\cos.(I.xy)}{tg.(1.z)} = -\frac{\cos.(3.z)}{tg.(1.z)}\\ \sin.(1''.I) &= \cos.(1''.3) = -\frac{\cos.(I.xz)}{tg.(1.x)} = -\frac{\cos.(3.y)}{tg.(1.y)}\\ \sin.(1'''.I) &= \cos.(1'''.3) = -\frac{\cos.(I.yz)}{tg.(1.x)} = -\frac{\cos.(3.x)}{tg.(1.x)}\end{aligned}\right\} (5)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\sin.(1'.I)}{\sin.(2'.I)} &= \frac{\cos.(1'.3)}{\cos.(2'.3)} = \frac{tg.(1.xy)}{tg.(2.xy)} = \frac{tg.(2.z)}{tg.(1.z)}\\ \frac{\sin.(1''.I)}{\sin.(2''.I)} &= \frac{\cos.(1''.3)}{\cos.(2''.3)} = \frac{tg.(1.xz)}{tg.(2.xz)} = \frac{tg.(2.y)}{tg.(1.y)}\\ \frac{\sin.(1'''.I)}{\sin.(2'''.I)} &= \frac{\cos.(1'''.3)}{\cos.(2'''.3)} = \frac{tg.(1.yz)}{tg.(2.yz)} = \frac{tg.(2.x)}{tg.(1.x)}\end{aligned}\right\}.(6)$$

Aus den Gl. (4) leitet man ohne Schwierigkeit die Gleichung ab:

$$\left.\begin{aligned}\sin.(1.x).\sin.(1'.I)+\sin.(1.y).\sin.(1''.I)+\sin.(1.z).\sin.(1'''.I)=0\\ \sin.(2.x).\sin.(2'.I)+\sin.(2.y).\sin.(2''.I)+\sin.(2.z).\sin.(2'''.I)=0\end{aligned}\right\}$$

Oder:

$$\sin.(1.x).\cos.(1'.3)+\sin.(1.y).\cos.(1''.3)+\sin.(1.z).\cos.(1'''.3)=0,$$

u. s. w.

Wenn man in den Ausdruck:

$$\{\cos.(1.\bar{x}).\cos.(2.\bar{x})+\sin.(1.\bar{x}).\sin.(2.\bar{x})\}$$

für die Sinusse und Cosinusse der Winkel $(1.\bar{x})$, $(2.\bar{x})$ aus den Gl. (3) (4) Art. 202, und (1) des gegenwärtigen Art. die gehörigen Werthe setzt; so giebt die Reduktion den Ausdruck:

$$\frac{1+a\alpha+a_{,}\alpha_{,}}{\sqrt{1+a^2+a_{,}^2}.\sqrt{1+\alpha^2+\alpha_{,}^2}}$$

und dieses ist im Allgemeinen der Ausdruck für den Cosinus des Winkels, den die Linien 1 und 2 mit einander machen. In der That ist:

$$\cos.(1.\bar{x}).\cos.(2.\bar{x})+\sin.(1.\bar{x}).\sin.(2.\bar{x})=\cos.[(1.\bar{x})-(2.\bar{x})],$$

und weil beide Linien 1, 2 in einer und derselben Ebene mit der Linie $\bar{x}$ liegen; so hat man:

$$(1.\bar{x})-(2.\bar{x}) = (1.2).$$

Eben so findet man:

$$(1.\bar{y})-(2.\bar{y}) = (1,2)$$

und:

$$(1.\bar{z})-(2.\bar{z}) = (1,2)$$

aus den beiden andern Gleichungen.

204. Wenn die Linie 1 in der Ebene xy liegt; dann ist $a_{,} = 0$; und die Gleichung der Ebene, welche durch diese Gerade und die Linie 2 gelegt wird, wird seyn:

$$a\alpha_{,}.x-\alpha_{,}y+(\alpha-a).z = 0.$$

Es sey nun η der Winkel, den die Linie 1 mit der Achse x macht; so ist:

$$a = \text{tg}.\eta;$$

ferner sey die Neigung der gesuchten Ebene gegen die coordinirte Ebene xy gleich ϑ; so hat man:

$$\text{tg}.\vartheta = \frac{\alpha_{,}.\sqrt{1+a^2}}{\alpha-a} = \frac{\alpha_{,}}{\alpha-a}.\frac{1}{\cos.\eta};$$

folglich:

$$\frac{\alpha_{,}}{\alpha-a} = \cos.\eta.\text{tg}.\vartheta.$$

Die Gleichung der Ebene:

$$a.\frac{\alpha_{,}}{\alpha-a}.x-\frac{\alpha_{,}}{\alpha-a}.y+z = 0$$

wird nun werden:

$$x.\text{tg}.\eta.\cos.\eta.\text{tg}.\vartheta-y.\cos.\eta.\text{tg}.\vartheta+z = 0$$

oder:

$$x.\sin.\eta.\text{tg}.\vartheta-y.\cos.\eta.\text{tg}.\vartheta+z = 0,$$

oder endlich, wenn man diese Gleichung mit $\cos.\vartheta$ multiplizirt:

$$x.\sin.\eta.\sin.\vartheta-y.\cos.\eta.\sin.\vartheta+z.\cos.\vartheta = 0,$$

welche mit der Gl. (2) Art. 120 übereinstimmt.

Die Lage dieser Ebene wird also durch den Winkel η, den die Knotenlinie $\bar{z}$ mit x macht, und durch die Neigung ϑ dieser Ebene gegen xy bestimmt.

205. Unter allen Fällen, in denen eine Ebene durch zwei gerade Linien gelegt wird, welche durch den Anfangspunkt

der Coordinaten gehen, ist derjenige der merkwürdigste, da die zwei gerade Linien auf einander senkrecht stehen. In diesem Falle bilden nemlich die drei Linien 1, 2, 3, welche gegenseitig auf einander senkrecht stehen, ein System dreier rechtwinklicht coordinirter Achsen; wenn wir daher die Linie 1 die Achse der $x_{\prime}$, die Linie 2 die Achse der $y_{\prime}$ und die Linie 3 die Achse der $z_{\prime}$ seyn lassen; alsdann wird die durch die Linien 1, 2 gelegte Ebene die neue coordinirte Ebene $x_{\prime}y_{\prime}$ seyn; wir wollen diese Ebene die Ebene III nennen; und dieser Benennung analog die Ebenen, welche durch 1, 3 und 2, 3 gelegt werden, die Ebenen II und I heissen. Auch wollen wir der Symmetrie wegen annehmen, dass die Gleichungen der Linien 1, 2, 3 respektive seyen:

$$\left.\begin{array}{l} y = a'x; \\ z = a'_{\prime}x; \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} y = a''x; \\ z = a''_{\prime}x; \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} y = a'''x; \\ z = a'''_{\prime}x; \end{array}\right\}$$

Die Gleichungen der Ebenen I, II, III, werden dann seyn, und zwar die Gleichung der Ebene:

$$III \; \ldots \; (a'a''_{\prime}-a'_{\prime}a'').x+(a'_{\prime}-a''_{\prime}).y+(a''-a').z = 0;$$
$$II \; \ldots \; (a'a'''_{\prime}-a'_{\prime}a''').x+(a'_{\prime}-a'''_{\prime}).y+(a'''-a')z = 0;$$
$$I \; \ldots \; (a''a'''_{\prime}-a''_{\prime}a''')x+(a''_{\prime}-a'''_{\prime})y+(a'''-a'')z = 0;$$

Unter den Grössen $a'a''a'''a'_{\prime}a''_{\prime}a'''_{\prime}$ bestehen nun die Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} 1+a'.a''+a'_{\prime}.a''_{\prime} = 0; \\ 1+a'.a'''+a'_{\prime}a'''_{\prime} = 0; \\ 1+a''a'''+a''_{\prime}a'''_{\prime} = 0; \end{array}\right\} \; \ldots \; (\alpha)$$

Indem man von diesen Bedingungen Gebrauch macht, wird man, wenn:

$$\left.\begin{array}{l} N_{\prime} = \sqrt{\{(a''a'''_{\prime}-a''_{\prime}a''')^2+(a''_{\prime}-a'''_{\prime})^2+(a'''-a'')^2\}} \\ N_{\prime\prime} = \sqrt{\{(a'a'''_{\prime}-a'_{\prime}a''')^2+(a'_{\prime}-a'''_{\prime})^2+(a'''-a')^2\}} \\ N_{\prime\prime\prime} = \sqrt{\{(a'a''_{\prime}-a'_{\prime}a'')^2+(a'_{\prime}-a''_{\prime})^2+(a''-a')^2\}} \end{array}\right\} \; (1)$$

gesetzt wird, für $N_{\prime}\,N_{\prime\prime}\,N_{\prime\prime\prime}$ folgende Ausdrücke erhalten:

$$\left.\begin{array}{l} N_{\prime} = \sqrt{1+a''^2+a''^2_{\prime}}.\sqrt{1+a'''^2+a'''^2_{\prime}}; \\ N_{\prime\prime} = \sqrt{1+a'^2+a'^2_{\prime}}.\sqrt{1+a'''^2+a'''^2_{\prime}}; \\ N_{\prime\prime} = \sqrt{1+a'^2+a'^2_{\prime}}.\sqrt{1+a''^2+a''^2_{\prime}}; \end{array}\right\} \; \ldots \; (2)$$

Dieses vorausgesetzt hat man nun:

$$\left.\begin{array}{l} \cos.(I.yz) = \left(\dfrac{a'' a_{,}''' - a_{,}'' a'''}{N_{,}}\right);\ \cos.(I.xz) = \left(\dfrac{a_{,}'' - a_{,}'''}{N_{,}}\right) \\ \qquad \cos.(I.xy) = \left(\dfrac{a''' - a''}{N_{,}}\right); \end{array}\right\} (3)$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos.(II.yz) = \left(\dfrac{a''' a'_{,} - a_{,}''' a}{N_{,,}}\right);\ \cos.(II.xz) = \left(\dfrac{a_{,}''' - a'_{,}}{N_{,,}}\right) \\ \qquad \cos.(II.xy) = \left(\dfrac{a' - a'''}{N_{,,}}\right); \end{array}\right\} (4)$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos.(III.yz) = \left(\dfrac{a' a_{,}'' - a'_{,} a''}{N_{,,,}}\right);\ \cos.(III.xz) = \left(\dfrac{a'_{,} - a_{,}''}{N_{,,,}}\right) \\ \qquad \cos.(III.xy) = \left(\dfrac{a'' - a'}{N_{,,,}}\right); \end{array}\right\} (5)$$

Durch diese Ausdrücke werden die Neigungen der coordinirten Ebenen $x_{,}y_{,}$, $x_{,}z_{,}$, $y_{,}z_{,}$ gegen die coordinirten Ebenen xy, xz, yz bestimmt.

Das Problem von der Transformation der Coordinaten, welches wir im ersten Capitel nur auf eine Art im allgemeinen aufgelöst haben, lässt sich nun durch die Gleichungen, womit uns die analytische Geometrie versieht, auf mehrere Arten auflösen, ja diese Auflösungen können unendlich mannigfaltig seyn, wie ich sogleich zeigen werde. Stellt man die Bedeutungen der Ausdrücke (3) (4) (5) her; so wird man erhalten:

$$\left.\begin{array}{l} \cos.(I.yz) = \{\cos.(2.y).\cos.(3.z) - \cos.(2.z).\cos.(3.y)\} \\ \cos.(I.xz) = \{\cos.(2.z).\cos.(3.x) - \cos.(3.z).\cos.(2.x)\} \\ \cos.(I.xy) = \{\cos.(3.y).\cos.(2.x) - \cos.(2.y)\cos.(3.x)\} \end{array}\right\} .(6)$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos.(II.yz) = \{\cos.(3.y).\cos.(1.z) - \cos.(3.z).\cos.(1.y)\} \\ \cos.(II.xz) = \{\cos.(3.z).\cos.(1.x) - \cos.(1.z).\cos.(3.x)\} \\ \cos.(II.xy) = \{\cos.(1.y).\cos.(3.x) - \cos.(3.y).\cos.(1.x)\} \end{array}\right\} .(7)$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos.(III.yz) = \{\cos.(1.y).\cos.(2.z) - \cos.(2.y).\cos.(1.z)\} \\ \cos.(III.xz) = \{\cos.(1.z).\cos.(2.x) - \cos.(2.z).\cos.(1.x)\} \\ \cos.(III.xy) = \{\cos.(2.y).\cos.(1.x) - \cos.(2.x).\cos.(1.y)\} \end{array}\right\} (8)$$

Diese Ausdrücke (6) (7) (8) haben nun die Eigenschaft, dass:

$$\left.\begin{array}{l}\cos.^2(I.xy)+\cos.^2(I.xz)+\cos.^2(I.yz) = 1;\\ \cos.^2(II.xy)+\cos.^2(II.xz)+\cos.^2(II.yz) = 1;\\ \cos.^2(III.xy)+\cos.^2(III.xz)+\cos.^2(III.yz)=1;\end{array}\right\}$$

Wenn itzt das zweite Achsensystem gegen das erste durch drei dieser neun Winkel, welche die Ebenen I, II, III mit den coordinirten Ebenen xy, xz, yz machen, gegeben wäre; alsdann findet man, wenn man die drei betreffenden Gleichungen aus (6) (7) oder (8) mit den sechs Bedingungsgleichungen verbindet, welche zwischen den Cosinussen der Winkel existiren, so die Linien 1 2 3 mit den Achsen xyz machen, aus diesem Systeme der neun Gleichungen die neun unbekannten Winkel $(1.x)$ u. s. w. So z. B. wenn $(I.xy)$, $(II.xy)$, $(III.xy)$ die Winkel sind, durch welche die Lage des zweiten Achsensystems gegen das erste gegeben wäre; dann hat man mit den Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}\cos.(I.xy) = \cos.(3.y).\cos.(2.x)-\cos.(2.y).\cos.(3.x);\\ \cos.(II.xy) = \cos.(1.y).\cos.(3.x)-\cos.(3.y).\cos.(1.x);\\ \cos.(III.xy) = \cos.(2.y).\cos.(1.x)-\cos(1.y).\cos.(2.x);\end{array}\right\}(a)$$

nachstehende zu verbinden

$$\left.\begin{array}{l}\cos.^2(1.x)+\cos.^2(1.y)+\cos.^2(1.z) = 1;\\ \cos.^2(2.x)+\cos.^2(2.y)+\cos.^2(2.z) = 1;\\ \cos.^2(3.x)+\cos.^2(3.y)+\cos.^2(3.z) = 1;\end{array}\right\}\;.\;.\;(b)$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos.(1.x).\cos.(2.x)+\cos.(1.y).\cos.(2.y)+\cos.(1.z).\cos.(2.z)=0\\ \cos.(1.x).\cos.(3.x)+\cos.(1.y).\cos.(3.y)+\cos.(1.z).\cos.(3.z)=0\\ \cos.(2.x).\cos.(3.x)+\cos.(2.y).\cos.(3.y)+\cos.(2.z).\cos.(3.z)=0\end{array}\right\}(c)$$

Man hat itzt bloss algebraische Operationen nöthig, um aus diesen neun Gleichungen (a) (b) (c) die gehörigen Werthe für die Cosinusse der neun Winkel, so 1 2 3 mit xyz machen, zu finden.

Weil auch 1 2 3 gegenseitig auf einander senkrecht stehen, so könnte man auch anstatt der Gl. (b) (c) nachstehende zur Auflösung gebrauchen:

$$\left.\begin{array}{l}\cos.^2(1.x)+\cos.^2(2.x)+\cos.^2(3.x) = 1;\\ \cos.^2(1.y)+\cos.^2(2.y)+\cos.^2(3.y) = 1;\\ \cos.^2(1.z)+\cos.^2(2.z)+\cos.^2(3.z) = 1;\end{array}\right\}\;.\;.\;(b')$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos.(1.x)\cos.(1.y)+\cos.(2.x)\cos.(2.y)+\cos.(3.x)\cos.(3.y)=0 \\ \cos.(1.x).\cos.(1.z)+\cos.(2.x)\cos.(2.z)+\cos.(3.x)\cos.(3.z)=0 \\ \cos.(1.y)\cos.(1.z)+\cos.(2.y).\cos.(2.z)+\cos.(3.y)\cos.(3.z)=0 \end{array}\right\} (c')$$

Die Resultate wurden schon im ersten Capitel angeführt: Art. 61 Gl. (7), wo $\cos.(I.\,xy) = \cos.(1.z)$; $\cos.(II.\,xy) = \cos.(2.z)$; $\cos.(III,\,xy) = \cos.(3.z)$.

Ich bemerke nur noch, dass man aus den Gl. (a) unmittelbar ableitet:

$$\left.\begin{array}{l} cs.(1.x).cs.(I.xy)-cs.(2.x).cs.(II\,xy)+cs.(3.x).cs.(III.xy)=0 \\ cs.(1.y).cs.(I.xy)-cs.(2.y)\,cs.(II.xy)+cs.(3.y).\,cs\,(III.xy)=0 \end{array}\right\}$$

und diese Gleichungen sind mit den Gleichungen (c') einerlei.

206. Wir wollen itzt die Winkel einführen, welche die Knotenlinien der drei Ebenen I, II, III in den coordinirten Ebenen mit den Achsen xyz machen. Zu dem Ende bezeichnen wir die Knotenlinien der Ebene I mit $\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}$;

. II . $\bar{\bar{x}}\,\bar{\bar{y}}\,\bar{\bar{z}}$;

. III . $\bar{\bar{\bar{x}}}\,\bar{\bar{\bar{y}}}\,\bar{\bar{\bar{z}}}$;

Der Kürze wegen wollen wir setzen:

$$(a'a_{\prime}''-a'_{\prime}a'') = A'''; \ (a'_{\prime}-a_{\prime}'') = B'''; \ (a''-a') = C''';$$

$$(a'''a'_{\prime}-a_{\prime}'''a') = A''; \ (a_{\prime}'''-a'_{\prime}) = B''; \ (a'-a''') = C'';$$

$$(a''a_{\prime}'''-a_{\prime}''a''') = A'; \ (a_{\prime}''-a_{\prime}''') = B'; \ (a'''-a'') = C';$$

Die Gleichungen Art. 110 geben nun:

$$tg.(\bar{z}.x) = -\frac{A'}{B'}; \ tg.(\bar{\bar{z}}.x) = -\frac{A''}{B''}; tg.(\bar{\bar{\bar{z}}}.x) = -\frac{A'''}{B'''}. \quad (1)$$

u. s. w.

$$\left.\begin{array}{l} \cos.(\bar{z}.x) = \dfrac{B'}{\sqrt{A'^2+B'^2}}; \cos.(\bar{\bar{z}}.x) = \dfrac{B''}{\sqrt{A''^2+B''^2}}; \\ \cos.(\bar{\bar{\bar{z}}}.x) = \dfrac{B'''}{\sqrt{A'''^2+B'''^2}}; \end{array}\right\}. \quad (2)$$

u. s. w.

$$\left.\begin{array}{l} \sin.(\bar{z}.x) = \dfrac{-A'}{\sqrt{A'^2+B'^2}}; \sin.(\bar{\bar{z}}.x) = \dfrac{-A''}{\sqrt{A''^2+B''^2}}; \\ \sin.(\bar{\bar{\bar{z}}}.x) = \dfrac{-A'''}{\sqrt{A'''^2+B'''^2}}; \end{array}\right\} \quad (3)$$

Die Voraussetzung, dass die geraden Linien 1, 2, 3 gegenseitig auf einander senkrecht stehen, vereinfacht nicht wenig die allgemeinen Ausdrücke, welche wir Art. 176 und 177 dargestellt haben. Zu diesem Zwecke will ich die nothwendigen Relationen zwischen den Grössen $A' A'' A''' B'$ etc. und den Grössen $a' a'' a''' a'_{,} a_{,}'' a_{,}'''$, welche man leicht durch Anwendung der Gleichungen (α) Art. 205 finden wird, und welche bei den Reduktionen der Ausdrücke des Art. 176 in Anwendung kommen, in nachstehender Tafel zusammen stellen.

$$\left.\begin{aligned}
(B'-A'.a'') &= -a_{,}'''.(1+a''^2+a_{,}''^2);\\
(B'-A'.a''') &= +a_{,}''.(1+a'''^2+a_{,}'''^2);\\
(C'-A'.a_{,}'') &= +a'''.(1+a''^2+a_{,}''^2);
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
(C'-A'.a_{,}''') &= -a''.(1+a'''^2+a_{,}'''^2);\\
(C'a''-B'a_{,}'') &= -(1+a''^2+a_{,}''^2);\\
(C'a'''-B'a_{,}''') &= +(1+a'''^2+a_{,}'''^2):
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
(B''-A''a') &= +a_{,}'''.(1+a'^2+a'^2_{,});\\
(B''-A''a''') &= -a'_{,}.(1+a'''^2+a_{,}''');\\
(C''-A''a'_{,}) &= -a'''.(1+a'^2+a'^2_{,});
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
(C''-A''a_{,}''') &= +a'.(1+a'''^2+a_{,}'''^2);\\
(C''a'-B''a'_{,}) &= +(1+a'^2+a'^2_{,});\\
(C''a'''-B''a_{,}''') &= -(1+a'''^2+a_{,}'''^2);
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
(B'''-A'''.a') &= -a_{,}''.(1+a'^2+a'^2_{,});\\
(B'''-A'''.a'') &= +a'_{,}.(1+a''^2+a_{,}''^2);\\
(C'''-A'''.a'_{,}) &= +a''.(1+a'^2+a'^2_{,});
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
(C'''-A'''.a_{,}'') &= -a'.(1+a''^2+a_{,}''^2);\\
(C'''a'-B'''a'_{,}) &= -(1+a'^2+a'^2_{,});\\
(C'''a''-B'''a_{,}'') &= +(1+a''^2+a_{,}''^2);
\end{aligned}\right\}$$

Die Art, wie man diese Relationen finden könne, will ich an folgendem Beispiele zeigen. Setzt man in den Ausdruck $(B'''-A'''.a')$ anstatt A''', B''' die obigen Werthe; so findet man:

$$(B'''-A'''.a') = (a'_{,}-a_{,}''-a'^2a''_{,}+a'a'_{,}a'')$$

oder: $$(B'''-A'''.a') = \{a'_{,}.(1+a'a'')-a_{,}''.(1+a'^2)\}$$

Nun ist, vermöge der Bedingungsgleichung:

$$1+a'a''+a'_{,}a_{,}'' = 0,$$

offenbar: $$(1+a'a'') = -a'_{,}a_{,}''.$$

Mithin wird aus jenem Ausdrucke werden:

$$(B'''-A'''.a') = -a'_{,}.a'_{,}.a_{,}''.-a_{,}''.(1+a'^2)$$

d. i. $$(B'''-A'''.a') = -a_{,}''.(1+a'^2+a'^2_{,}).$$

Genau auf diese Weise wurden die andern Relationen gefunden. Was die übrigen Ausdrücke, wie $(B'-A'.a')$; $(B''-A''.a'')$ u. s. w. betrifft; so sind diese gleich Null.

Die Gl. (1) Art. 176 geben nun:

$$\left.\begin{array}{l}(1.\bar{x}) = 90^\circ;\ (1.\bar{y}) = 90^\circ;\ (1.\bar{z}) = 90^\circ;\\ (2.\bar{\bar{x}}) = 90^\circ;\ (2.\bar{\bar{y}}) = 90^\circ;\ (2.\bar{\bar{z}}) = 90^\circ;\\ (3.\bar{\bar{\bar{x}}}) = 90^\circ;\ (3.\bar{\bar{\bar{y}}}) = 90^\circ;\ (3.\bar{\bar{\bar{z}}}) = 90^\circ;\end{array}\right\}$$

wie an sich schon klar ist; ferner:

$$\left.\begin{array}{l}\cos.(1.\bar{\bar{x}}) = \frac{C''.a'-B''.a'_{,}}{\sqrt{1+a'^2+a'^2_{,}}.\sqrt{B''^2+C''^2}} = \frac{+\sqrt{1+a'^2+a'^2_{,}}}{\sqrt{B''^2+C''^2}};\\ \cos.(1.\bar{\bar{y}}) = \frac{C''-A''.a'_{,}}{\sqrt{1+a'^2+a'^2_{,}}.\sqrt{A''^2+C''^2}} = \frac{-a'''.\sqrt{1+a'^2+a'^2_{,}}}{\sqrt{A''^2+C''^2}};\\ \cos.(1.\bar{\bar{z}}) = \frac{B''-A''a'}{\sqrt{1+a'^2+a'^2_{,}}.\sqrt{A''^2+B''^2}} = \frac{+a_{,}'''.\sqrt{1+a'^2+a'^2_{,}}}{\sqrt{A''^2+B''^2}};\end{array}\right\} (4)$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos.(1.\bar{\bar{\bar{x}}}) = \frac{C'''a'-B'''.a'_{,}}{\sqrt{1+a'^2+a'^2_{,}}.\sqrt{B'''^2+C'''^2}} = \frac{-\sqrt{1+a'^2+a'^2_{,}}}{\sqrt{B'''^2+C'''^2}};\\ \cos.(1.\bar{\bar{\bar{y}}}) = \frac{C'''-A'''.a'_{,}}{\sqrt{1+a'^2+a'^2_{,}}.\sqrt{A'''^2+C'''^2}} = \frac{+a''.\sqrt{1+a'^2+a'^2_{,}}}{\sqrt{A'''^2+C'''^2}}\\ \cos.(1.\bar{\bar{\bar{z}}}) = \frac{B'''-A'''a'}{\sqrt{1+a'^2+a'^2_{,}}.\sqrt{A'''^2+B'''^2}} = \frac{-a_{,}''.\sqrt{1+a'^2+a'^2_{,}}}{\sqrt{A'''^2+B'''^2}}\end{array}\right\} (5)$$

Aehnliche Ausdrücke ergeben sich für die Cosinusse der Winkel, welche die Linien 2 und 3 mit den Knotenlinien der Ebenen *I*, *II*, *III* machen.

Weil man ferner hat:

$$\left.\begin{array}{l}A'+B'a''+C'a_{,}'' = 0;\ A'''+B'''a''+C'''.a_{,}'' = 0;\\ A'+B'a'''+C'a_{,}''' = 0;\ A''+B''a'''+C''.a_{,}''' = 0;\\ A''+B''a'+C''a'_{,} = 0;\ A'''+B'''a'+C'''.a'_{,} = 0;\end{array}\right\}$$

so findet man aus den Gl. (2) Art. 176:

$$\left.\begin{array}{l}
\sin.(1.\bar{\bar{x}}) = \dfrac{\sqrt{A''^2+B''^2+C''^2}}{\sqrt{1+a'^2+a_{\prime}^2}.\sqrt{B''^2+C''^2}} = \dfrac{\sqrt{1+a'''^2+a_{\prime}'''^2}}{\sqrt{B''^2+C''^2}}; \\[2ex]
\sin.(1.\bar{\bar{y}}) = \dfrac{a'.\sqrt{A''^2+B''^2+C''^2}}{\sqrt{1+a'^2+a_{\prime}^2}.\sqrt{A''^2+C''^2}} = \dfrac{a'.\sqrt{1+a'''^2+a_{\prime}'''^2}}{\sqrt{A''^2+B''^2}}; \\[2ex]
\sin.(1.\bar{\bar{z}}) = \dfrac{a'_{\prime}.\sqrt{A''^2+B''^2+C''^2}}{\sqrt{1+a'^2+a'^2_{\prime}}.\sqrt{A''^2+B''^2}} = \dfrac{a'_{\prime}.\sqrt{1+a'''^2+a_{\prime}'''^2}}{\sqrt{A''^2+C''^2}};
\end{array}\right\} \quad (6)$$

$$\left.\begin{array}{l}
\sin.(1.\bar{\bar{\bar{x}}}) = \dfrac{\sqrt{A'''^2+B'''^2+C'''^2}}{\sqrt{1+a'^2+a'^2_{\prime}}.\sqrt{B'''^2+C'''^2}} = \dfrac{\sqrt{1+a''^2+a_{\prime}''^2}}{\sqrt{B'''^2+C'''^2}}; \\[2ex]
\sin.(1.\bar{\bar{\bar{y}}}) = \dfrac{a'.\sqrt{A'''^2+B'''^2+C'''^2}}{\sqrt{1+a'^2+a'^2_{\prime}}.\sqrt{A'''^2+C'''^2}} = \dfrac{a'.\sqrt{1+a''^2+a_{\prime}''^2}}{\sqrt{A'''^2+C'''^2}}; \\[2ex]
\sin.(1.\bar{\bar{\bar{z}}}) = \dfrac{a'_{\prime}.\sqrt{A'''^2+B'''^2+C'''^2}}{\sqrt{1+a'^2+a'^2_{\prime}}.\sqrt{A'''^2+B'''^2}} = \dfrac{a'_{\prime}.\sqrt{1+a''^2+a_{\prime}''^2}}{\sqrt{A'''^2+B'''^2}};
\end{array}\right\} \quad (7)$$

Aehnliche Ausdrücke erhält man noch für die Sinusse der Winkel, welche die Linien 2, 3 mit den Knotenlinien der Ebenen *I*, *II*, *III* machen.

Aus diesen Gleichungen (4) (5) und (6) (7) ergeben sich ferner:

$$\left.\begin{array}{l}
\text{tg.}(1.\bar{\bar{x}}) = +\dfrac{\sqrt{1+a'''^2+a_{\prime}'''^2}}{\sqrt{1+a'^2+a'^2_{\prime}}}; \\[2ex]
\text{tg.}(1.\bar{\bar{y}}) = -\dfrac{a'.\sqrt{1+a'''^2+a_{\prime}'''^2}}{a'''.\sqrt{1+a'^2+a'^2_{\prime}}}; \\[2ex]
\text{tg.}(1.\bar{\bar{z}}) = +\dfrac{a'_{\prime}.\sqrt{1+a'''^2+a_{\prime}'''^2}}{a_{\prime}'''.\sqrt{1+a'^2+a'^2_{\prime}}};
\end{array}\right\} \quad \ldots \quad (8)$$

$$\left.\begin{array}{l}
\text{tg.}(1.\bar{\bar{\bar{x}}}) = -\dfrac{\sqrt{1+a''^2+a_{\prime}''^2}}{\sqrt{1+a'^2+a'^2_{\prime}}}; \\[2ex]
\text{tg.}(1.\bar{\bar{\bar{y}}}) = +\dfrac{a'.\sqrt{1+a''^2+a_{\prime}''^2}}{a''.\sqrt{1+a'^2+a'^2_{\prime}}}; \\[2ex]
\text{tg.}(1.\bar{\bar{\bar{z}}}) = -\dfrac{a'_{\prime}.\sqrt{1+a''^2+a_{\prime}''^2}}{a_{\prime}''.\sqrt{1+a'^2+a'^2_{\prime}}};
\end{array}\right\} \quad \ldots \quad (9)$$

u. s. w.

Die Gleichungen (4) Art. 176 zeigen, dass auch:

$$(1'.\bar{z}) = 90^\circ;\ (1''.\bar{y}) = 90^\circ;\ (1'''.\bar{x}) = 90^\circ;$$
$$(2'.\bar{\bar{z}}) = 90^\circ;\ \text{u. s. w.}$$

Diese Gleichungen geben aber ferner:

$$\left.\begin{aligned}
\cos.(1'.\bar{z}) &= \frac{B''-A''a'}{\sqrt{1+a'^2}.\sqrt{A''^2+B''^2}} = \frac{+a_{,}'''.(1+a'^2+a_{,}'^2)}{\sqrt{1+a'^2}.\sqrt{A''^2+B''^2}};\\
\cos.(1''.\bar{y}) &= \frac{C''-A''.a_{,}'}{\sqrt{1+a_{,}'^2}.\sqrt{A''^2+C''^2}} = \frac{-a'''.(1+a'^2+a_{,}'^2)}{\sqrt{1+a_{,}'^2}.\sqrt{A''^2+C''^2}};\\
\cos.(1'''.\bar{x}) &= \frac{C''a'-B''a_{,}'}{\sqrt{a^2+a_{,}'^2}.\sqrt{B''^2+C''^2}} = \frac{+(1+a'^2+a_{,}'^2)}{\sqrt{a^2+a_{,}'^2}.\sqrt{B''^2+C''^2}};
\end{aligned}\right\}(10)$$

$$\left.\begin{aligned}
\cos.(1'.\bar{\bar{z}}) &= -\frac{B'''-A'''.a'}{\sqrt{1+a'^2}.\sqrt{A'''^2+B'''^2}} = -\frac{a_{,}''.(1+a'^2+a_{,}'^2)}{\sqrt{1+a'^2}.\sqrt{A'''^2+B'''^2}};\\
\cos.(1''.\bar{\bar{y}}) &= \frac{C'''-A'''.a_{,}'}{\sqrt{1+a_{,}'^2}.\sqrt{A'''^2+C'''^2}} = +\frac{a''.(1+a'^2+a_{,}'^2)}{\sqrt{1+a_{,}'^2}.\sqrt{A'''^2+C'''^2}};\\
\cos.(1'''.\bar{\bar{x}}) &= \frac{C'''a'-B'''a_{,}'}{\sqrt{a'^2+a_{,}'^2}.\sqrt{B'''^2+C'''^2}} = -\frac{1+a'^2+a_{,}'^2}{\sqrt{a'^2+a_{,}'^2}.\sqrt{B'''^2+C'''^2}};
\end{aligned}\right\}(11)$$

Analoge Ausdrücke hat man für die Cosinusse der Winkel, welche die Projektionen der Linien 2 und 3 in den coordinirten Ebenen mit den Knotenlinien der Ebenen *I*, *II*, *III* machen. Für die Sinusse dieser Winkel erhält man aus den Gl. (5) Art. 176:

$$\left.\begin{aligned}
\sin.(1'.\bar{z}) &= \frac{-C''a_{,}'}{\sqrt{1+a'^2}.\sqrt{A''^2+B''^2}};\\
\sin.(1''.\bar{y}) &= \frac{-B''.a'}{\sqrt{1+a_{,}'^2}.\sqrt{A''^2+C''^2}};\\
\sin.(1'''.\bar{x}) &= \frac{-A''}{\sqrt{a'^2+a_{,}'^2}.\sqrt{B''^2+C''^2}};
\end{aligned}\right\}\ .\quad (12)$$

$$\left.\begin{aligned}
\sin.(1'.\bar{\bar{z}}) &= \frac{-C'''.a_{,}'}{\sqrt{1+a'^2}.\sqrt{A'''^2+B'''^2}};\\
\sin.(1''.\bar{\bar{y}}) &= \frac{-B'''.a'}{\sqrt{1+a_{,}'^2}.\sqrt{A'''^2+C'''^2}};\\
\sin.(1'''.\bar{\bar{x}}) &= \frac{-A'''}{\sqrt{a'^2+a_{,}'^2}.\sqrt{B'''^2+C'''^2}};
\end{aligned}\right\}\ .\ .\quad (13)$$

Die Verbindungen der Gleichungen (10) (11) und (12) (13) geben ferner:

$$\left.\begin{aligned} \text{tg.}(1'.\bar{z}) &= -\frac{C''.a'_{,}}{a_{,}'''.(1+a'^2+a'^2_{,})};\\ \text{tg.}(1''.\bar{y}) &= +\frac{B''.a'}{a'''.(1+a'^2+a'^2_{,})};\\ \text{tg.}(1'''.\bar{x}) &= -\frac{A''}{1+a'^2+a'^2_{,}}; \end{aligned}\right\} \;\ldots\; (14)$$

$$\left.\begin{aligned} \text{tg.}(1'.\bar{\bar{z}}) &= +\frac{C'''.a'_{,}}{a_{,}''.(1+a'^2+a'^2_{,})};\\ \text{tg.}(1''.\bar{\bar{y}}) &= -\frac{B'''.a'}{a''.(1+a'^2+a'^2_{,})};\\ \text{tg.}(1'''.\bar{\bar{x}}) &= +\frac{A'''}{1+a'^2+a'^2_{,}}; \end{aligned}\right\} \;\ldots\; (15)$$

Mit Uebergehung aller der Formeln, womit uns die Gl. (7) (8) (9) des Art. 176 noch versehen können, führe ich nur noch diejenigen an, welche die Gl. (1) Art. 177 geben. Man findet:

$$\left.\begin{aligned} \sin.(1'.II) &= \frac{-C''.a'_{,}}{N_{,,}.\sqrt{1+a'^2}}; & \sin.(1'.III) &= \frac{-C'''.a'_{,}}{N_{,,,}.\sqrt{1+a'^2}};\\ \sin.(1''.II) &= \frac{-B''.a'}{N_{,,}.\sqrt{1+a'^2_{,}}}; & \sin.(1''.III) &= \frac{-B'''.a'}{N_{,,,}.\sqrt{1+a'^2_{,}}};\\ \sin.(1'''.II) &= \frac{-A''}{N_{,,}.\sqrt{a'^2+a'^2_{,}}}; & \sin.(1'''.III) &= \frac{-A'''}{N_{,,,}.\sqrt{a'^2+a'^2_{,}}}; \end{aligned}\right\} (16)$$

207. Die Ausdrücke, womit uns die analytische Geometrie versieht, um die Sinusse, Cosinusse und Tangenten der Winkel, welche von den Achsen, von den coordinirten Ebenen, von den Geraden 1, 2, 3 und ihren Projektionen, von den Ebenen I, II, III und ihren Knotenlinien gebildet werden, durch die Stücke $a'a''a'''$ $a'_{,}a_{,}''a_{,}'''$ zu finden, verschaffen uns die Mittel, das Problem der Transformation der Coordinaten leicht auf mehr als eine Art aufzulösen.

Wir wollen beispielshalber annehmen, dass die Lage des neuen Achsensystems 1, 2, 3 gegen das ursprüngliche xyz durch die drei Winkel

$$(\bar{\bar{z}}.x);\ (III.xy);\ (1.\bar{\bar{z}})$$

bestimmt werde. Man wird nun die Cosinusse aller neun Winkel, welche die neuen Achsen mit den ursprünglichen machen, in Funktionen dieser drei gegebenen Winkel auszudrücken haben. In der Absicht setze ich die Sinusse und Cosinusse dieser drei Winkel aus den vorhergehenden Tafeln her. Es ist:

$$\sin.(\bar{\bar{z}}.x) = \frac{-A'''}{\sqrt{A'''^2+B'''^2}};\ (1)\quad \cos.(\bar{\bar{z}}.x) = \frac{+B'''}{\sqrt{A'''^2+B'''^2}};\ (2)$$

$$\sin.(III.xy) = \frac{\sqrt{A'''^2+B'''^2}}{N_{III}};\ (3)\quad \cos.(III.xy) = \frac{C'''}{N_{III}};\ .\ (4)$$

$$\sin.(1.\bar{\bar{z}}) = \frac{a'_{,}.\sqrt{1+a''^2+a_{,}''^2}}{\sqrt{A'''^2+B'''^2}};\ .\ .\ .\ (5)$$

$$\cos.(1.\bar{\bar{z}}) = \frac{-a_{,}''.\sqrt{1+a'^2+a_{,}'^2}}{\sqrt{A'''^2+B'''^2}};\ .\ .\ .\ (6)$$

Es giebt nun wieder verschiedene Wege, um aus diesen Gleichungen die Cosinusse der neun Winkel $(1.x)$ u. s. w. zu finden.

Folgende Methode ist unstreitig die einfachste. Man multiplizire die Gleichungen (1) (3); so hat man:

$$\sin.(\bar{\bar{z}}.x).\sin.(III.xy) = -\frac{A'''}{N_{III}} = -\cos.(III.yz) = -\cos.(3.x).$$

Eben so multiplizire man die Gl. (2) (3); so hat man:

$$\cos.(\bar{\bar{z}}.x).\sin.(III.xy) = \frac{B'''}{N_{III}} = \cos.(III.xy) = \cos.(3.y);$$

Endlich bemerke man, dass

$$\cos.(III.xy) = \cos.(3.z).$$

Multiplizirt man die Gleichungen (3) (5); so ergiebt sich:

$$\sin.(1.\bar{\bar{z}}).\sin.(III.xy) = \frac{a'_{,}.\sqrt{1+a''^2+a''^2_{,}}}{N_{III}} = \frac{-a'_{,}}{\sqrt{1+a'^2+a'^2_{,}}}$$

$$= -(\cos.1.z).$$

Endlich, wenn die Gl. (3) (6) mit einander verbunden werden; so bekömmt man:

$$\cos.(1.\bar{\bar{z}}).\sin.(III.xy) = -\frac{a_{,}''.\sqrt{1+a'^2+a'^2_{,}}}{N_{III}} = \frac{-a_{,}''}{\sqrt{1+a''^2+a_{,}''^2}}$$

$$= -\cos.(2.z).$$

Zur Bestimmung der obigen vier Winkel:

$$(1.x),\ (2.x),\ (1.y),\ (2.y);$$

bediene man sich der Gl. (6) (7) (8) Art. 205; aus ihnen folgt:

$$\left.\begin{aligned}\cos.(1.x) &= \cos.(2.y).\cos.(3.z) - \cos.(2.z).\cos.(3.y)\\ \cos.(2.y) &= \cos.(1.x).\cos.(3.z) - \cos.(1.z).\cos.(3.x)\end{aligned}\right\}$$

Setzt man den Werth von cos.(2.y) aus der zweiten Gleichung in die erste; so erhält man nach gehöriger Reduktion:

$$\cos.(1.x) = \{\cos.(III.xy).\sin.(1.\bar{\bar{z}}).\sin.(\bar{\bar{z}}.x) + \cos.(1.\bar{\bar{z}}).\text{cs}.(\bar{\bar{z}}.x)\}$$

Setzt man den Werth von cos.(1.x) aus der ersten in die zweite Gl.; so findet man:

$$\cos.(2.y) = \{\cos.(III.xy).\cos.(1.\bar{\bar{z}}).\cos.(\bar{\bar{z}}.x) + \sin.(1.\bar{\bar{z}})\sin.(\bar{\bar{z}}.x)\}$$

Ferner hat man:

$$\left.\begin{aligned}\cos.(1.y) &= \cos.(3.x).\cos.(2.z) - \cos.(3.z).\cos(2.x)\\ \cos.(2.x) &= \cos.(3.y).\cos.(1.z) - \cos.(3.z).\cos.(1.y)\end{aligned}\right\}$$

Aus ihnen folgt wieder:

$$\cos.(1.y) = -\cos.(III.xy).\sin.(1.\bar{\bar{z}}).\text{cs}.(\bar{\bar{z}}.x) + \text{cs}.(1.\bar{\bar{z}})\sin.(\bar{\bar{z}}.x)$$

und $\cos.(2.x) = -\cos.(III.xy).\sin.(1.\bar{\bar{z}})\sin.(\bar{\bar{z}}.x) + \sin(1.\bar{\bar{z}}).\text{cs}.(\bar{\bar{z}}.x)$

Diese Resultate stimmen genau mit denen überein, welche wir schon Art. 62 Gl. (1) gefunden haben; daselbst ist nemlich

$$(\bar{\bar{z}}.x) = \psi;\ (III.xy) = \vartheta;\ (1.\bar{\bar{z}}) = \varphi,$$

und:

$$(x_{,}.x) = (1.x);\ (y_{,}.x) = [180^0 - (2.x)];\ (z_{,}.x) = [180^0 - (3.x)];$$
$$(x_{,}.y) = [180^0 - (1.y)];\ (y_{,}.y) = (2.y);\ (z_{,}.y) = (3.y);$$
$$(x_{,}.z) = [180^0 - (1.z)];\ (y_{,}.z) = (2.z);\ (z_{,}.z) = (3.z);$$

Auch hätte man aus den drei bereits gefundenen Winkeln

$$(2.z),\ (3.x),\ (3.z)$$

nach der am Ende des Art. 61 erklärten Methode, oder vermittelst der Gl. (7) dieses Art. die übrigen sechs Winkel sehr leicht finden können.

208. Es ist interressant, die merkwürdigen Gleichungen (6) (7) (8) Art. 205 noch auf eine endere Art, und zwar unmittelbar aus den Relationen zu entwickeln, welche wir Art. 61 in den Gl. (3) (4) (5) (6) im ersten Capitel vor Augen gestellt, und im Art. 205 Gl. (b) (c) (b') (c') angeführt haben.

Bezeichnet man die erste der Gleichungen (b) mit ($1.b$), und dieser analog die andern; und entwickelt man nachstehende Verbindungen unter ihnen:

$$\left.\begin{array}{l} \{[1.c].\cos.(1.x)-[1.b].\cos.(2.x)\}; \\ \{[1.c].\cos.(1.y)-[1.b].\cos.(2.y)\}; \\ \{[1.c].\cos.(1.z)-[1.b].\cos.(2.z)\}; \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \{[2.c].\cos.(1.x)-[1.b].\cos.(3.x)\}; \\ \{[2.c].\cos.(1.y)-[1.b].\cos.(3.y)\}; \\ \{[2.c].\cos.(1.z)-[1.b].\cos.(3.z)\}; \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \{[3.c].\cos.(3.x)-[3.b].\cos.(2.x)\}; \\ \{[3.c].\cos.(3.y)-[3.b].\cos.(2.y)\}; \\ \{[3.c].\cos.(3.z)-[3.b].\cos.(2.z)\}; \end{array}\right\}$$

so wird man ohne Schwierigkeit finden, wenn man der Kürze wegen mit

$$A_{I}\, A_{II}\, A_{III}\quad B_{I}\, B_{II}\, B_{III}\quad C_{I}\, C_{II}\, C_{III}$$

respective die Ausdrücke in den neun Gleichungen (6) (7) (8) Art. 205 rechter Hand des Gleichnisszeichens andeutet:

$$\cos.(2.x) = \{C_{II}.\cos.(1.z)-C_{III}.\cos.(1.y)\} \quad . \quad . \quad (1)$$
$$\cos.(2.y) = \{C_{III}.\cos.(1.x)-C_{I}.\cos.(1.z)\} \quad . \quad . \quad (2)$$
$$\cos.(2.z) = \{C_{I}.\cos.(1.y)-C_{II}.\cos.(1.x)\} \quad . \quad . \quad (3)$$
$$\cos.(3.x) = \{B_{III}.\cos.(1.y)-B_{II}.\cos.(1.z)\} \quad . \quad . \quad (4)$$
$$\cos.(3.y) = \{B_{I}.\cos.(1.z)-B_{III}.\cos.(1.x)\} \quad . \quad . \quad (5)$$
$$\cos.(3.z) = \{B_{II}.\cos.(1.x)-B_{I}.\cos.(1.y)\} \quad . \quad . \quad (6)$$
$$\cos.(2.x) = \{A_{III}.\cos.(3.y)-A_{II}.\cos.(3.z)\} \quad . \quad (7)$$
$$\cos.(2.y) = \{A_{I}.\cos.(3.z)-A_{III}.\cos.(3.x)\} \quad . \quad (8)$$
$$\cos.(2.z) = \{A_{II}.\cos.(3.x)-A_{I}.\cos.(3.y)\} \quad . \quad (9)$$

Solcher Relationen giebt es noch mehrere, die man durch ähnliche Verbindungen findet, als:

$$\left.\begin{array}{l} \cos.(1.x) = B_{II}.\cos.(3.z)-B_{III}.\cos.(3.y); \\ \cos.(1.y) = B_{III}.\cos.(3.x)-B_{I}.\cos.(3.z); \\ \cos.(1.z) = B_{I}.\cos.(3.y)-B_{II}.\cos.(3.x); \end{array}\right\} \begin{array}{l} . \quad . \quad (10) \\ . \quad . \quad (11) \\ . \quad . \quad (12) \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos.(1.x) = C_{III}.\cos.(2.y)-C_{II}.\cos.(2.z); \\ \cos.(1.y) = C_{I}.\cos.(2.z)-C_{III}.\cos.(2.x); \\ \cos.(1.z) = C_{II}.\cos.(2.x)-C_{I}.\cos.(2.y); \end{array}\right\} \begin{array}{l} . \quad . \quad (13) \\ . \quad . \quad (14) \\ . \quad . \quad (15) \end{array}$$

$$\left.\begin{aligned}\cos.(3.x) &= A_{,,}.\cos.(2.z)-A_{,,,}.\cos.(2.y)\,; \\ \cos.(3.y) &= A_{,,,}.\cos.(2.x)-A_{,}.\cos.(2.z)\,; \\ \cos.(3.z) &= A_{,}.\cos.(2.y)-A_{,,}.\cos.(2.x)\,;\end{aligned}\right\}\begin{aligned}&\ldots (16)\\ &\ldots (17)\\ &\ldots (18)\end{aligned}$$

Um itzt die Grössen $A_{,}$ etc. näher zu bestimmen, verbinde man je eine der Gl. in dem einem Systeme (1) . . (9) mit einer correspondirenden Gleichung im andern Systeme (10) . . (18). So z. B. wenn man $C_{,,}$ und $C_{,,,}$ finden wollte; so hätte man die Gleichungen (1) und (13) zu verbinden; diese Verbindung führt aber auf die zwei äquivalenten Gleichungen:

$$C_{,}.C_{,,,} = \cos.(3.x).\cos.(3.z)\,;$$

$$C_{,}.C_{,,} = \cos.(3.x).\cos.(3.y)\,;$$

woraus:

$$\frac{C_{,,}}{C_{,,,}} = \frac{\cos.(3.y)}{\cos.(3.z)}\,;$$

folgt. Auf ähnliche Art findet man:

$$C_{,,}.C_{,,,} = \cos.(3.y).\cos.(3.z)\,;$$

Multiplizirt man diese zwei letzten Gleichungen mit einander; so wird man finden:

$$C^2_{,,} = \cos.^2(3.y)$$

und hieraus $C_{,,} = \cos.(3.y)$; also $C_{,,,} = \cos.(3.z)$; $C_{,} = \cos.(3.x)$. Ebenso findet man:

$$A_{,} = \cos.(1.x);\ A_{,,} = \cos.(1.y);\ A_{,,,} = \cos.(1.z)$$

und $B_{,} = \cos.(2.x)$; $B_{,,} = \cos.(2.y)$; $B_{,,,} = \cos.(2.z)$.

209. Man erkennt nun leicht das allgemeine Verfahren, das man zu beobachten hat, um das Problem von der Transformation der rechtwinklichten Coordinaten in allen Fällen aufzulösen, die Lage des zweiten Systems $1_{,}2_{,}3_{,}$ der coordinirten Achsen gegen das erste mag nun durch welche Winkel immer gegeben seyn. Man hat nemlich mit Hülfe der Ausdrücke, womit uns die analytische Geometrie versieht, und deren wir einige im Art. 206 angezeigt haben, drei von den Winkeln zu bestimmen, welche die neuen Achsen 1, 2, 3 mit den ursprünglichen xyz machen. Hierauf wird man mit Hülfe der Gl. (6) (7) (8) Art. 205 die übrigen sechs unbekannte Winkel

finden können. Wird z. B. die Lage des zweiten Systemes gegen das erste durch die drei Winkel:

$$(1'.x),\ (1.xy),\ (2.xy)$$

d. i. durch die Winkel $(1'.x)$, $(1.z)$, $(2.z)$ bestimmt; von welcher Bestimmungsart schon Art. 62 die Rede war; so formire man die Ausdrücke:

$$\sin.(1'.x) = \frac{a_{\prime}}{\sqrt{1+a'^2}} = \frac{\cos.(1.y)}{\sin.(1.z)};$$

$$\cos.(1'.x) = \frac{1}{\sqrt{1+a'^2}} = \frac{\cos.(1.x)}{\sin.(1.z)};$$

Hieraus bekömmt man sogleich:

$$\cos.(1.x) = \sin.(1.z).\cos.(1'.x);$$

$$\cos.(1.y) = \sin.(1.z).\sin.(1'.x);$$

Endlich ist, wegen

$$\cos.^2(1.z)+\cos.^2(2.z)+\cos.^2(3.z) = 1,$$

auch $\cos.(3.z) = \sqrt{1-\cos.^2(1.z)-\cos.^2(2.z)}$ bekannt. Man kennt nun schon fünf der Cosinusse der unbekannten Winkel. Die übrigen vier sind itzt leicht zu bestimmen.

So z. B. findet man aus den Gl. (8) (7) Art. 205:

$$\cos.(3.x) = \{\cos.(1.y).\cos.(2.z)-\cos.(2.y).\cos.(1.z)\};$$

$$\cos.(2.y) = \{\cos.(1.x).\cos.(3.z)-\cos.(3.x).\cos.(1.z)\};$$

und hieraus ergiebt sich:

$$\cos.(3.x) = \left\{\frac{\cos.(2.z)}{\sin.(1.z)}.\sin.(1'.x)-\cos.(3.z).\cot.(1.z).\cos.(1'.x)\right\};$$

$$\cos.(2.y) = \left\{\frac{\cos.(3.z)}{\sin.(1.z)}.\cos.(1'.x)-\cos.(2.z).\cot.(1.z).\sin.(1'.x)\right\};$$

Durch ähnliche Formeln werden endlich $\cos.(2.x)$, $\cos.(3.y)$ gefunden.

Gleichungen für die Projektion einer gegebenen Geraden im Raume auf einer der Lage nach bekannten Ebene. Analytische Ausdrücke für die Winkel, welche hier entspringen.

210. Wir wollen itzt noch zeigen, wie man die Grundsätze der analytischen Geometrie anwendet, um die Gleichungen einer Geraden zu finden, welche die Projektion einer gegebenen Geraden im Raume in irgend einer der Lage nach bekannten Ebene ist. Es seyen also:

$$\left.\begin{aligned} y &= ax+b\,; \\ z &= a_{,}x+b_{,}\,; \end{aligned}\right\}$$

die Gleichungen einer gegebenen Geraden, und

$$Ax+By+Cz+D = 0$$

die gegebene Gleichung einer Ebene, auf welcher die gegebene Gerade projizirt werde. Es seyen nun:

$$\left.\begin{aligned} y &= \alpha x+\beta\,; \\ z &= \alpha_{,}x+\beta_{,}\,; \end{aligned}\right\}$$

die Gleichungen der gesuchten Geraden.

Zur Bestimmung dieser Gleichungen oder der Grössen $\alpha\alpha_{,}\,\beta\beta_{,}$ führen mehrere Wege. Ein sehr einfaches Verfahren ist das folgende. Es seyen $x'y'z'$ die Coordinaten des Durchschnittspunktes der gegebenen Linie 1 mit der Ebene, durch welchen Punkt auch die gesuchte Gerade gehen wird. In diesem Punkte errichte man über die gegebene Ebene eine perpendikulär auf sie stehende Gerade; so sind ihre Gleichungen:

$$\left.(y-y') = \frac{B}{A}\cdot(x-x')\right\}$$

$$\left.(z-z') = \frac{C}{A}\cdot(x-x')\right\}$$

Legt man durch diese Gerade und die gegebene Linie 1 eine Ebene; so ist ihre Gleichung bekanntlich:

$$(Ca-Ba_{,})\cdot(x-x')+(Aa_{,}-C)\cdot(y-y')+(B-Aa)\cdot(z-z') = 0$$

gemäss Art. 198 Gl. (4), wo $\alpha = \frac{B}{A}$; $\alpha_{,} = \frac{C}{A}$.

Da nun $(x'y'z')$ ein Punkt der gegebenen Geraden 1 ist, so ist

$$\left.\begin{aligned} y' &= ax'+b \\ z' &= a_{,}x'+b_{,} \end{aligned}\right\}$$

die Gleichung der in Rede stehenden Ebene wird daher werden:

$$(Ca-Ba_{,}).x+(Aa_{,}-C).y+(B-Aa).z+(A(ab_{,}-a_{,}b)-Bb_{,}+Cb)=0.$$

Diese Ebene enthält nun die gesuchte Gerade, und da sie auch in der gegebenen liegen soll, so verbinde man mit der gefundenen Gleichung die gegebene:

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Eliminirt man also aus diesen zwei Gleichungen zuerst z; so erhält man eine Relation zwischen xy, und diese ist die Gleichung der Projektion der gesuchten Geraden in der Ebene xy. Eliminirt man aber aus den Gleichungen der beiden Ebenen die Grösse y; so entspringt eine Relation zwischen xz, und diese ist die Gleichung der Projektion der gesuchten Geraden in der Ebene xz.

Nach gehörig angestellter Rechnung wird man finden, dass die Gleichungen der gesuchten Geraden seyn werden:

$$\left.\begin{array}{c}[(B^2+C^2)-A(Ba+Ca_{,})].y= \\ {[(A^2+C^2)a-B.(A+Ca_{,})]x+[A.(ab_{,}-a_{,}b)-Bb_{,}+C.b].C;} \\ {[(B^2+C^2)-A.(Ba+Ca_{,})].z=} \\ {[(A^2+B^2)a_{,}-C.(A+Ba)]x-[A(ab_{,}-a_{,}b)-B.b_{,}+C.b]B;}\end{array}\right\}(1)$$

211. Eine andere Auflösung dieser Aufgabe ist in den folgenden Ausdrücken enthalten.

Es seyen $x'y'z'$ die Coordinaten irgend eines Punktes der gegebenen Linie (1); so ist

$$y'=(ax'+b);\ z'=(a_{,}x'+b_{,})\ \ldots\ldots\ (a)$$

Man ziehe durch diesen Punkt, senkrecht auf die gegebene Ebene, eine Gerade; ihre Gleichungen werden seyn:

$$\left.\begin{array}{l}y-y'=\frac{B}{A}(x-x) \\ z-z'=\frac{C}{A}(x-x')\end{array}\right\}\ \ldots\ldots\ (b)$$

Um die Coordinaten des Durchschnittspunktes dieser Geraden mit der gegebenen Ebene zu finden, verbinde man mit dieser Gleichung (b) die der Ebene:

$$Ax+By+Cz+D=0\ \ldots\ldots\ (c)$$

und substituire hierin aus den Gl. (a) für $y'z'$ ihre Werthe.

Nennt man $x_{\prime}y_{\prime}z_{\prime}$ die Coordinaten des Durchschnittspunktes; so findet man:

$$x_{\prime} = \frac{[(B^2+C^2)-A(Ba+Ca_{\prime})]x'-[AD+A(Bb+Cb_{\prime})]}{A^2+B^2+C^2};$$

$$y_{\prime} = \frac{[(A^2+C^2)-B(A+Ca_{\prime})]x'-[BD-(A^2+C^2)b+BCb_{\prime}]}{A^2+B^2+C^2};$$

$$z_{\prime} = \frac{[(A^2+B^2)-C(A+Ba)]x'-[CD-(A^2+B^2)b_{\prime}+BCb]}{A^2+B^2+C^2};$$

Die Gerade nun, welche man durch die Punkte $(\dot{x}\dot{y}\dot{z})$ und $(x_{\prime}y_{\prime}z_{\prime})$ legt, wird die gesuchte Linie seyn. Da die Gleichungen dieser Geraden gemäss Art. 99 sind:

$$\left.\begin{aligned} y &= \left(\frac{\dot{y}-y_{\prime}}{\dot{x}-x_{\prime}}\right)x + \left(\frac{\dot{x}y_{\prime}-x_{\prime}\dot{y}}{\dot{x}-x_{\prime}}\right) \\ z &= \left(\frac{\dot{z}-z_{\prime}}{\dot{x}-x_{\prime}}\right)x + \left(\frac{\dot{x}z_{\prime}-x_{\prime}\dot{z}}{\dot{x}-x_{\prime}}\right) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (d)$$

so erhält man unmittelbar aus diesen Gleichungen die der gesuchten Geraden, wenn man für $\dot{x}\dot{y}\dot{z}$ und $x_{\prime}y_{\prime}z_{\prime}$ die für diese Coordinaten gefundenen Werthe bringt. Zur leichtern Berechnung hat man:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}-x_{\prime} &= \frac{A(Ba+Ca_{\prime})-(B^2+C^2)}{A^2+B^2+C^2}; \\ \dot{y}-y_{\prime} &= \frac{B(A+Ca_{\prime})-(A^2+C^2)a}{A^2+B^2+C^2}; \\ \dot{z}-z_{\prime} &= \frac{C(A+Ba)-(A^2+B^2)a_{\prime}}{A^2+B^2+C^2}; \end{aligned}\right\}$$

Anstatt der letzten Glieder in den Gl. (*d*) kann man setzen:

$$\left[\left(\frac{\dot{y}-y_{\prime}}{\dot{x}-x_{\prime}}\right)x_{\prime}-y_{\prime}\right] \text{ und } \left[\left(\frac{\dot{z}-z_{\prime}}{\dot{x}-x_{\prime}}\right)x_{\prime}-z_{\prime}\right].$$

212. Setzt man der Kürze wegen:

$$\left.\begin{aligned} A^2+B^2+C^2 &= M; \\ A+Ba+Ca_{\prime} &= N; \end{aligned}\right\}$$

dann werden die Gleichungen der gesuchten Geraden folgende Gestalt haben:

$$\left.\begin{aligned} y &= \left(\frac{aM-BN}{M-AN}\right).x + \frac{C.\{A(ab_{,}-a_{,}b)-Bb_{,}+Cb\}}{M-AN}; \\ z &= \left(\frac{a_{,}M-CN}{M-AN}\right).x - \frac{B.\{A(ab_{,}-a_{,}b)-Bb_{,}+Cb\}}{M-AN}; \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Die Gleichungen der correlativen Geraden sind daher:

$$\left.\begin{aligned} y &= \left(\frac{aM-BN}{M-AN}\right).x \\ z &= \left(\frac{a_{,}M-CN}{M-AN}\right).x \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Man findet nun hieraus:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \left(\frac{aM-BN}{M-AN}\right) = a + \left(\frac{Aa-B}{M-AN}\right).N; \\ \alpha_{,} &= \left(\frac{a_{,}M-CN}{M-AN}\right) = a_{,} + \left(\frac{Aa_{,}-C}{M-AN}\right).N; \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (3)$$

$$\left.\begin{aligned} (a-\alpha) &= \left(\frac{Aa-B}{M-AN}\right).N; \\ (a_{,}-\alpha_{,}) &= \left(\frac{Aa_{,}-B}{M-AN}\right).N; \\ (a_{,}\alpha-a\alpha_{,}) &= \left(\frac{Ca-Ba_{,}}{M-AN}\right).N; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Hieraus folgt weiter:

$$\left.\begin{aligned} &(B-Aa)^2+(C-Aa_{,})^2+(Ca-Ba_{,})^2 = \{M.(1+a^2+a_{,}^2)-N^2\}; \\ &(M-AN)^2+(Ma-BN)^2+(Ma_{,}-CN)^2 = M.\{M(1+a^2+a_{,}^2)-N^2\} \\ &(a-\alpha)^2+(a_{,}-\alpha_{,})^2+(a\alpha_{,}-a_{,}\alpha)^2 = \left\{\frac{N^2\{M(1+a^2+a_{,}^2)-N^2\}}{M-AN^2}\right\} \\ &A+B\alpha+C\alpha_{,} = 0;\ (1+a\alpha+a_{,}\alpha_{,}) = \left\{\frac{M(1+a^2+a_{,}^2)-N^2}{M-AN}\right\}; \\ &(B-A\alpha)^2+(C-A\alpha_{,})^2+(C\alpha-B\alpha_{,})^2 = M\cdot(1+\alpha^2+\alpha_{,}^2); \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Wenn nun die gegebene Gerade die Linie 1, und ihre Projektion in der gegebenen Ebene die Linie 2 genannt wird; dann hat man:

$$\sin.(1.2) = \frac{N.\sqrt{\{(B-Aa)^2+(C-Aa_{,})^2+(Ca-Ba_{,})^2\}}}{\sqrt{1+a^2+a_{,}^2}.\sqrt{\{(M-AN)^2+(Ma-BN)^2+(Ma_{,}-CN)^2\}}}$$

gemäss der Formel (4) Art. 157, und

$$\cos.(1.2) = \frac{M(1+a^2+a_{,}^2)-N^2}{\sqrt{(M-AN)^2+(Ma-BN)^2+(Ma_{,}-CN)^2}.\sqrt{1+a^2+a_{,}^2}}$$

Aus diesen zwei Ausdrücken wird, mit Rücksicht auf die Gl. (5) werden:

$$\sin.(1.2) = \frac{N}{\sqrt{M}.\sqrt{1+a^2+a_{,}^2}} = \frac{A+Ba+Ca_{,}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{1+a^2+a_{,}^2}};$$

$$\cos.(1.2) = \frac{\sqrt{M(1+a^2+a_{,}^2)-N^2}}{\sqrt{M}.\sqrt{1+a^2+a_{,}^2}} = \frac{\sqrt{(B-AaB)^2+(C-Aa_{,})^2+(Ca-Ba_{,})^2}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{1+a^2+a_{,}^2}}$$

Die Vergleichung dieser Ausdrücke mit denen Art. 174 Gl. (1) (2) zeigt, dass

$$(1.2) = (1.I),$$

wie bekannt ist.

213. Wir wollen itzt einige Ausdrücke zur Bestimmung der Sinusse, Cosinusse und Tangenten der Winkel, welche aus den Beziehungen zweier Geraden gegen einander, oder einer Geraden gegen eine Ebene entspringen, mittelst der in den frühern Art. gegebenen Formeln für den gegenwärtigen Fall entwickeln.

Die Gleichungen (1) (2) (3) Art. 158 geben zuerst:

$$\left.\begin{aligned}
\cos.(1'.2') &= \frac{M(1+a^2)-N(A+Ba)}{\sqrt{1+a^2}.\sqrt{(M-AN)^2+(Ma-BN)^2}};\\
\cos.(1''.2'') &= \frac{M(1+a_{,}^2)-N.(A+Ca_{,})}{\sqrt{1+a_{,}^2}.\sqrt{(M-AN)^2+(Ma_{,}-CN)^2}};\\
\cos.(1'''.2''') &= \frac{M(a^2+a_{,}^2)-N.(Ba+Ca_{,})}{\sqrt{a^2+a_{,}^2}.\sqrt{(Ma-BN)^2+(Ma_{,}-CN)^2}};
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned}
\text{tg.}(1'.2') &= \frac{(Aa-B).N}{M.(1+a^2)-N.(A+Ba)};\\
\text{tg.}(1''.2'') &= \frac{(Aa-C).N}{M.(1+a_{,}^2)-N.(A+Ca_{,})};\\
\text{tg.}(1'''.2''') &= \frac{Ca-Ba_{,}}{M.(a^2+a_{,}^2)-N.(Ba+Ca_{,})};
\end{aligned}\right\} \quad .. \quad (2)$$

$$\left.\begin{aligned}
\cos.(1',2) &= \frac{M.(1+a^2)-N.(A+Ba)}{P.\sqrt{M}.\ \sqrt{1+a_{,}^2}}\,;\\
\cos.(1''.2) &= \frac{M.(1+a_{,}^2)-N.(A+Ca)}{P.\sqrt{M}.\ \sqrt{1+a_{,}^2}}\,;\\
\cos.(1'''.2) &= \frac{M.(a^2+a_{,}^2)-N.(Ba+Ca_{,})}{P.\sqrt{M}.\ \sqrt{a^2+a_{,}^2}}\,;
\end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ (3)$$

wo $$P = \sqrt{\{M.(1+a^2+a_{,}^2)-N^2\}}.$$

Weil die Gerade 2 in der Ebene I liegt; so kann man sich unmittelbar der Formeln Art. 190 bedienen, um die Sinusse, Cosinusse und Tangenten der Winkel zu finden, welche die Gerade 2 und ihre Projektionen in den coordinirten Ebenen mit den Knotenlinien der Ebene, in der sie liegt, machen; wenn man $x'\,y'\,z'$ so annimmt, dass $y' = ax'$; $z' = a_{,}x'$, und $x'^2+y'^2+z'^2 = 1$. Diess giebt:

$$x' = \left(\frac{M-AN}{P.\sqrt{M}}\right);\ y' = \left(\frac{Ma-BN}{P.\sqrt{M}}\right);\ z' = \left(\frac{Ma_{,}-CN}{P.\sqrt{M}}\right)\ (4)$$

Die Gl. (1) und (2) Art. 190 geben nun:

$$\left.\begin{aligned}
\cos.(2.\bar{x}) &= \frac{(Ca-Ba_{,})\sqrt{M}}{P.\sqrt{B^2+C^2}}\\
\cos.(2.\bar{y}) &= \frac{(C-Aa_{,})\sqrt{M}}{P.\sqrt{A^2+C^2}}\\
\cos.(2.\bar{z}) &= \frac{(B-Aa)\sqrt{M}}{P.\sqrt{A^2+B^2}}
\end{aligned}\right\}(5)
\qquad
\left.\begin{aligned}
\sin.(2.\bar{x}) &= \frac{(M-AN)}{P.\sqrt{B^2+C^2}}\\
\sin.(2.\bar{y}) &= \frac{(Ma-BN)}{P.\sqrt{A^2+C^2}}\\
\sin.(2.\bar{z}) &= \frac{(Ma_{,}-CN)}{P.\sqrt{A^2+B^2}}
\end{aligned}\right\}(6)$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{tg}.(2.\bar{x}) &= \left(\frac{M-AN}{Ca-Ba_{,}}\right)\frac{1}{\sqrt{M}}\\
\mathrm{tg}.(2.\bar{y}) &= \left(\frac{Ma-BN}{C-Aa_{,}}\right)\frac{1}{\sqrt{M}}\\
\mathrm{tg}.(2.\bar{z}) &= \left(\frac{Ma_{,}-CN}{B-Aa}\right)\frac{1}{\sqrt{M}}
\end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ (7)$$

Wenn man bemerkt, dass

$$\frac{N}{P} = \mathrm{tg}.(1,2) = \mathrm{tg}.(1.I);$$

dann werden die Gleichungen (5):

$$\left.\begin{aligned}\cos.(2.x) &= \frac{Ca-Ba_{,}}{\sqrt{B^2+C^2}}.\ \mathrm{tg}.(1.I).\frac{\sqrt{M}}{N};\\ \cos.(2.y) &= \frac{C-Aa_{,}}{\sqrt{A^2+C^2}}.\ \mathrm{tg}.(1.I).\frac{\sqrt{M}}{N};\\ \cos.(2.z) &= \frac{B-Aa}{\sqrt{A^2+B^2}}.\ \mathrm{tg}.(1.I).\frac{\sqrt{M}}{N};\end{aligned}\right\}\quad \dots \quad (8)$$

Mit Hilfe dieser Ausdrücke kann man nun die Winkel, welche die Linie 2 mit den Knotenlinien $x\ y\ z$ macht, in Funktionen bloss von den Winkeln, welche die Lage der Linie 1 und Ebene I bestimmen, angeben. Mit Benützung der Gl. (4) Art. 176 hat man nemlich zuerst:

$$\left.\begin{aligned}\cos.(2.x) &= \cos.(1'''.x).\sqrt{a^2+a_{,}^2}.\ \mathrm{tg}.(1.I).\frac{\sqrt{M}}{N};\\ \cos.(2.y) &= \cos.(1'''.y).\sqrt{1+a_{,}^2}.\ \mathrm{tg}.(1.I).\frac{\sqrt{M}}{N};\\ \cos.(2.z) &= \cos.(1'.z).\sqrt{1+a^2}.\ \mathrm{tg}.(1.I).\frac{\sqrt{M}}{N};\end{aligned}\right\}\quad (9)$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich nun leicht nachstehende:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\cos.(2.x)}{\cos.(1.I)} &= \sin.(1.x).\cos.(1'''.x);\\ \frac{\cos.(2.y)}{\cos.(1.I)} &= \sin.(1.y).\cos.(1''.y);\\ \frac{\cos.(2.z)}{\cos.(1.I)} &= \sin.(1.z).\cos.(1'.z);\end{aligned}\right\}\quad \dots \quad (10)$$

Auch den Gleichungen (6) kann man noch mancherlei Gestalten geben; so z. B. ist:

$$\left.\begin{aligned}\sin.(2.x) &= \left\{\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{B^2+C^2}} - \frac{A}{\sqrt{B^2+C^2}}.\frac{N}{\sqrt{M}}\right\}.\frac{\sqrt{M}}{P};\\ \sin.(2.y) &= \left\{\frac{a.\sqrt{M}}{\sqrt{A^2+C^2}} - \frac{B}{\sqrt{A^2+C^2}}.\frac{N}{\sqrt{M}}\right\}.\frac{\sqrt{M}}{P};\\ \sin.(2.z) &= \left\{\frac{a_{,}.\sqrt{M}}{\sqrt{A^2+B^2}} - \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}.\frac{N}{\sqrt{M}}\right\}.\frac{\sqrt{M}}{P};\end{aligned}\right\}$$

und aus diesen Gleichungen ergeben sich unmittelbar nachstehende:

$$\left.\begin{array}{l} \sin.(2.\bar{x}) = \left\{\dfrac{\sin.(1.x)}{\sin.(I.x).\cos.(1.I)} - \dfrac{\text{tg}.(1.x).\text{tg}.(1.I)}{\text{tg}.(I.x)}\right\} \\ \sin.(2.\bar{y}) = \left\{\dfrac{\sin.(1.y)}{\sin.(I.y).\cos.(1.I)} - \dfrac{\text{tg}.(1.y).\text{tg}.(1.I)}{\text{tg}.(I.y)}\right\} \\ \sin.(2.\bar{z}) = \left\{\dfrac{\sin.(1.z)}{\sin.(I.z).\cos.(1.I)} - \dfrac{\text{tg}.(1.z).\text{tg}.(1.I)}{\text{tg}.(I.z)}\right\} \end{array}\right\} \quad (11)$$

Aus den Gl. (7) wird noch, wenn man mit ihnen die Gl. (6) Art. 176 verbindet, werden:

$$\left.\begin{array}{l} \text{tg}.(2.\bar{x}) = \dfrac{(M-AN).(Ba+Ca_{,})}{\text{tg}.(1'''.\bar{x}).\sqrt{M}}; \\ \text{tg}.(2.\bar{y}) = \dfrac{(Ma-BN).(A+Ca_{,})}{\text{tg}.(1''.\bar{y}).\sqrt{M}}; \\ \text{tg}.(2.\bar{z}) = \dfrac{(Ma_{,}-CN).(A+Ba)}{\text{tg}.(1'.\bar{z}).\sqrt{M}}; \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; (12)$$

oder auch, wenn man von den Gl. (4) Art. 176 Gebrauch macht:

$$\text{tg}.(2.\bar{x}) = \frac{M-AN}{\cos.(1'''.\bar{x})\sqrt{a^2+a_{,}^2}.\sqrt{B^2+C^2}.\sqrt{M}};$$

$$\text{tg}.(2.\bar{y}) = \frac{Ma-BN}{\cos.(1''.\bar{y}).\sqrt{1+a_{,}^2}.\sqrt{A^2+C^2}.\sqrt{M}};$$

$$\text{tg}.(2.\bar{z}) = \frac{Ma_{,}-CN}{\cos.(1'.\bar{z}).\sqrt{1+a^2}.\sqrt{A^2+B^2}.\sqrt{M}};$$

Und hieraus ergeben sich leicht nachstehende Formeln:

$$\left.\begin{array}{l} \text{tg}.(2.\bar{x}) = \dfrac{\cos.(1.x)-\sin.(I.x).\sin.(1.I)}{\sin.(1.x).\cos.(1'''.\bar{x}).\cos.(I.x)}; \\ \text{tg}.(2.\bar{y}) = \dfrac{\cos.(1.y)-\sin.(I.y).\sin.(1.I)}{\sin.(1.y).\cos.(1''.\bar{y}).\cos.(I.y)}; \\ \text{tg}.(2.\bar{z}) = \dfrac{\cos.(1.z)-\sin.(I.z).\sin.(1.I)}{\sin.(1.z).\cos.(1'.\bar{z}).\cos.(I.z)}; \end{array}\right\} \quad . \; (13)$$

Man erkennt nun leicht, wie man nach und nach die Ausdrücke finden könne, welche die Sinusse, Cosinusse und Tan-

genten der übrigen Winkel geben, so die Projektionen $2'$ $2''$ $2'''$ mit der Ebene I und ihren Knotenlinien $\bar{x}$ $\bar{y}$ $\bar{z}$ machen, so dass sich diese Winkel bloss durch diejenigen bestimmen lassen, welche die gegebene Gerade und ihre Projektionen in den coordinirten Ebenen mit der Ebene I oder ihren Knotenlinien machen. Obgleich diese Entwicklungen, die jeder nach der hier gegebenen Anleitung selbst ohne Schwierigkeit ins Werk setzen kann, auf noch manches wichtige Resultat führen können; so werden wir sie doch nicht weiter fortsetzen; sondern anstatt dessen den allgemeinen Ausdruck zur Bestimmung desjenigen Winkels in einer Ebene suchen, den die Projektionen zweier gegebenen Geraden im Raume auf dieser Ebene mit einander einschliessen.

214. Es seyen $y = ax + b$; $z = a_{,}x + b_{,}$;
und $y = a_{,}x + b_{,}$; $z = a'_{,}x + b'_{,}$;
die Gleichungen der zwei gegebenen Geraden im Raume, und

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

die gegebene Gleichung der Ebene, worauf die zwei Geraden projizirt werden. Endlich seyen

$$y = \alpha x + \beta; \quad z = \alpha_{,}x + \beta_{,};$$
$$y = \alpha' x + \beta'; \quad z = \alpha'_{,} + \beta'_{,};$$

die Gleichungen der gesuchten Geraden.

Es reicht hin, bloss die correlativen Linien dieser Geraden zu betrachten. Die Auflösung der Aufgabe, den Winkel zu finden, den diese zwei gesuchten Geraden mit einander machen, ist schon ganz in den obigen Ausdrücken enthalten. Setzt man nemlich:

$$\left.\begin{array}{l} A + Ba + Ca_{,} \quad N = ; \\ A + Ba' + Ca'_{,} = N; \end{array}\right\}$$

so findet man, nach Gl. (3) (4) Art. 212:

$$\alpha = \left(\frac{Ma - BN}{M - AN}\right); \quad \alpha_{,} = \left(\frac{Ma_{,} - CN}{MAN}\right);$$

$$\alpha_{,} = \left(\frac{Ma' - BN}{M - AN}\right); \quad \alpha'_{,} = \left(\frac{Ma'_{,} - CN'}{M - AN}\right);$$

$$a-\alpha = \left(\frac{Aa-B}{M-AN}\right).N;\ a'-\alpha' = \left(\frac{Aa'-B}{M-AN'}\right).N';$$

$$a_{,}-\alpha_{,} = \left(\frac{Aa_{,}-C}{M-AN}\right).N;\ a'_{,}-\alpha'_{,} = \left(\frac{Aa'_{,}-C}{M-AN'}\right).N';$$

$$a_{,}\alpha-a\alpha_{,} = \left(\frac{Ca-Ba_{,}}{M-AN}\right).N;\ a'_{,}\alpha'-a'\alpha'_{,} = \left(\frac{Ca'-Ba'_{,}}{M-AN'}\right).N';$$

Bezeichnet man die gesuchten Geraden mit $1_{,}$ und $2_{,}$; so giebt die allgemeine Formel (3) Art. 157, wenn man der Kürze wegen setzt:

$$(M-AN)(M-AN')+(Ma-BN)(Ma'-BN')$$
$$+(Ma_{,}-CN)(Ma'_{,}-CN')=R;$$
$$(M-AN)^2+(Ma-BN)^2+(Ma_{,}-CN)^2 = P;$$
$$(M-AN')^2+(Ma'_{,}-CN')^2+(Ma'_{,}-CN')^2 = Q;$$

den Ausdruck:

$$\cos.(1_{,}.2_{,}) = \frac{R}{\sqrt{P}.\sqrt{Q}},$$

welcher, gehörig entwickelt, endlich geben wird:

$$\cos.(1_{,}.2_{,}) = \left\{\frac{n.M+N.N'-(a').N-(a).N'}{\sqrt{M.(1+a^2+a_{,}^2)-N^2}.\sqrt{M.(1+a'^2+a_{,}^2)-N'^2}}\right\},$$

wo man der Kürze wegen gesetzt hat:

$$1+aa'+a_{,}a'_{,} = n$$
$$A+Ba+Ca_{,} = (a)$$
$$A+Ba'+Ca'_{,} = (a')$$

Die Formeln (4) (5) Art. 157 liefern ferner die Ausdrücke für den Sinus und die Tangente dieses Winkels $(1_{,}.2_{,})$, wenn man anstatt $aa_{,}$ schreibt $\alpha'\alpha'_{,}$; und für $\alpha\alpha_{,}\alpha'_{,}$ die gefundenen Werthe substituirt.

SECHSTES CAPITEL.

Relationen zwischen zwei Ebenen.

Gleichung der Durchschnittslinie zweier Ebenen. Durchschnittspunkte dieser Geraden mit den coordinirten Ebenen. Abstände des Anfangspunktes von ihren Projektionen in den coordinirten Ebenen, und Abstand des Anfangspunktes von dieser Geraden selbst.

215. Auf dieselbe Art, auf welche wir in den vorhergehenden zwei Capiteln die Relationen untersuchten, welche zwischen zwei Geraden, oder zwischen einer Geraden und einer Ebene existiren; werden wir auch die Relationen betrachten, welche zwischen zwei Ebenen bestehen. Die Gleichungen dieser zwei Ebenen, davon wir die eine die Ebene *I*, und die andere die Ebene *II* nennen wollen, seyen, und zwar die Gleichung der Ebene *I*:

$$A'x+B'y+C'z+D'=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

und die der Ebene *II*:

$$A''x+B''y+C''z+D''=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Wenn diese zwei Ebenen einander nicht parallel sind; so werden sie sich schneiden, und dieser Durchschnitt ist eine Gerade. Ihre Gleichungen findet man, mittelst der gegebenen der Ebene, auf verschiedene Weise.

Sind die Gleichungen der Durchschnittslinie der beiden Ebenen:

$$\left.\begin{aligned} y &= ax+b\,; \\ z &= a_{,}x+b_{,}\,; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

so müssen die Werthe von yz den beiden Gleichungen (1)(2) ein Genüge leisten, da diese Gerade sowohl in der einen als andern Ebene liegen soll. Setzt man sie also in jene Gleichungen, so findet man:

$$\left.\begin{aligned} (A'+B'a+C'a_{,}).x+(B'b+C'b_{,}+D') &= 0 \\ (A''+B''a+C''a_{,}).x+(B''b+C''b_{,}+D'') &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Da diese zwei Gleichungen für jeden Werth von x statt haben oder identisch werden sollen; so folgt, dass sowohl der von x ab- als unabhängige Theil in jeder derselben für sich gleich Null seyn müsse. Wir schliessen also, dass $aa_{,}bb_{,}$ solche Werthe haben müssen, welche nachstehenden Bedingungsgleichungen ein Genüge leisten:

$$A'+B'a+C'a_{,} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

$$A''+B''a+C''a_{,} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

$$B'b+C'b_{,}+D' = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (c)$$

$$B''b+C''b_{,}+D'' = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (d)$$

Aus den beiden ersten Gleichungen (a) (b) folgen für $aa_{,}$ die Werthe:

$$a = \left\{\frac{A''C'-A'C''}{B'C''-B''C'}\right\};$$

$$a_{,} = \left\{\frac{A'B''-A''B'}{B'C''-B''C'}\right\};$$

Aus den Gl. (c) (d) folgen für $bb_{,}$ die Werthe:

$$b = \left\{\frac{D''C'-D'C''}{B'C''-B''C'}\right\};$$

$$b_{,} = \left\{\frac{B''D'-B'D''}{B'C''-B''C'}\right\};$$

Die gesuchten Gleichungen der Durchschnittslinie der zwei Ebenen werden daher seyn:

$$\left.\begin{aligned} y &= \left(\frac{A''C'-A'C''}{B'C''-B''C'}\right).x+\left(\frac{D''C'-D'C''}{B'C''-B''C'}\right) \\ z &= \left(\frac{A'B''-A''B'}{B'C''-B''C'}\right).x+\left(\frac{D'B''-D''B'}{B'C''-B''C'}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (4)$$

Auf diese Gleichungen kann man auch noch gelangen, indem man die zwei Gleichungen (1) (2) der Ebenen als coëxistirend betrachtet; alsdann gehören alle Werthe von xyz für diejenigen Punkte des Raumes, welche in diesen beiden Ebenen zugleich, d. i. in der Durchschnittslinie derselben liegen. Eliminirt man also zuerst z aus ihnen; dann erhält man eine Relation zwischen xy, welche mit der ersten der Gleichungen (4) übereinkömmt. Wird hierauf aus denselben Gl. (1) (2) die Grösse y eliminirt; dann bleibt eine Relation zwischen xz übrig, und diese findet man einerlei mit der zweiten der Gl. (4). Man kann noch bemerken, dass die so erhaltene Relation zwischen xy die Gleichung der Projektion der Durchschnittslinie in der Ebene xy sey; so wie jene zwischen xz die Gleichung ihrer Projektion in der Ebene xz ist. Eliminirt man endlich x aus den Gl. (1) (2) alsdann erhält man:

$$z = \left(\frac{A'B'' - A''B'}{A''C' - A'C''}\right).y + \left(\frac{D''A' - A''D'}{A''C' - A'C''}\right) \quad . \quad (5)$$

und diese Gleichung gehört für die Projektion der Durchschnittslinie in der Ebene yz.

216. Wir wollen nun diese Durchschnittslinie an und für sich näher betrachten. Wenn sie gehörig verlängert wird, so trifft sie die coordinirten Ebenen xy, xz, yz in Punkten, welche wir respektive mit $e\,e'e''$ benennen, und deren Coordinaten wir mit pq $p_,q_,$ $p_{,,}q_{,,}$ bezeichnen wollen. Die Ausdrücke für sie findet man sehr leicht, wenn man in den allgemeinen Formeln, welche wir dafür im Art. 94 entwickelt haben, für $aa_,bb_,$ die obigen Werthe des vorhergehenden Art. setzt. Noch leichter aber ergeben sie sich unmittelbar aus nachstehenden Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} A'p + B'q + D' = 0 \\ A''p + B''q + D'' = 0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} A'p_, + C'q_, + D' = 0 \\ A''p_, + C''q_, + D'' = 0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} B' p_{{\prime\prime}} + C' q_{{\prime\prime}} + D' = 0 \\ B'' p_{{\prime\prime}} + C'' q_{{\prime\prime}} + D'' = 0 \end{array}\right\}$$

Aus ihnen erhält man:

$$\left.\begin{array}{ll} p = \left(\frac{B''D' - B'D''}{A''B' - A'B''}\right); & q = \left(\frac{A''D' - A'D''}{A'B'' - A''B'}\right) \\ p_{\prime} = \left(\frac{C''D' - C'D''}{A''C' - A'C''}\right); & q_{\prime} = \left(\frac{A''D' - A'D''}{A'C'' - A''C'}\right) \\ p_{{\prime\prime}} = \left(\frac{C''D' - C'D''}{B''C' - B'C''}\right); & q_{{\prime\prime}} = \left(\frac{B''D' - B'D''}{B'C'' - B''C'}\right) \end{array}\right\} . (1)$$

Die Ausdrücke (1) Art. 92, angewandt auf den gegenwärtigen Fall, geben für die Längen $l_{\prime} l_{{\prime\prime}} l_{{\prime\prime\prime}}$ der Perpendikel, welche vom Anfangspunkte auf die Projektionen der Durchschnittslinie in den coordinirten Ebenen xy, xz, yz herabgelassen werden, nachstehende Formeln:

$$\left.\begin{array}{l} l_{\prime} = \frac{C'D'' - C''D'}{\sqrt{\{(B'C'' - B''C')^2 + (A''C' - A'C'')^2\}}} \\ l_{{\prime\prime}} = \frac{B''D' - B'D''}{\sqrt{\{(B'C'' - B''C')^2 + (A'B'' - A''B')^2\}}} \\ l_{{\prime\prime\prime}} = \frac{A''D' - A'D''}{\sqrt{\{(A'B'' - A''B')^2 + (A'C'' - A''C')^2\}}} \end{array}\right\} . (2)$$

Mit Hilfe der Gl. (1) findet man noch:

$$\left.\begin{array}{l} l_{\prime} = \left(\frac{p_{\prime} p_{{\prime\prime}}}{\sqrt{p_{\prime}^2 + p^2_{{\prime\prime}}}}\right); \\ l_{{\prime\prime}} = \left(\frac{p q_{{\prime\prime}}}{\sqrt{p^2 + q^2_{{\prime\prime}}}}\right); \\ l_{{\prime\prime\prime}} = \left(\frac{q . q_{\prime}}{\sqrt{q^2 + q_{\prime}^2}}\right); \end{array}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

Wird vom Anfangspunkte der Coordinaten auf die Durchschnittslinie ein Perpendikel gezogen, und bezeichnet man mit $\dot{x}\dot{y}\dot{z}$ die Coordinaten des Punktes, in welchem dasselbe jene Gerade trifft; so findet man, vermöge Gl. (1) Art. 94:

(4) $x =$

$$\frac{-1}{V^2}\left\{(B''^2+C''^2)A'D'+(B'^2+C'^2)A''D''-(A'D''+A''D')(B'B''+C'C')\right\}$$

$$y =$$

$$\frac{-1}{V^2}\left\{(A''^2+C''^2)B'D'+(A'^2+C'^2)B''D''-(B'D''+B''D')(A'A''+C'C'')\right\}$$

$$z =$$

$$\frac{-1}{V^2}\left\{(A''^2+B''^2)C'D'+(A'^2+B'^2)C''D''-(C'D''+C''D')(A'A''+B'B'')\right\}$$

wo man der Kürze wegen gesetzt hat:

$$V = \sqrt{\{(B'C''-B'C'')^2+(A''C'-A'C'')^2+(A'B''-A''B')^2\}}.$$

Die Gl. (2) Art. 94 giebt für die Länge dieses Perpendikels selbst:

$$L = \frac{1}{V}.\sqrt{\left\{(A'D''-A''D')^2+(B'D''-B''D')^2+(C'D''-C''D')^2\right\}}$$

welchem Ausdrucke noch folgende Gestalt gegeben werden kann:

(5) $L =$

$$\left\{\frac{\sqrt{[(A'^2+B'^2+C'^2)D''^2+(A''^2+B''^2+C''^2)D'^2-2(A'A''+B'B''+C'C'')D'D'']}}{V}\right\}$$

Im Falle, als:

$$A'A''+B'B''+C'C'' = 0,$$

wird $V = \sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}.\sqrt{A''^2+B''^2+C''^2}$,

und daher:

$$L = \sqrt{\left\{\frac{D'^2}{A'^2+B'^2+C'^2}+\frac{D''^2}{A''^2+B''^2+C''^2}\right\}} \quad . . (6)$$

Winkel der Durchschnittslinie und ihrer Projektionen mit den coordinirten Achsen. Ausdrücke für den Sinus, Cosinus und die Tangente des Neigungswinkels der beiden Ebenen. Bedingungsgleichung des Parallellismus und der Perpendikularität zweier Ebenen. Gleichung einer Ebene, welche durch einen gegebenen Punkt geht, und zu einer gegebenen Ebene parallel ist; oder welche durch einen gegebenen Punkt geht, und auf zwei Ebenen zugleich senkrecht steht.

217. Indem wir es bloss mit Winkeln zu thun haben, genügt es, bloss die correlativen Linien und Ebenen zu betrachten; man kann also $D' = D'' = 0$ setzen. Wendet man nun die Ausdrücke, welche Art. 89 u. s. f. gefunden worden sind, auf die Durchschnittslinie der beiden Ebenen an; so findet man alle Winkel, welche sowohl diese Linie selbst als auch ihre Projektionen mit den coordinirten Achsen machen, durch $A'A''B'B''C'C''$ ausgedrückt. Von diesen Formeln werde ich bloss die vorzüglichsten anführen. Behält V die Bedeutung des vorigen Art.; so hat man, gemäss Gl. (1) Art. 89, wenn man die Durchschnittslinie die Gerade 1 nennt:

$$\left.\begin{aligned} \cos.(1.x) &= \left(\frac{B'C'' - B''C'}{V}\right) \\ \cos.(1.y) &= \left(\frac{A''C' - A'C''}{V}\right) \\ \cos.(1.z) &= \left(\frac{A'B'' - A''B'}{V}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (1)$$

Werden diese Gleichungen respektive mit $A'B'C'$ multiplizirt, und hierauf addirt; so erhält man:

$$A'.\cos.(1.x) + B'.\cos.(1.y) + C'.\cos.(1.z) = 0\,;$$

und eben so:

$$A''.\cos.(1.x) + B''.\cos.(1.y) + C''.\cos.(1.z) = 0\,.$$

Diese Gleichungen ergeben sich auch aus den Gl. (a) (b) Art. 215, wenn man:

$$a = \frac{\cos.(1.y)}{\cos.(1.x)}\,; \quad a_{,} = \frac{\cos.(1.z)}{\cos.(1.x)} \quad \text{setzt.}$$

Diese Gleichungen lehren also, dass:

$$\left.\begin{array}{ll} & cs(1.x).cs.(I.yz)+cs.(1.y).cs.(I.xz)+cs.(1.z).cs.(I.xy)=0 \\ \text{und} & cs.(1.x).cs.(II.yz)+cs.(1.y).cs.(II.xz)+cs.(1.z).cs.(II.xy)=0 \end{array}\right\}$$

Setzt man für $A'B'C'A''B''C''$ die Werthe aus den Gl. (1) Art. 110; wobei man die Knotenlinien der Ebene I mit $\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}$, und die der Ebene II mit $\bar{\bar{x}}\,\bar{\bar{y}}\,\bar{\bar{z}}$ bezeichnet; so findet man:

$$\left.\begin{array}{rl} \cos.(1.x) & = -\{\cos.(1.y).\mathrm{tg}.(\bar{z}.y)+\cos.(1.z).\mathrm{tg}.(\bar{y}.z)\} \\ & = -\{\cos.(1.y).\mathrm{tg}.(\bar{\bar{z}}.y)+\cos.(1.z).\mathrm{tg}.(\bar{\bar{y}}.z)\} \\ \cos.(1.y) & = +\{\cos.(1.x).\mathrm{tg}.(\bar{z}.x)-\cos.(1.z).\mathrm{tg}.(\bar{x}.z)\} \\ & = +\{\cos.(1.x).\mathrm{tg}.(\bar{\bar{z}}.x)-\cos.(1.z).\mathrm{tg}.(\bar{\bar{x}}.z)\} \\ \cos.(1.z) & = +\{\cos.(1.x).\mathrm{tg}.(\bar{y}.x)+\cos.(1.y).\mathrm{tg}.(\bar{x}.y)\} \\ & = +\{\cos.(1.x).\mathrm{tg}.(\bar{\bar{y}}.x)+\cos.(1.y).\mathrm{tg}.(\bar{\bar{x}}.y)\} \end{array}\right\} (2)$$

Um die Resultate, auf welche man bei Entwicklung der Ausdrücke der Sinuse, Cosinuse und Tangenten der in Rede stehenden Winkel geführt wird, so einfach als möglich darzustellen, wollen wir der Kürze wegen setzen:

$$\left.\begin{array}{l} B'C''-B''C' = (A)\,; \\ A''C'-A'C'' = (B)\,; \\ A'B''-A''B' = (C)\,; \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; (3)$$

so dass:

$$V = \sqrt{(A)^2+(B)^2+(C)^2}\,,$$

und:

$$\cos.(1.x) = \frac{(A)}{V}\,; \quad \cos.(1.y) = \frac{(B)}{V}\,; \quad \cos.(1.z) = \frac{(C)}{V}\,;$$

Die Gl. (3) zeigen offenbar, dass:

$$\left.\begin{array}{l} A'.(A)+B'.(B)+C'.(C) = 0 \\ A''.(A)+B''.(B)+C''.(C) = 0 \end{array}\right\}$$

wie auch seyn muss, indem die Bedingungsgleichungen (a) (b) Art. 215 statt finden müssen, in denen:

$$a = \frac{(B)}{(A)}\,; \quad a_{,} = \frac{(C)}{(A)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

Die Gl. (2) Art. 89 geben ferner:

$$\left.\begin{array}{ll} \sin.(1.x) = \dfrac{\sqrt{(B)^2+(C)^2}}{V}; & \text{tg}.(1.x) = \dfrac{\sqrt{(B)^2+(C)^2}}{(A)} \\ \sin.(1.y) = \dfrac{\sqrt{(A)^2+(C)^2}}{V}; & \text{tg}.(1.y) = \dfrac{\sqrt{(A)^2+(C)^2}}{(B)} \\ \sin.(1.z) = \dfrac{\sqrt{(A)^2+(B)^2}}{V}; & \text{tg}.(1.z) = \dfrac{\sqrt{(A)^2+(B)^2}}{(C)} \end{array}\right\} . (5)$$

Aus den Gl. (3) findet man:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{tg}.(1'.x) = \dfrac{(B)}{(A)}; & \text{tg}.(1'.y) = \dfrac{(A)}{(B)} \\ \text{tg}.(1''.x) = \dfrac{(C)}{(A)}; & \text{tg}.(1''.z) = \dfrac{(A)}{(C)} \\ \text{tg}.(1'''.y) = \dfrac{(B)}{(C)}; & \text{tg}.(1'''.z) = \dfrac{(C)}{(B)} \end{array}\right\} . . (6)$$

$$\left.\begin{array}{l} \sin.(1'.x) = \cos.(1'.y) = \dfrac{(B)}{\sqrt{(A)^2+(B)^2}} \\ \sin.(1''.x) = \cos.(1''.z) = \dfrac{(C)}{\sqrt{(A)^2+(C)^2}} \\ \sin.(1'''.y) = \cos.(1'''.z) = \dfrac{(C)}{\sqrt{(B)^2+(C)^2}} \end{array}\right\} . (7)$$

218. Stellt man sich senkrecht auf die Durchschnittslinie 1 durch den Anfangspunkt der Coordinaten eine Ebene gelegt vor; so ist die Gleichung dieser Ebene:

$$x + a.y + a_{,}.z = 0,$$

d. i.:

$$(A).x + (B).y + (C).z = 0.$$

Diese Ebene schneidet jede der Ebenen *I* und *II* in einer geraden Linie; die Gleichungen ihrer correlativen Linien werden daher gefunden, wenn man die Gleichung dieser Ebene mit jeder der Gleichungen:

$$A'.x + B'.y + C'.z = 0;$$
$$A''.x + B''.y + C''.z = 0$$

verbindet.

Man wird nun sehr leicht erhalten:

$$y = \left\{\frac{A'.(C)-C'.(A)}{C'.(B)-B'.(C)}\right\}.x;\quad z = \left\{\frac{B'.(A)-A'.(B)}{C'.(B)-B'.(C)}\right\}.x;$$ Gleichungen der correlativen Durchschnittslinie der Ebene I mit jener Ebene,

$$y = \left\{\frac{A''.(C)-C''.(A)}{C''.(B)-B''.(C)}\right\}.x;\quad z = \left\{\frac{B''.(A)-A''.(B)}{C''.(B)-B''.(C)}\right\}.x;$$ Gleichungen der correlativen Durchschnittslinie der Ebene II mit jener Ebene.

Wir wollen der Kürze wegen schreiben:

$$\left.\begin{array}{l} y = (\alpha)'.x \\ z = (\alpha_{,})'.x \end{array}\right\} \text{ und } \left\{\begin{array}{l} y = (\alpha)''.x; \\ z = (\alpha_{,})''.x; \end{array}\right.$$

Es ist leicht einzusehen, dass der Winkel, den diese zwei correlativen Geraden mit einander machen, der nemliche sey, unter welchem die eine Ebene I gegen die andern geneigt ist. Nun ist:

$$\cos.(I.II) = \frac{1+(\alpha)'.(\alpha)''+(\alpha_{,})'.(\alpha_{,})''}{\sqrt{1+(\alpha)'^2+(\alpha_{,})'^2}.\sqrt{1+(\alpha)''^2+(\alpha_{,})''^2}};$$

Nach gehöriger Reduktion dieses Ausdruckes findet man:

$$\cos.(I.II) = \frac{A'A''+B'B''+C'C''}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}.\sqrt{A''^2+B''^2+C''^2}}. \quad (1)$$

Noch leichter gelangt man auf diesen Ausdruck durch folgendes Verfahren. Man ziehe durch den Anfangspunkt der Coordinaten und senkrecht auf die Ebenen *I*, *II* gerade Linien. Der Winkel, den sie mit einander machen, ist der nemliche, unter welchem die beiden Ebenen *I*, *II* gegeneinander geneigt sind. Nun sind die Gleichungen dieser Geraden, und zwar der auf der Ebene *I* Senkrechten:

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{B'}{A'}.x \\ z = \dfrac{C'}{A'}.x \end{array}\right\}$$

und der auf der Ebene *II* Senkrechten:

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{B''}{A''}.x \\ z &= \frac{C''}{A''}.x \end{aligned}\right\}$$

Also hat man, gemäss der allgemeinen Formel:

$$\cos.(I.II) = \frac{1+\frac{B'}{A'}.\frac{B''}{A''}+\frac{C'}{A'}.\frac{C''}{A''}}{\sqrt{1+\frac{B'^2}{A'^2}+\frac{C'^2}{A'^2}}.\sqrt{1+\frac{B''^2}{A''^2}+\frac{C''^2}{A''^2}}}$$

d. i.

$$\cos.(I.II) = \frac{A'A''+B'B''+C'C''}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}.\sqrt{A''^2+B''^2+C''^2}}.$$

Diese Gleichung zeigt nun, dass:

$$cs.(I.II) = cs.(I.yz)cs.(II.yz)+cs.(I.xz)cs.(II.xz)+cs.(I.yz)cs.(II.yz)$$

oder:

$$cs.(I.II) = \sin.(I.x).cs.(II.x)+\sin.(I.y).cs.(II.y)+cs.(I.x)\sin.(II.x).$$

Die Gl. (4) (5) Art. 157 geben ferner:

$$\left.\begin{aligned} \sin.(I.II) &= \frac{\sqrt{(A)^2+(B)^2+(C)^2}}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}.\sqrt{A''^2+B''^2+C''^2}} \\ &= \frac{V}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}.\sqrt{A''^2+B''^2+C''^2}} \end{aligned}\right\} . (2)$$

und:

$$tg.(I.II) = \frac{\sqrt{(A)^2+(B)^2+(C)^2}}{A'A''+B'B''+C'C''} = \frac{V}{A'A''+B'B''+C'C''} . (3)$$

Wir wollen der Kürze wegen:

$$\left.\begin{aligned} A'A''+B'B''+C'C'' &= M \\ A'^2+B'^2+C'^2 &= P'^2 \\ A''^2+B''^2+C''^2 &= P''^2 \end{aligned}\right\} \ldots . (4)$$

setzen, so dass:

$$\cos.(I.II) = \frac{M}{P'.P''};\ \sin.(I.II) = \frac{V}{P'.P''};\ tg.(I.II) = \frac{V}{M} . (5)$$

219. Aus den im vorhergehenden Art. erhaltenen Resultaten wird sich leicht beurtheilen lassen, in welchem Falle die zwei Ebenen I, II zu einander parallel sind, oder gegenseitig auf einander senkrecht stehen.

Im ersten Falle ist $(I.II) = 0$, und $\sin.(I.II) = 0$; folglich $V = 0$ d. i. $(A)^2+(B)^2+(C)^2 = 0$. Dieser Gleichung kann aber auf keine andere Weise Genüge geschehen, als dadurch, dass:

$$(A) = 0\,,\quad (B) = 0\,;\quad (C) = 0\,;$$

d. i.

$$\left.\begin{array}{l} A'B''-A''B' = 0 \\ A'C''-A''C' = 0 \\ B'C''-B''C' = 0 \end{array}\right\}$$

Da die dritte Gleichung schon eine Folge der zwei ersten ist; so geht daraus hervor, dass nur diesen beiden Genüge zu geschehen hat, wenn beide Ebenen einander parallel seyn sollen; es muss daher seyn:

$$B'' = \frac{A''}{A'}.B'\,;\quad C'' = \frac{A''}{A'}.C',$$

d. h. es müssen die Verhältnisse

$$\frac{A''}{A'}\,;\quad \frac{B''}{B'}\,;\quad \frac{C''}{C'}\,;$$

einander gleich seyn.

In dem besondern Falle dass man den Exponenten des Verhältnisses $= 1$ setzt, wird:

$$\left.\begin{array}{l} A'' = A'\,; \\ B'' = B'\,; \\ C'' = C'\,; \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(VIII)}$$

Man kann nun diese Gleichungen selbst für die Bedingungsgleichungen des Parallellismus der zwei Ebenen I, II ansehen. Auf diese Art werden die Ebenen, deren Gleichungen sind:

$$Ax+By+Cz+D' = 0\,;$$
$$Ax+By+Cz+D'' = 0\,;$$

zu einander parallel seyn, und ihr Abstand von einander wird seyn:

$$\frac{(D''-D')}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Im andern Falle, wenn die beiden Ebenen auf einander senkrecht stehen, ist $(I.II) = 90^0$; und $\cos.(I.II) = 0$, woraus folgt, dass:

$$M = 0,$$

d. i. $$A'A''+B'B''+C'C'' = 0 \ldots\ldots (IX)$$

Diese Gleichung nennt man nun die Bedingungsgleichung der Perpendikularität zweier Ebenen auf einander.

Auf diesen Fall bezieht sich auch die oben angeführte Gl. (6) Art. 216. Die Ausdrücke für xyz, welche daselbst in den Gl. (4) gegeben worden sind, reduziren sich dann auf folgende:

$$\left.\begin{aligned} x &= -\left\{\frac{A'.D'}{P'^2}+\frac{A''.D''}{P'^2}\right\} \\ y &= -\left\{\frac{B'.D'}{P'^2}+\frac{B''.D''}{P'^2}\right\} \\ z &= -\left\{\frac{C'.D'}{P'^2}+\frac{C''.D''}{P''^2}\right\} \end{aligned}\right\}$$

Denkt man sich also durch den Anfangspunkt der Coordinaten, senkrecht auf die Durchschnittslinie eine Ebene gelegt, so werden sich diese Linie und Ebene in einem Punkte treffen, dessen Coordinaten xyz die eben angezeigten Werthe haben.

.

220. Sucht man die Gleichung einer Ebene, deren Lage dadurch bestimmt wird, dass sie durch einen gegebenen Punkt gehen solle, dessen Coordinaten $x'y'z'$ sind, und die zu einer Ebene, deren Gleichung ist:

$$Ax+By+Cz+D = 0$$

parallel seyn soll; so sey:

$$A'(x-x')+B'(y-y')+C'(z-z') = 0$$

die Form der Gleichung der gesuchten Ebene. Vermöge der

Bedingung, dass beide Ebenen einander parallel seyn sollen, hat man:

$$A' = A; \quad B' = B; \quad C' = C;$$

Die Gleichung der gesuchten Ebene ist daher:

$$A.(x-x')+B.(y-y')+C.(z-z') = 0.$$

Auch findet man diese Gleichung noch durch folgende Schlüsse. Man stelle sich durch den gegebenen Punkt $(x'y'z')$ eine Gerade gezogen vor, welche auf der gegebenen Ebene senkrecht stehe; so sind ihre Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} y-y' &= \frac{B}{A}.(x-x') \\ z-z' &= \frac{C}{A}.(x-x') \end{aligned}\right\}$$

Legt man ferner durch diesen Punkt eine Ebene, welche auf dieser Geraden senkrecht steht; so ist ihre Gleichung:

$$(x-x') + \frac{B}{A}.(y-y') + \frac{C}{A}.(z-z') = 0$$

oder: $$A.(x-x')+B.(y-y')+C.(z-z') = 0.$$

Beide Ebenen sind, indem sie auf einer und derselben Geraden senkrecht stehen, einander parallel.

221. Wir wollen itzt die Gleichung einer Ebene suchen, welche durch den gegebenen Punkt $(x'y'z')$ geht, und auf zwei Ebenen zugleich senkrecht steht. Es seyen also:

$$A'x+B'y+C'z+D' = 0$$
$$A''x+B''y+C''z+D'' = 0$$

die Gleichungen der gegebenen zwei Ebenen, worauf die gesuchte Ebene, deren Gleichung, da sie durch den Punkt $x'y'z'$ gehen soll, die Form haben wird:

$$A.(x-x')+B.(y-y')+C.(z-z') = 0.$$

Die Bedingungen, dass diese Ebene auf den gegebenen senkrecht stehen soll, geben:

$$\left.\begin{aligned} AA'+BB'+CC' &= 0; \\ \text{und} \quad AA''+BB''+CC'' &= 0; \end{aligned}\right\}$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgen die für ABC annehmbaren Werthe:

$$A = B'C''-B''C' = (A)$$
$$B = A''C'-A'C'' = (B)$$
$$C = A'B''-A''B' = (C)$$

Die Gleichung der gesuchten Ebene wird demnach werden:

$$(A).(x-x')+(B).(y-y')+(C).(z-z') = 0$$

Bezeichnet man diese Ebene mit III; dann ist:

$$\cos.(III.yz) = \frac{(A)}{V};\ \cos.(III.xz) = \frac{(B)}{V};\ \cos.(III.xy) = \frac{(C)}{V}.$$

222. Endlich wollen wir noch die Gleichung derjenigen Ebene suchen, welche dadurch bestimmt wird, dass sie durch eine gegebene Gerade gehen soll, und auf einer andern Ebene, deren Lage bekannt ist, senkrecht zu stehen hat.

Es sey als:

$$Ax+By+Cz+D = 0$$

die Gleichung der gegebenen, und:

$$A'x+B'y+C'z+D' = 0$$

die Gleichung der gesuchten Ebene.

Ferner seyen die Gleichungen der Geraden, durch welche die gesuchte Ebene gelegt werden soll:

$$\left.\begin{aligned} y &= ax+b \\ z &= a_{,}x+b_{,} \end{aligned}\right\}$$

Die erste Bedingung, dass diese Gerade in der gesuchten Ebene liegen solle, giebt die Gleichungen:

$$A'+B'a+C'a_{,} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (a)$$
$$B'b+C'b_{,}+D' = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (b)$$

die andere Bedingung aber giebt:

$$A'A+B'B+C'C = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (c)$$

Aus den Gleichungen (a) (c) folgen nachstehende für $A'B'C'$ annehmbaren Werthe:

$$A' = (Ca-Ba_{,})\ ;$$
$$B' = (Aa_{,}-C)\ ;$$
$$C' = (B-Aa)\ ;$$

Endlich folgt aus der Gl. (b):

$$D = \{A.(ab_{\prime}-a_{\prime}b)-Bb'+Cb\},$$

so dass die Gleichung der gesuchten Ebene seyn wird:

$$\{(Ca-Ba_{\prime}).x+(Aa_{\prime}-C).y+(B-Aa).z$$
$$+A.(ab_{\prime}-a_{\prime}b)-Bb_{\prime}+Cb\} = 0;$$

genau so, wie schon Art. 210 gefunden wurde. Setzt man:

$$A^2+B^2+C^2 = P^2$$
$$A+Ba+Ca_{\prime} = N;$$

und nennt diese gesuchte Ebene die Ebene II; so hat man:

$$\text{tg.}(\bar{z}.\bar{\bar{z}}) = \frac{P^2a_{\prime}-CN}{C(B-Aa)};$$

$$\text{tg.}(\bar{y}.\bar{\bar{y}}) = \frac{P^2a-BN}{B(Aa_{\prime}-C)};$$

$$\text{tg.}(\bar{x}.\bar{\bar{x}}) = \frac{P^2-AN}{A(Ca-Ba_{\prime})};$$

Ausdrücke, welche sich leicht mit andern vertauschen lassen.

Ausdrücke der Sinusse, Cosinusse und Tangenten der Winkel, welche die Durchschnittslinie zweier Ebenen und ihre Projektionen in den coordinirten Ebenen mit den Knotenlinien jener Ebenen bilden, und welche diese Knotenlinien unter einander machen. Relationen unter diesen Winkeln. Nähere Betrachtung des besonderen Falles, da beide Ebenen auf einander senkrecht stehen. Das Problem von der Transformation der Coordinaten.

223. Eine unmittelbare Anwendung der Art. 176 und 177 gegebenen Formeln auf den gegenwärtigen Fall, mit Rücksichtnehmung auf die Bedingung, dass die Gerade, welche hier gegen die Ebene bezogen wird, in dieser Ebene selbst liege, liefert uns alle diejenigen Ausdrücke,

die wir eben finden wollen. Setzt man also für $a a_{,}$ die Werthe:

$$a = \frac{(B)}{(A)}; \quad a_{,} = \frac{(C)}{(A)},$$

in die Formeln (1) des angeführten Art.; so findet man:

$$\left.\begin{aligned}
\cos.(1.\bar{x}) &= \frac{C'.(B) - B'.(C)}{V.\sqrt{B'^2 + C'^2}}; \quad \cos.(1.\bar{\bar{x}}) = \frac{C''.(B) - B''(C)}{V.\sqrt{B''^2 + C''^2}} \\
\cos.(1.\bar{y}) &= \frac{C'.(A) - A'.(C)}{V.\sqrt{A'^2 + C'^2}}; \quad \cos.(1.\bar{\bar{y}}) = \frac{C''(A) - A''(C)}{V.\sqrt{A''^2 + C''^2}} \\
\cos.(1.\bar{z}) &= \frac{B'.(A) - A'.(B)}{V.\sqrt{A'^2 + B'^2}}; \quad \cos.(1.\bar{\bar{z}}) = \frac{B''.(A) - A''.(B)}{V.\sqrt{A''^2 + B''^2}}
\end{aligned}\right\} (1)$$

Die Formeln (2) (3) geben ferner:

$$\left.\begin{aligned}
\sin.(1.x) &= \frac{(A).P'}{V.\sqrt{B'^2 + C'^2}}; \quad \sin.(1.\bar{\bar{x}}) = \frac{(A).P''}{V.\sqrt{B''^2 + C''^2}} \\
\sin.(1.\bar{y}) &= \frac{(B).P'}{V.\sqrt{A'^2 + C'^2}}; \quad \sin.(1.\bar{\bar{y}}) = \frac{(B).P''}{V.\sqrt{A''^2 + C''^2}} \\
\sin.(1.\bar{z}) &= \frac{(C).P'}{V.\sqrt{A'^2 + B'^2}}; \quad \sin.(1.\bar{\bar{z}}) = \frac{(C).P''}{V.\sqrt{A''^2 + B''^2}}
\end{aligned}\right\} (3)$$

$$\left.\begin{aligned}
\text{tg}.(1.\bar{x}) &= \frac{P'.(A)}{C'.(B) - B'.(C)}; \quad \text{tg}.(1.\bar{\bar{x}}) = \frac{P''(A)}{C''.(B) - B''.(C)} \\
\text{tg}.(1.\bar{y}) &= \frac{P'.(B)}{C'.(A) - A''.(C)}; \quad \text{tg}.(1.\bar{\bar{y}}) = \frac{P''.(B)}{C''(A) - A''(C)} \\
\text{tg}.(1.\bar{z}) &= \frac{P'.(C)}{B'.(A) - A'.(B)}; \quad \text{tg}.(1.\bar{\bar{z}}) = \frac{P''.(C)}{B''(A) - A''(B)}
\end{aligned}\right\} (3)$$

Aus den Formeln (4) (5) (6) Art. 176 ergeben sich ferner die Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned}
\cos.(1'.\bar{z}) &= \frac{B'(A)-A'(B)}{\sqrt{(A)^2+(B)^2}.\sqrt{A'^2+B'^2}}\\
\cos.(1''.\bar{y}) &= \frac{C'(A)-A'(C)}{\sqrt{(A)^2+(C)^2}.\sqrt{A'^2+C'^2}}\\
\cos.(1'''.\bar{x}) &= \frac{C'(B)-B'(C)}{\sqrt{(B)^2+(C)^2}.\sqrt{B'^2+C'^2}}\\
\cos.(1'.\bar{\bar{z}}) &= \frac{B''(A)-A''(B)}{\sqrt{(A)^2+(B)^2}.\sqrt{A''^2+B''^2}}\\
\cos.(1''.\bar{\bar{y}}) &= \frac{C''(A)-A''(C)}{\sqrt{(A)^2+(C)^2}.\sqrt{A''^2+C''^2}}\\
\cos.(1'''.\bar{\bar{x}}) &= \frac{C''(B)-B''(C)}{\sqrt{(B)^2+(C)^2}.\sqrt{B''^2+C''^2}}
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (4)$$

$$\left.\begin{aligned}
\sin.(1'.\bar{z}) &= \frac{-C'.(C)}{\sqrt{(A)^2+(B)^2}.\sqrt{A'^2+B'^2}}\\
\sin.(1''.\bar{y}) &= \frac{-B'.(B)}{\sqrt{(A)^2+(C)^2}.\sqrt{A'^2+C'^2}}\\
\sin.(1'''.\bar{x}) &= \frac{-A'.(A)}{\sqrt{(B)^2+(C)^2}.\sqrt{B'^2+C'^2}}\\
\sin.(1'.\bar{\bar{z}}) &= \frac{-C''.(C)}{\sqrt{(A)^2+(B)^2}.\sqrt{A''^2+B''^2}}\\
\sin.(1''.\bar{\bar{y}}) &= \frac{-B''.(B)}{\sqrt{(A)^2+(C)^2}.\sqrt{A''^2+C''^2}}\\
\sin.(1'''.\bar{\bar{x}}) &= \frac{-A''.(A)}{\sqrt{(B)^2+(C)^2}.\sqrt{B''^2+C''^2}}
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (5)$$

$$\left.\begin{aligned}
\text{tg}.(1'.\bar{z}) &= \frac{C'.(C)}{A'.(B)-B'.(A)}; &\quad \text{tg}.(1'.\bar{\bar{z}}) &= \frac{C''.(C)}{A''.(B)-B''.(A)}\\
\text{tg}.(1''.\bar{y}) &= \frac{B'.(B)}{A'.(C)-C'.(A)}; &\quad \text{tg}.(1''.\bar{\bar{y}}) &= \frac{B''.(B)}{A''(C)-C''.(A)}\\
\text{tg}.(1'''.\bar{x}) &= \frac{A'.(A)}{B'.(C)-C'.(B)}; &\quad \text{tg}.(1'''.\bar{\bar{x}}) &= \frac{A''.(A)}{B''.(C)-C''.(B)}
\end{aligned}\right\} . \ (6)$$

Die Gl. (7) Art. 176 geben weiter:

29

$$\begin{aligned}
\cos.(1'.\bar{x}) &= \frac{C'.(B)}{\sqrt{(A(^2)+(B)^2}.\sqrt{B'^2+C'^2}}\,; \\
\cos.(1'.\bar{\bar{x}}) &= \frac{C''.(B)}{\sqrt{(A)^2+(B)^2}.\sqrt{B''^2+C''^2}}\,; \\
\cos.(1''.\bar{x}) &= \frac{-B'.(C)}{\sqrt{(A)^2+(C)^2}.\sqrt{B'^2+C'^2}}\,; \\
\cos.(1''.\bar{\bar{x}}) &= \frac{B''.(C)}{\sqrt{(A)^2+(C)^2}.\sqrt{B''^2+C''^2}}\,; \\
\cos.(1'.\bar{y}) &= \frac{C'(A)}{\sqrt{(A)^2+(B)^2}.\sqrt{A'^2+C'^2}}\,; \\
\cos.(1'.\bar{\bar{y}}) &= \frac{C''.(A)}{\sqrt{(A)^2+(B)^2}.\sqrt{A''^2+C''^2}}\,; \\
\cos.(1'''.\bar{y}) &= \frac{-A'.(C)}{\sqrt{(B)^2+(C)^2}.\sqrt{A'^2+B'^2}}\,; \\
\cos.(1'''.\bar{\bar{y}}) &= \frac{-A''.(C)}{\sqrt{(B)^2+(C)^2}.\sqrt{A''^2+C''^2}}\,; \\
\cos.)1''.\bar{z}) &= \frac{B'.(A)}{\sqrt{(A)^2+(C)^2}.\sqrt{A'^2+B'^2}}\,; \\
\cos.(1''.\bar{\bar{z}}) &= \frac{B''.(A)}{\sqrt{(A)^2+(C)^2}.\sqrt{A''^2+B''^2}}\,; \\
\cos.(1'''.\bar{z}) &= \frac{-A'.(B)}{\sqrt{(B)^2+(C)^2}.\sqrt{A'^2+B'^2}}\,; \\
\cos.(1'''.\bar{\bar{z}}) &= \frac{-A''.(B)}{\sqrt{(B)^2+(C)^2}.\sqrt{A''^2+B''^2}}\,;
\end{aligned} \quad . \; . \; (7)$$

Die Gl. (1) Art. 177 versehen uns mit nachstehenden Ausdruck:

$$\begin{aligned}
\sin.(1'.I) &= \frac{-C'.(C)}{P'.\sqrt{(A)^2+(B)^2}}\,; & \sin.(1'.II) &= \frac{-C''.(C)}{P''.\sqrt{(A)^2+(B)^2}} \\
\sin.(1''.I) &= \frac{-B'.(B)}{P''.\sqrt{(A)^2+(C)^2}}\,; & \sin.(1''.II) &= \frac{-B''.(B)}{P''.\sqrt{(A)^2+(C)^2}} \\
\sin.(1'''.I) &= \frac{-A'.(A)}{P''.\sqrt{(B)^2+(C)^2}}\,; & \sin.(1'''.II) &= \frac{-A''.(A)}{P''.\sqrt{(B)^2+(C)^2}}
\end{aligned} \quad (8)$$

Zur weitern Reduktion dieser Ausdrücke kann man noch bemerken, dass nachstehende Relationen, deren Identität die blosse Rechnung zeigt, statt finden.

Es ist nemlich:

$$[(B).C'-B'(C)] = (A''P'^2-A'M);$$
$$[(B)C''-B''(C)] = -(A'P''^2-A''M);$$
$$[C'(A)-A'(C)] = (-B''P'^2+B'M);$$
$$[C''(A)-A''(C)] = (B'P''^2-B''M);$$
$$[B'(A)-A'(B)] = (C''P'^2-C'M);$$
$$[B''(A)-A''(B)] = -(C'P''^2-C''M);$$

Man hat also, anstatt der Formeln (1) und (3);

$$\left.\begin{aligned}
\text{cs.}(1.\bar{x}) &= +\frac{A'P'^2-A'M}{V.\sqrt{B'^2+C'^2}}\,; \quad \text{cs.}(1.\bar{\bar{x}}) = -\frac{A'P''^2-A''M}{V.\sqrt{B''^2+C''^2}} \\
\text{cs.}(1.\bar{y}) &= -\frac{B''P'^2-B'M}{V.\sqrt{A'^2+C'^2}}\,; \quad \text{cs.}(1.\bar{\bar{y}}) = +\frac{B'P''^2-B''M}{V.\sqrt{A''^2+C''^2}} \\
\text{cs.}(1.\bar{z}) &= +\frac{C''P'^2-C'M}{V.\sqrt{A''^2+B''^2}}\,; \quad \text{cs.}(1.\bar{\bar{z}}) = -\frac{C'P''^2-C''M}{V.\sqrt{A''^2+B''^2}}
\end{aligned}\right\} (9)$$

$$\left.\begin{aligned}
\text{tg.}(1.\bar{x}) &= \frac{+P(A)}{A''P'^2-A'M}\,; \quad \text{tg.}(1.\bar{\bar{x}}) = \frac{-P''.(A)}{A'P''^2-A''M}\,; \\
\text{tg.}(1.\bar{y}) &= \frac{-P'(B)}{B''P'^2-B'M}\,; \quad \text{tg.}(1.\bar{\bar{y}}) = \frac{+P''(B)}{B'P''^2-B''M}\,; \\
\text{tg.}(1.\bar{z}) &= \frac{+P'(C)}{C''P'^2-C'M}\,; \quad \text{tg.}(1.\bar{\bar{z}}) = \frac{-P''(C)}{C'P''^2-C''M}\,;
\end{aligned}\right\} (10)$$

In dem besondern Falle, als die beiden Ebenen I II gegenseitig auf einander senkrecht stehen, ist $M = 0$, und man hat:

$$\left.\begin{aligned}
\cos.(1.\bar{x}) &= +\frac{A''P'^2}{V.\sqrt{B'^2+C'^2}}\,; \quad \cos.(1.\bar{\bar{x}}) = -\frac{A'.P''^2}{V.\sqrt{B''^2+C''^2}} \\
\cos.(1.\bar{y}) &= -\frac{B''P'^2}{V.\sqrt{A'^2+C'^2}}\,; \quad \cos.(1.\bar{\bar{y}}) = +\frac{B'.P''^2}{V.\sqrt{A''^2+C''^2}} \\
\cos.(1.\bar{z}) &= +\frac{C''.P'^2}{V.\sqrt{A'^2+B'^2}}\,; \quad \cos.(1.\bar{\bar{z}}) = -\frac{C'P''^2}{V.\sqrt{A''^2+B''^2}}
\end{aligned}\right\} (11)$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{tg.}(1.\bar{x}) = +\dfrac{(A)}{A''.P'}; & \text{tg.}(1.\bar{\bar{x}}) = -\dfrac{(A)}{A'\,P''}; \\ \text{tg.}(1.\bar{y}) = -\dfrac{(B)}{B''\,P'}; & \text{tg.}(1.\bar{\bar{y}}) = +\dfrac{(B)}{B'P''}; \\ \text{tg.}(1.\bar{z}) = +\dfrac{(C)}{C''P'}; & \text{tg.}(1.\bar{\bar{z}}) = -\dfrac{(C)}{C'\,P''}: \end{array}\right\} \quad . \quad (12)$$

Auch kann man übrigens noch bemerken, dass:

$$(A)^2+(B)^2 = \{C'^2P''^2+C''^2P'^2-2C'\,C''.M\};$$
$$(A)^2+(C)^2 = \{B'^2P''^2+B''^2P'^2-2B'B''.M\};$$
$$(B)^2+(C)^2 = \{A'^2P''^2+A''^2P'^2-2A'A''.M\};$$

Die Addition dieser drei Gleichungen führt auch

$$V^2 = \{P'^2.P''^2-M^2\};$$

Im Falle also, da $M = 0$, wird

$$V = P'.P''.$$

224. Um die Ausdrücke für die Sinusse, Cosinusse und Tangenten der Winkel zu finden, welche die Knotenlinien beider Ebenen mit einander machen, hat man nur nöthig, in den Formeln (3) (4) (5) Art. 157 für die dortigen Grössen $\alpha\alpha_{,}\alpha_{,}$ die jedesmaligen Werthe aus den Gleichungen der Knotenlinien zu setzen.

Die Gleichungen der Knotenlinien der correlativen Ebenen sind nun, und zwar der Linie:

$$\left.\begin{array}{ll} \bar{z}\ldots y = -\dfrac{A'}{B'}x; \text{ und der Linie } & \bar{\bar{z}}\ldots y = -\dfrac{A''}{B''}.x; \\ \bar{y}\ldots z = -\dfrac{A'}{C'}x; \quad . \quad . \quad . & \bar{\bar{y}}\ldots z = -\dfrac{A''}{C''}.x; \\ \bar{x}\ldots z = -\dfrac{B'}{C'}y; \quad . \quad . \quad . & \bar{\bar{x}}\ldots z = -\dfrac{B''}{C''}.y; \end{array}\right\}$$

Man hat daher:

$$\left.\begin{array}{l} \cos.(\bar{x}.\bar{\bar{x}}) = \dfrac{B'B''+C'C''}{\sqrt{B'^2+C'^2}.\sqrt{B''+C''^2}} = \dfrac{M-A'A''}{\sqrt{P'^2-A'^2}.\sqrt{P''^2-A''^2}} \\ \cos.(\bar{y}.\bar{\bar{y}}) = \dfrac{A'A''+C'C''}{\sqrt{A'^2+C'^2}.\sqrt{A''^2+C''^2}} = \dfrac{M-B'B''}{\sqrt{P'^2-B'^2}.\sqrt{P''^2-B''^2}} \\ \cos.(\bar{z}.\bar{\bar{z}}) = \dfrac{A'A''+B'B''}{\sqrt{A'^2+B'^2}.\sqrt{A''^2+B''^2}} = \dfrac{M-C'\,C''}{\sqrt{P'^2-C'^2}.\sqrt{P''^2-C''^2}} \end{array}\right\} (1)$$

$$\left.\begin{aligned}
\sin.(x.\bar{x}) &= \frac{B'C''-B''C'}{\sqrt{B'^2+C'^2}.\sqrt{B''^2+C''^2}} = \frac{(A)}{\sqrt{P'^2-A'^2}.\sqrt{P''^2-A''^2}} \\
\sin.(y.\bar{y}) &= \frac{A''C'-A'C''}{\sqrt{A'^2+C'^2}.\sqrt{A''^2+C''^2}} = \frac{(B)}{\sqrt{P'^2-B'^2}.\sqrt{P''^2-B''^2}} \\
\sin.(z.\bar{z}) &= \frac{A'B''-A''B'}{\sqrt{A'^2+B'^2}.\sqrt{A''^2+B''^2}} = \frac{(C)}{\sqrt{P'^2-C'^2}.\sqrt{P''^2-C''^2}}
\end{aligned}\right\}(2)$$

$$\left.\begin{aligned}
\text{tg}.(x.\bar{x}) &= \frac{B'C''-B''C'}{B'B''+C'C''} = \frac{(A)}{M-A'.A''}; \\
\text{tg}.(y.\bar{y}) &= \frac{A''C'-A'C''}{A'A''+C'C''} = \frac{(B)}{M-B'B''}; \\
\text{tg}.(z.\bar{z}) &= \frac{A'B''-A''B'}{A'A''+B'B''} = \frac{(C)}{M-C'C''};
\end{aligned}\right\} \;.\;.\;.\;(3)$$

$$\left.\begin{aligned}
\cos(z.\bar{y}) &= \frac{B'C''}{\sqrt{A'^2+B'^2}.\sqrt{A''^2+C''^2}}; \\
\cos.(z.\bar{x}) &= \frac{A'.C''}{\sqrt{B'^2+A'^2}.\sqrt{B''^2+C''^2}}; \\
\cos.(x.\bar{y}) &= \frac{A'.B''}{\sqrt{C'^2+B'^2}.\sqrt{C''^2+A''^2}}; \\
\cos.(y.\bar{z}) &= \frac{B''C'}{\sqrt{A'^2+C'^2}.\sqrt{A''^2+B''^2}}; \\
\cos.(x.\bar{z}) &= \frac{A''C'}{\sqrt{B'^2+C'^2}.\sqrt{B''^2+A''^2}}; \\
\cos.(y.\bar{x}) &= \frac{A''B'}{\sqrt{C^2+A'^2}.\sqrt{C''^2+B''^2}};
\end{aligned}\right\} \;.\;.\;(4)$$

235. Wir haben nun in den zwei vorhergehenden Art. die nothwendigen Ausdrücke, womit uns die analytische Geometrie versieht, angeführt, welche uns in den Stand setzen, alle Winkel, welche aus der Beziehung zweier Ebenen gegen einander entspringen, durch diejenigen Winkel auszudrücken, welche aus der Beziehung einer jeden Ebene für sich gegen das coordinirte Achsensystem entstehen. Wir wollen solche Ausdrücke erstlich aus den Gl. (1) und (9) Art. 223 entwickeln:

Es ist also:

$$\cos.(1.\bar{x}) = \frac{A'' P'^2 - A' M}{V.\sqrt{B'^2 + C'^2}};$$

In diesem Ausdrucke setze man:

$$A'' = P''. \cos.(II.yz),$$

so bekömmt man:

$$\cos.(1.\bar{x}) = \frac{P'^2 P''.\cos.(II.yz) - A'.M}{\sqrt{B'^2 + C'^2}},$$

welcher Ausdruck sich auch noch unter diese Form bringen lässt:

$$\cos.(1.\bar{x}) = \frac{P'}{\sqrt{B'^2+C'^2}} . \frac{P'P''}{V} . \cos.(II.yz) = \frac{M}{V} . \frac{A'}{\sqrt{B'^2+C'^2}};$$

Hieraus folgt unmittelbar:

$$\cos.(1.\bar{x}) = \left\{ \frac{\cos.(II.yz)}{\cos.(I.x).\sin.(I.II)} - \frac{\operatorname{tg}.(I.x)}{\operatorname{tg}.(I.II)} \right\}$$

oder $$\cos.(1.\bar{x}) = \frac{\cos.(II.yz) - \sin.(I.x).\cos.(I.II)}{\cos.(I.x).\sin.(I.II)}$$

Diesem Ausdrucke analog findet man auch die übrigen. Man hat also nachstehende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \cos.(1.\bar{x}) &= + \frac{\cos.(II.yz) - \cos.(I.yz).\cos.(I.II)}{\sin.(I.yz).\sin.(I.II)}; \\ \cos.(1.\bar{y}) &= - \frac{\cos.(II.xz) - \cos.(I.xz).\cos.(I.II)}{\sin.(I.xz).\sin.(I.II)}; \\ \cos.(1.\bar{z}) &= + \frac{\cos.(II.xy) - \cos.(I.xy).\cos.(I.II)}{\sin.(I.xy).\sin.(I.II)}; \end{aligned}\right\} . \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} \cos.(1.\bar{\bar{x}}) &= - \frac{\cos.(I.yz) - \cos.(II.yz).\cos.(I.II)}{\sin.(II.yz)\sin.(I.II)}; \\ \cos.(1.\bar{\bar{y}}) &= + \frac{\cos.(I.xz) - \cos.(II.xz).\cos.(I.II)}{\sin.(II.xz).\sin.(I.II)}; \\ \cos.(1.\bar{\bar{z}}) &= - \frac{\cos.(I.xy) - \cos.(II.xy).\cos.(I.II)}{\sin.(II.xy).\sin.(I.II)}; \end{aligned}\right\} . \quad (2)$$

Diese Gleichungen enthalten, wie man leicht gewahr wird, die zweite Fundamental-Gleichung der sphärischen Trigonometrie.

Man erhält auch ferner, aus denselben Gl. (1), noch Ausdrücke von folgender Gestalt:

$$\left.\begin{array}{l}
\cos.(1.\bar{x}) = \left\{\dfrac{\cos.(1.y).\sin.(I.z)-\cos.(1.z).\sin.(I.y)}{\cos.(I.x)}\right\} \\[2ex]
\cos.(1.\bar{y}) = \left\{\dfrac{\cos.(1.x).\sin.(I.z)-\cos.(1.z).\sin.(I.x)}{\cos.(I.y)}\right\} \\[2ex]
\cos.(1.\bar{z}) = \left\{\dfrac{\cos.(1.x).\sin.(I.y)-\cos.(1.y).\sin.(I.x)}{\cos.(I.z)}\right\}
\end{array}\right\} . \quad (3)$$

$$\left.\begin{array}{l}
\cos.(1.\bar{\bar{x}}) = \dfrac{\cos.(1.y).\sin.(II.z)-\cos.(1.z).\sin.(II.y)}{\cos.(II.x)}; \\[2ex]
\cos.(1.\bar{\bar{y}}) = \dfrac{\cos.(1.x).\sin.(II.z)-\cos.(1.z).\sin.(II.x)}{\cos.(II.y)}; \\[2ex]
\cos.(1.\bar{\bar{z}}) = \dfrac{\cos.(1.x).\sin.(II.y)-\cos.(1.y).\sin.(II.x)}{\cos.(II.z)};
\end{array}\right\} . \quad (4)$$

Eine ähnliche Behandlung der Gl. (2) Art. 223 wird geben:

$$\left.\begin{array}{ll}
\sin.(1.\bar{x}) = \dfrac{\cos.(1.x)}{\cos.(I.x)}; & \sin.(1.\bar{\bar{x}}) = \dfrac{\cos.(1.x)}{\cos.(II.x)}; \\[2ex]
\sin.(1.\bar{y}) = \dfrac{\cos.(1.y)}{\cos.(I.y)}; & \sin.(1.\bar{\bar{y}}) = \dfrac{\cos.(1.y)}{\cos.(II.y)}; \\[2ex]
\sin.(1.\bar{z}) = \dfrac{\cos.(1.z)}{\cos.(I.z)}; & \sin.(1.\bar{\bar{z}}) = \dfrac{\cos.(1.z)}{\cos.(II.z)};
\end{array}\right\} . \quad (5)$$

Die Verbindung der Gl. (3) (4) mit (5) giebt dann:

$$\left.\begin{array}{l}
\mathrm{tg}.(1.\bar{x}) = \dfrac{\cos.(1.x)}{\cos.(1.y).\sin.(I.z)-\cos.(1.z).\sin.(I.y)}; \\[2ex]
\mathrm{tg}.(1.\bar{y}) = \dfrac{\cos.(1.y)}{\cos.(1.x).\sin.(I.z)-\cos.(1.z).\sin.(I.x)}; \\[2ex]
\mathrm{tg}.(1.\bar{z}) = \dfrac{\cos.(1.z)}{\cos.(1.x).\sin.(I.y)-\cos.(1.y).\sin.(I.x)};
\end{array}\right\} . \quad (6)$$

u. s. w.

Mit Hilfe der Gl. (2) Art. 110 findet man aus den Gl. (1) Art. 223 noch:

$$\left.\begin{array}{l}
\cos.(1.\bar{x}) = \cos.(1.y).\cos.(\bar{x}.y)+\cos.(1.z).\cos.(\bar{x}.z); \\
\cos.(1.\bar{y}) = \cos.(1.x).\cos.(\bar{y}.x)+\cos.(1.z).\cos.(\bar{y}.z); \\
\cos.(1.\bar{z}) = \cos.(1.x).\cos.(\bar{z}.x)+\cos.(1.y).\cos.(\bar{z}.y);
\end{array}\right\} . \quad (7)$$

u. s. w.

Aus den Gl. (5) des gegenwärtigen Art. leitet man nachstehende Relationen ab:

$$\left.\begin{array}{l}\sin.(1.\bar{x}).\cos.(I.x) = \sin.(1.\bar{x}).\cos.(II.x); \\ \sin.(1.\bar{y}).\cos.(I.y) = \sin.(1.\bar{y}).\cos.(II.y); \\ \sin.(1.\bar{z}).\cos.(I.z) = \sin.(1.\bar{z}).\cos.(II.z);\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (8)$$

in welchen Gleichungen man den ersten Fundamentalsatz der sphärischen Trigonometrie wieder erkennt.

Wir wenden uns nun zur weitern Entwicklung der in den Gl. (4) enthaltenen Sätze. Diese Gleichungen geben unmittelbar:

$$\cos.(1'.\bar{z}) = \frac{\cos.(1.x).\cos.(\bar{z}.x) + \cos.(1.y).\cos.(\bar{z}.y)}{\sin.(1.z)};$$

$$\cos.(1''.\bar{y}) = \frac{\cos(1.x).\cos.(\bar{y}.x) + \cos.(1.z).\cos.(\bar{y}.z)}{\sin.(1.y)};$$

$$\cos.(1'''.\bar{x}) = \frac{\cos.(1.y).\cos.(\bar{x}.y) + \cos.(1.z).\cos.(\bar{x}.z)}{\sin.(1.x)};$$

u. s. w.

d. i.

$$\left.\begin{array}{l}\cos.(1'.\bar{z}) = \dfrac{\cos.(1.\bar{z})}{\sin.(1.z)}; \quad \cos.(1''.\bar{y}) = \dfrac{\cos.(1.\bar{y})}{\sin.(1.y)}; \\ \cos.(1'''.\bar{x}) = \dfrac{\cos.(1.\bar{x})}{\sin.(1.x)}\end{array}\right\} \quad (9)$$

Die Gleichungen (5) geben ferner:

$$\left.\begin{array}{l}\sin.(1'.\bar{z}) = -\dfrac{\mathrm{tg}.(I.z)}{\mathrm{tg}.(1.z)}; \\ \sin.(1''.\bar{y}) = -\dfrac{\mathrm{tg}.(I.y)}{\mathrm{tg}(1.y)}; \\ \sin.(1'''.\bar{x}) = -\dfrac{\mathrm{tg}.(I.x)}{\mathrm{tg}.(1.x)};\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Diese Gl. (9) (10) enthalten bekannte Relationen zwischen den Seiten und Winkeln eines rechtwinklichten sphärischen Dreieckes. Aehnliche Formeln lassen sich weiter aus den übrigen Gl. (5) (6) (7) Art. 223 herleiten. Davon zeige ich nur folgende an:

$$\left.\begin{aligned}
\text{tg.}(1'.z) &= \frac{\sin.(I.z)}{\sin.(I.x).\text{tg.}(1'''.z)-\sin.(I.y).\,\text{tg.}(1''.z)};\\
\text{tg.}(1''.\bar{y}) &= \frac{\sin.(I.y)}{\sin.(I.x).\text{tg.}(1'''.y)-\sin.(I.z).\text{tg.}(1'.y)};\\
\text{tg.}(1'''.\bar{x}) &= \frac{\sin.(I.x)}{\sin.(I.y).\text{tg.}(1''.x)-\sin.(I.z).\text{tg.}(1'.x)};
\end{aligned}\right\}\ (11)$$

u. s. w.

Die Gl. (8) Art. 223 gewähren endlich noch nachfolgende.

$$\left.\begin{aligned}
\sin.(1'.I) &= -\frac{\cos.(I.z)}{\text{tg.}(1.z)};\\
\sin.(1''.I) &= -\frac{\cos.(I.y)}{\text{tg.}(1.y)};\\
\sin.(1'''.I) &= -\frac{\cos.(I.x)}{\text{tg.}(1.x)};
\end{aligned}\right\}\ \ldots\ (12)$$

Auch die Ausdrücke (1) (2) (3) u. s. w. des Art. 224 liefern einige sehr interessante Relationen. So z. B. geben die Gl. (1):

$$\left.\begin{aligned}
\cos.(\bar{x}.\bar{\bar{x}}) &= \cos.(\bar{x}.z).\cos.(\bar{\bar{x}}.z)+\cos.(\bar{x}.y).\cos.(\bar{\bar{x}}.y);\\
\cos.(\bar{y}.\bar{\bar{y}}) &= \cos.(\bar{y}.z).\cos.(\bar{\bar{y}}.z)+\cos.(\bar{y}.x).\cos.(\bar{\bar{y}}.x);\\
\cos(\bar{z}.\bar{\bar{z}}) &= \cos.(\bar{z}.y).\cos.(\bar{\bar{z}}.y)+\cos.(\bar{z}.x).\cos.(\bar{\bar{z}}.x);
\end{aligned}\right\}\ (13)$$

Ferner die Gl. (2) desselben Art.:

$$\left.\begin{aligned}
\sin.(\bar{x}.\bar{\bar{x}}) &= \{\cos.(\bar{\bar{x}}.z).\cos.(\bar{x}.y)-\cos.(\bar{x}.z).\cos.(\bar{\bar{x}}.y)\};\\
\sin.(\bar{y}.\bar{\bar{y}}) &= \{\cos.(\bar{y}.x).\cos.(\bar{y}.z)-\cos.(\bar{y}.x).\cos.(\bar{\bar{y}}.z)\};\\
\sin.(\bar{z}.\bar{\bar{z}}) &= \{\cos.(\bar{\bar{z}}.y).\cos.(\bar{z}.x)-\cos.(\bar{z}.y).\cos.(\bar{\bar{z}}.x)\};
\end{aligned}\right\}\ (14)$$

Endlich geben die Gl. (3) Art. 224:

$$\text{tg.}(\bar{x}.\bar{\bar{x}}) = \frac{(A)}{M-A'A''} = \frac{V.\cos.(1.x)}{P'.P''.\cos.(I.II)-A'A''}\ \text{d. i.}$$

$$\text{tg.}(\bar{x}.\bar{\bar{x}}) = \frac{\cos.(1.x).\dfrac{V}{P'.P''}}{\cos.(I.II)-\dfrac{A'.A''}{P'.P''}} = \frac{\cos.(1.x).\sin.(I.II)}{\{\text{cs.}(I.II)-\sin.(I.x)\sin.(II.x)\}}$$

daher:

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{tg.}(\bar{x}.\,\bar{\bar{x}}) &= \frac{\cos.(1.x).\sin.(I.II)}{\cos.(I.II)-\sin.(I.x).\sin.(II.x)};\\
\operatorname{tg.}(\bar{y}.\,\bar{\bar{y}}) &= \frac{\cos.(1.y).\sin.(I.II)}{\cos.(I.II)-\sin.(I.y).\sin.(II.y)};\\
\operatorname{tg.}(\bar{z}.\,\bar{\bar{z}}) &= \frac{\cos.(1.z).\sin.(I.II)}{\cos.(I.II)-\sin.(I.z).\sin.(II.z)};
\end{aligned}\right\} \quad . \quad (15)$$

Uebrigens wird es, ohne mein Erinnern, von selbst einleuchten, dass Verbindungen zwischen den hier statt habenden Relationen, deren es wieder eine grosse Mannigfaltigkeit giebt, neue, zum Theil sehr merkwürdige und symmetrische, Relationen erzeugen können.

226. Die Relationen, welche wir bisher entwickelt haben, sind ganz allgemein, und gelten für alle Ebenen, sie mögen unter welchen Winkeln immer gegeneinander geneigt seyn. Itzt aber wollen wir einen besonders merkwürdigen Fall in eine nähere Betrachtung ziehen. Wir werden nemlich annehmen, dass die zwei Ebenen, welche man übrigens sich durch den Anfangspunkt der Coordinaten gelegt denken kann, **senkrecht** auf einander stehen, so dass

$$A'A''+B'B''+C'C''=0.$$

Stellt man sich, durch den Anfangspunkt der Coordinaten eine dritte Ebene gelegt vor, welche auf der Durchschnittslinie jener zwei Ebenen senkrecht steht, und nimmt man an, dass ihre Gleichung sey:

$$A'''.x+B'''.y+C'''.z=0;$$

dann findet man, Art. 218:

$$A'''=(A);\quad B'''=(B);\quad C'''=(C).$$

Um Kürze mit gehöriger Deutlichkeit zu vereinen, wollen wir folgende Bezeichnungen festsetzen:

$$\left.\begin{aligned}
B'C''-B''C' &= A_{III}\\
A''C'-A'C'' &= B_{III}\\
A'B''-A'B'' &= C_{III}
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
B'''C'-B'C''' &= A_{II}\\
A'C'''-A'''C' &= B_{II}\\
A'''B'-A'B''' &= C_{II}
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} B''C'''-B'''C'' &= A_{,} \\ A'''C''-A''C''' &= B_{,} \\ A''B'''-A'''B'' &= C_{,} \end{aligned}\right\}$$

Ferner:

$$\left.\begin{aligned} A'^2+B'^2+C'^2 &= P'^2; \\ A''^2+B''^2+C''^2 &= P''^2; \\ A'''^2+B'''^2+C'''^2 &= P'''^2; \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} A_{,}^2+B_{,}^2+C_{,}^2 &= V'^2; \\ A_{,,}^2+B_{,,}^2+C_{,,}^2 &= V''^2; \\ A_{,,,}^2+B_{,,,}^2+C_{,,,}^2 &= V'''^2; \end{aligned}\right\}$$

Die Ebene, welche auf den beiden gegebenen *I II* senkrecht steht, wollen wir die Ebene *III* nennen; die Durchschnittslinie dieser Ebene *III* mit *II* soll die Linie 1; die der Ebenen *III* und *I* die Linie 2; endlich die Durchschnittslinie der Ebenen *I II* die Linie 3 heissen.

Weil nun alle diese drei Ebenen gegenseitig auf einander senkrecht stehen, so werden es auch die Durchschnittslinien derselben 1, 2, 3 seyn. Es ist daher nicht bloss

$$A'A'' + B'B'' + C'C'' = 0,$$

sondern auch $A'A''' + B'B''' + C'C''' = 0,$

und $A''A''' + B''B''' + C''C''' = 0,$

Unter diesen Voraussetzungen wollen wir nun die Ausdrücke für die Sinusse, Cosinusse und Tangenten der Winkel suchen, so die Linien 1, 2, 3 und ihre Projektionen in den coordinirten Ebenen mit den Knotenlinien der Ebenen *I*, *II*, *III* und mit den coordinirten Achsen machen, und welche diese Ebenen mit den coordinirten Ebenen bilden. Es ist zuerst:

$$\left.\begin{aligned} \cos.(I.yz) &= \frac{A'}{P'}; \; \cos.(II.yz) = \frac{A''}{P''}; \; \cos.(III.yz) = \frac{A'''}{P'''}; \\ \cos.(I.xz) &= \frac{B'}{P'}; \; \cos.(II.xz) = \frac{B''}{P''}; \; \cos.(III.xz) = \frac{B'''}{P'''}; \\ \cos.(I.xy) &= \frac{C'}{P'}; \; \cos.(II.xy) = \frac{C''}{P''}; \; \cos.(III.xy) = \frac{C'''}{P'''}; \end{aligned}\right\} (1)$$

Zum Behufe der Reduktionen, welche man mit den übrigen Formeln der analytischen Geometrie hier vorzunehmen hat, will ich einige der nothwendigsten Relationen zwischen $A'A''$ etc. und $A_{,}A_{,,}$. . . anführen, und in nachstehender Tafel zusammenstellen:

$$(A'B_{,,}-B_{,}A_{,,})=\frac{C_{,,,}V''^2}{A_{,,}A_{,,,}};\quad (B'A_{,,,}-A'B_{,,,})=\frac{C_{,,}V'''^2}{A_{,,}A_{,,,}};$$
$$(C'A_{,,}-A'C_{,,})=\frac{B_{,,,}V''^2}{A_{,,}A_{,,,}};\quad (A'C_{,,,}-C'A_{,,,})=\frac{B_{,,}V'''^2}{A_{,,}A_{,,,}};$$
$$(B'C_{,,}-C'B_{,,})=\frac{A_{,,,}V''^2}{A_{,,}A_{,,,}};\quad (C'B_{,,,}-B'C''')=\frac{A_{,,}V'''^2}{A_{,,}A_{,,,}};$$
$$(B''A_{,}-A''B_{,})=\frac{C_{,,,}V'^2}{A_{,}A_{,,,}};\quad (A''B_{,,,}-B''A_{,,,})=\frac{C_{,}V'''^2}{A_{,}A_{,,,}};$$
$$(A''C_{,}-C''A_{,})=\frac{B_{,,,}V'^2}{A_{,}A_{,,,}};\quad (C''A_{,,,}-A''C_{,,,})=\frac{B_{,}V'''^2}{A_{,}A_{,,,}};$$
$$(C''B_{,}-B''C_{,})=\frac{A_{,,,}V'^2}{A_{,}A_{,,,}};\quad (B''C_{,,,}-C''B_{,,,})=\frac{A_{,}V'''^2}{A_{,}A_{,,,}};$$
$$(A'''B_{,}-B'''A_{,})=\frac{C_{,,}V'^2}{A_{,}A_{,,,}};\quad (B'''A_{,,}-A'''B_{,,})=\frac{C_{,}V''^2}{A_{,}A_{,,}};$$
$$(C'''A_{,}-A'''C_{,})=\frac{B_{,,}V'^2}{A_{,}A_{,,}};\quad (A'''C_{,,}-C'''A_{,,})=\frac{B_{,}V''^2}{A_{,}A_{,,}};$$
$$(B'''C_{,}-C'''B_{,})=\frac{A_{,,}V'^2}{A_{,}A_{,,}};\quad (C'''B_{,,}-B'''C_{,,})=\frac{A_{,}V''^2}{A_{,}A_{,,}};$$

Mit Rücksicht auf diese Relationen findet man nun:

$$\left.\begin{aligned}
\cos.(1.\bar{\bar{x}}) &= +\frac{A_{,,,}V'}{A_{,}A_{,,,}\sqrt{B''^2+C''^2}};\\
\cos.(1.\bar{\bar{y}}) &= -\frac{B_{,,,}V'}{A_{,}A_{,,,}\sqrt{A''^2+C''^2}};\\
\cos.(1.\bar{\bar{z}}) &= +\frac{C_{,,,}V'}{A_{,}A_{,,,}\sqrt{A''^2+B''^2}};\\
\cos.(1.\bar{\bar{\bar{x}}}) &= -\frac{A_{,,}V'}{A_{,}A_{,,}\sqrt{B'''^2+C'''^2}};\\
\cos.(1.\bar{\bar{\bar{y}}}) &= +\frac{B_{,,}V'}{A_{,}A_{,,}\sqrt{A'''^2+C'''^2}};\\
\cos.(1.\bar{\bar{\bar{z}}}) &= -\frac{C_{,,}V'}{A_{,}A_{,,}\sqrt{A'''^2+B'''^2}};
\end{aligned}\right\}\quad . \; . \quad (2)$$

Aehnliche Formeln erhält man für die Cosinusse der Winkel, welche die Linien 2, 3 mit den Knotenlinien der drei Ebenen machen. Ferner ist:

$$\left.\begin{aligned}
\sin.(1.\bar{x}) &= \frac{A_{,}V'''}{A_{,}A_{,,,}.\sqrt{B''^2+C''^2}};\\
\sin.(1.\bar{y}) &= \frac{B_{,}V'''}{A_{,}A_{,,,}.\sqrt{A''^2+C''^2}};\\
\sin.(1.\bar{z}) &= \frac{C_{,}V'''}{A_{,}A_{,,,}.\sqrt{A''^2+B''^2}};\\
\sin.(1.\bar{\bar{x}}) &= \frac{A_{,}V''}{A_{,}A_{,,}.\sqrt{B'''^2+C'''^2}};\\
\sin.(1.\bar{\bar{y}}) &= \frac{B_{,}V''}{A_{,}A_{,,}.\sqrt{A'''^2+C'''^2}};\\
\sin.(1.\bar{\bar{z}}) &= \frac{C_{,}V''}{A_{,}A_{,,}.\sqrt{A'''^2+B'''^2}};
\end{aligned}\right\} \ldots (3)$$

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{tg}.(1.\bar{x}) &= +\frac{A_{,}V'''}{A_{,,,}V'};\ \mathrm{tg}.(1.\bar{\bar{x}}) = -\frac{A_{,}V''}{A_{,,}V'};\\
\mathrm{tg}.(1.\bar{y}) &= -\frac{B_{,}V'''}{B_{,,,}V'};\ \mathrm{tg}.(1.\bar{\bar{y}}) = +\frac{B_{,}V''}{B_{,,}V'};\\
\mathrm{tg}.(1.\bar{z}) &= +\frac{C_{,}V'''}{C_{,,,}V'};\ \mathrm{tg}.(1.\bar{\bar{z}}) = -\frac{C_{,}V''}{C_{,,}V'};
\end{aligned}\right\} . \quad (4)$$

u. s. w. u. s. w.

$$\left.\begin{aligned}
\cos.(1'.\bar{z}) &= \frac{+C_{,,,}V'^2}{A_{,}A_{,,,}.\sqrt{A_{,}^2+B_{,}^2}.\sqrt{A''^2+B''^2}};\\
\cos.(1''.\bar{y}) &= \frac{-B_{,,,}V'^2}{A_{,}A_{,,,}.\sqrt{A_{,}^2+C_{,}^2}.\sqrt{A''^2+C''^2}};\\
\cos.(1'''.\bar{x}) &= \frac{+A_{,,,}V'^2}{A_{,}A_{,,,}.\sqrt{B_{,}^2+C_{,}^2}.\sqrt{B''^2+C''^2}};
\end{aligned}\right\} (5)$$

$$\left.\begin{aligned}
\cos.(1'.\bar{\bar{z}}) &= \frac{-C_{,,}V'^2}{A_{,}A_{,,}.\sqrt{A_{,}^2+B_{,}^2}.\sqrt{A'''^2+B'''^2}};\\
\cos.(1''.\bar{\bar{y}}) &= \frac{+B_{,,}V'^2}{A_{,}A_{,,}.\sqrt{A_{,}^2+C_{,}^2}.\sqrt{A'''^2+C'''^2}};\\
\cos.(1'''.\bar{\bar{x}}) &= \frac{-A_{,,}V'^2}{A_{,}A_{,,}.\sqrt{B_{,}^2+C_{,}^2}.\sqrt{B'''^2+C'''^2}};
\end{aligned}\right\} (6)$$

u. s. w.

Für die Cosinusse der Winkel, welche die Projektionen der andern zwei Durchschnittslinien 2, 3 mit den Knotenlinien machen, findet man ähnliche Ausdrücke.

Zur Bestimmung der Sinusse dieser Winkel findet man die Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned}
\sin.(1'.\bar{z}) &= -\frac{C''C_{,}}{\sqrt{A''^2+B''^2}.\sqrt{A_{,}^2+B_{,}^2}};\\
\sin.(1''.\bar{y}) &= -\frac{B''B_{,}}{\sqrt{A''^2+C''^2}.\sqrt{A_{,}^2+C'^2}};\\
\sin.(1'''.\bar{x}) &= -\frac{A''A_{,}}{\sqrt{B''^2+C''^2}.\sqrt{B_{,}^2+C_{,}^2}};
\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ (7)$$

$$\left.\begin{aligned}
\cos.(1'.\bar{\bar{z}}) &= -\frac{C'''C_{,}}{\sqrt{A'''^2+B'''^2}.\sqrt{A_{,}^2+B'^2}};\\
\cos.(1''.\bar{\bar{y}}) &= -\frac{B'''B_{,}}{\sqrt{A'''^2+C'''^2}.\sqrt{A_{,}^2+C_{,}^2}};\\
\cos.(1'''.\bar{\bar{x}}) &= -\frac{A'''A_{,}}{\sqrt{B'''^2+C'''^2}.\sqrt{B_{,}^2+C_{,}^2}};
\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ (8)$$

u. s. w.

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{tg}.(1'.\bar{z}) &= -\left(\frac{A_{,}A_{,,,}}{V'^2}\right).\frac{C''C_{,}}{C_{,,,}};\\
\mathrm{tg}.(1''.\bar{y}) &= -\left(\frac{A_{,}A_{,,,}}{V'^2}\right).\frac{B''B_{,}}{B_{,,,}};\\
\mathrm{tg}.(1'''.\bar{x}) &= -\left(\frac{A_{,}A_{,,,}}{V'^2}\right).\frac{A'''A_{,}}{A_{,,,}};\\
\mathrm{tg}.(1'.\bar{\bar{z}}) &= +\left(\frac{A_{,}A_{,,,}}{V'^2}\right).\frac{C'''C_{,}}{C_{,,}};\\
\mathrm{tg}.(1''.\bar{\bar{y}}) &= -\left(\frac{A_{,}A_{,,,}}{V'^2}\right).\frac{B'''B_{,}}{B_{,,}};\\
\mathrm{tg}.(1'''.\bar{\bar{x}}) &= +\left(\frac{A_{,}A_{,,,}}{V'^2}\right).\frac{A'''A_{,}}{A_{,,}};
\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ (9)$$

Wie man nun mit Beihülfe dieser Formeln das Problem von der Transformation der rechtwinklichten Coordinaten auf

eine sehr einfache und allgemeine Weise auflösen könne, lehrt das Art. 207 gezeigte Verfahren.

Bestimmung der Lage einer Ebene gegen eine andere, wenn die Lagen dieser beiden Ebenen gegen ein rechtwinklichtes Coordinaten-System bestimmt sind.

227. Es seyen die Lagen zweier Ebenen gegen ein coordinirtes Achsen-System xyz gegeben, und ihre Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} A'.x+B'.y+C'.z=0 \\ A''.x+B''.y+C''.z=0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (a)$$

beide Ebenen gehen folglich durch den Anfangspunkt der Coordinaten.

Wir wollen itzt die Durchschnittslinien dieser zwei Ebenen I, II zur Achse der X annehmen, in der Ebene I, senkrecht auf X durch den Anfangspunkt der Coordinaten eine Gerade ziehen, welche wir zur Achse der Y annehmen wollen; endlich ziehe man, gleichfalls durch den Anfangspunkt, auf diese beiden Achsen senkrecht, die dritte Gerade, welche zur Achse der Z angenommen werden soll. Die Aufgabe, deren Auflösung wir uns hier vorgesetzt haben, besteht nun darin, die Gleichung der Ebene II gegen dieses neue Achsensystem XYZ zu finden.

Dieses Problem lässt sich auf mehr als eine Art auflösen, wozu die schon gefundenen Ausdrücke der analytischen Geometrie die einfachsten Mittel liefern.

Die Gleichung der Ebene II gegen das System der Coordinaten XYZ, oder kürzer, gegen die Ebene I wird nun folgende Gestalt haben:

$$R.X+S.Y+T.Z=0 \quad \ldots\ldots (b)$$

Alles reduzirt sich nun darauf, RST in Funktionen der gegebenen Grössen $A'A''B'B''C'C''$ auszudrücken.

Da die Ebene II durch die Achse der X geht, so wird man schon im Voraus schliessen, dass

$$R=0$$

seyn wird. Zur Bestimmung der Funktionen ST drücken wir erstlich die Coordinaten xyz in Funktionen der Coordinaten XYZ, mittelst der Formeln der Transformation aus. Man hat nun:

$$\left.\begin{array}{l} x = X.\cos(x.X) + Y.\cos.(x.Y) + Z.\cos.(x.Z); \\ y = X.\cos.(y.X) + Y.\cos.(y.Y) + Z.\cos.(y.Z); \\ z = X.\cos.(z.X) + Y.\cos.(z.Y) + Z.\cos.(z.Z); \end{array}\right\} . (c)$$

Um die Cosinusse der Winkel zu finden, welche die neuen Achsen XYZ mit den ursprünglichen xyz machen, hat man nur nöthig, die Gleichungen der Linie XYZ in Bezug auf das Achsen-System xyz zu suchen. Es ist aber aus dem Vorhergehenden klar, dass, wenn man die im Art. 226 festgesetzten Bezeichnungen beibehält, diese Gleichungen für die Achse der X seyn werden:

$$\left.\begin{array}{l} y = \frac{B_{\prime\prime\prime}}{A_{\prime\prime\prime}}.x \\ z = \frac{C_{\prime\prime\prime}}{A_{\prime\prime\prime}}.x \end{array}\right\}$$

folglich:

$$\cos.(x.X) = \frac{A_{\prime\prime\prime}}{V^{\prime\prime\prime}};\ \cos.(y.X) = \frac{B_{\prime\prime\prime}}{V^{\prime\prime\prime}};\ \cos.(z.X) = \frac{C_{\prime\prime\prime}}{V^{\prime\prime\prime}};$$

Die Gleichungen der Achse Y sind:

$$\left.\begin{array}{l} y = \left(\frac{B'M''' - B''P'^2}{A'M''' - A''P'^2}\right)x \\ z = \left(\frac{C'M''' - C''P'^2}{A'M''' - A''P'^2}\right)x \end{array}\right\}$$

oder $y = \left(\frac{C'A_{\prime\prime\prime} - A'C_{\prime\prime\prime}}{B'C_{\prime\prime\prime} - C'B_{\prime\prime\prime}}\right)x$; $z = \left(\frac{A'B_{\prime\prime\prime} - B'A_{\prime\prime\prime}}{B'C_{\prime\prime\prime} - C'B_{\prime\prime\prime}}\right)x.$

Schreibt man der Kürze wegen:

$$\left.\begin{array}{l} y = \frac{(B_{\prime\prime})}{(A_{\prime\prime})}.x \\ z = \frac{(C_{\prime\prime})}{(A_{\prime\prime})}.x \end{array}\right\}$$

so folgt:

$$\cos.(x.Y) = \frac{(A_{\prime\prime})}{(V'')};\ \cos.(y.Y) = \frac{(B_{\prime\prime})}{(V'')};\ \cos.(z.Y) = \frac{(C_{\prime\prime})}{(V'')}.$$

Da endlich die Gleichungen der Achsen Z sind:

$$\left.\begin{array}{l} y = \frac{B'}{A'}.x \\ z = \frac{C'}{A'}.y \end{array}\right\}$$

so hat man:

$$\cos.(x.Z) = \frac{A'}{P'};\ \cos.(y.Z) = \frac{B'}{P'};\ \cos.(z.Z) = \frac{C'}{P'}.$$

Sind nun xyz die Coordinaten eines Punktes in der Ebene II; so ist

$$A''x + B''y + C''z = 0.$$

Setzt man in diese Gleichung die Werthe von xyz aus den Gl. (c); so bekömmt man:

$$R = \{A''.\cos.(x.X) + B''.\cos.(y.X) + C''.\cos.(z.X)\};$$
$$S = \{A''.\cos.(x.Y) + B''.\cos.(y.Y) + C''.\cos.(z.Y)\};$$
$$T = \{A''.\cos.(x.Z) + B''.\cos.(y.Z) + C''.\cos.(z.Z)\};$$

Setzt man in diesen Ausdrücken die für die Cosinusse gefundenen Werthe; so hat man:

$$R = \left\{\frac{A''A_{\prime\prime\prime} + B''B_{\prime\prime\prime} + C''C_{\prime\prime\prime}}{V'''}\right\};$$

$$S = \left\{\frac{A''(A_{\prime\prime}) + B''(B_{\prime\prime}) + C''(C_{\prime\prime})}{(V'')}\right\};$$

$$T = \left\{\frac{A'A'' + B'B'' + C'C''}{P'}\right\}.$$

Nun zeigt die Rechnung, dass

$$A''A_{\prime\prime\prime} + B''B_{\prime\prime\prime} + C''C_{\prime\prime\prime} = 0;$$
$$A''A_{\prime\prime} + B''B_{\prime\prime} + C''C_{\prime\prime} = -V'''^2;$$

und da: $A'A'' + B'B'' + C'C'' = M'''$;

so wird $R = 0;\ S = -\frac{V'''^2}{(V'')};\ T = \frac{M'''}{P'}.$

Weil aber

$$(V'')^2 = (A'M''' - A''P'^2)^2 + (B'M''' - B''P'^2)^2 + (C'M''' - C''P'^2)^2;$$

d. i. $(V'')^2 = (P'^2P''^2 - M'''^2).P'^2$ oder $(V'') = P'.\sqrt{P'^2P''^2 - M'''^2}$.

so findet man hieraus nach einigen Reduktionen:

$$(V'') = P'.V'''.$$

Sonach ist $S = -\frac{V'''}{P'}$, und die Gleichung der Ebene *II* gegen die Ebene *I* wird werden:

$$-V'''.Y + M'''.Z = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (d)$$

228. Wir haben im vorhergehenden Art. die Durchschnittslinie der Ebenen *I*, *II* zur Achse der X angenommen; man könnte aber eben sowohl auch die Knotenlinie der Ebene *I* oder die Durchschnittslinie der Ebene *I* mit der coordinirten Ebene xy zur Achse der X, die in der Ebene *I* auf X senkrecht gezogene Gerade zur Achse der Y, und die auf XY senkrechte Linie zur Achse der Z annehmen. Unter dieser Voraussetzung werden, wenn:

$$R.X + S.Y + T.Z = 0$$

die Gleichung der Ebene *II* gegen dieses Achsensystem XYZ ist, die Grössen RST andere Werthe erhalten.

Da nun die Gleichungen der drei Achsen, und zwar die Gl. der Achse X sind: $\left.\begin{array}{l} y = -\frac{A'}{B'}.x; \\ z = 0; \end{array}\right\}$

. . . . Y . . $\left.\begin{array}{l} y = \frac{B'}{A'}.x; \\ z = -\left(\frac{A'^2+B'^2}{A'.C'}\right)x \end{array}\right\}$

. . . . Z . . $\left.\begin{array}{l} y = \frac{B'}{A'}.x; \\ z = \frac{C'}{A'}.x; \end{array}\right\}$

so hat man, gemäss der allgemeinen Formeln (1) Art. 89:

$$\cos.(x.X) = \frac{B'}{\sqrt{A'^2+B'^2}}; \; \cos.(y.X) = \frac{-A'}{\sqrt{A'^2+B'^2}}; \; \cos.(z.X) = 0;$$

$$\cos.(x.Y) = \frac{A'.C'}{P'.\sqrt{A'^2+B'^2}}; \quad \cos.(y.Y) = \frac{B'.C'}{P'.\sqrt{A'^2+B'^2}};$$

$$\cos.(z.Y) = -\frac{\sqrt{A'^2+B'^2}}{P'};$$

$$\cos.(x.Z) = \frac{A'}{P'}; \quad \cos.(y.Z) = \frac{B'}{P'}, \quad \cos.(z.Z) = \frac{C'}{P'}.$$

Nun ist:

$$\cos.(z.x) = \frac{B'}{\sqrt{A'^2+B'^2}}; \quad \sin.(z.x) = \frac{-A'}{\sqrt{A'^2+B'^2}};$$

$$\cos.(I.xy) = \frac{C'}{P'}; \quad \sin.(I.xy) = -\frac{\sqrt{A'^2+B'^2}}{P'};$$

Man findet also:

$$x = \{X.\cos.(z.x) - Y.\sin.(z.x).\cos.(I.xy + Z.\sin.(I.xy).\sin.(z.x)\}$$
$$y = \{X.\sin.(z.x) + Y.\cos.(z.x).\cos.(I.xy) - Z.\sin.(I.xy).\cos.(z.x)\}$$
$$z = \{Y.\sin.(I.xy) + Z.\cos.(I.xy)\}.$$

Diese Formeln ergeben sich auch unmittelbar aus Gl. (2) Art. 62, wenn man dort

anstatt	$x_{,}$	$y_{,}$	$z_{,}$	φ	ψ	ϑ
setzt	X	Y	Z	0	$360^0-(z.x)$	$360^0-(I.xy)$

Man erhält also:

$$\left.\begin{aligned} R &= \frac{A''.B' - A'.B''}{\sqrt{A'^2+B'^2}}; \\ S &= \frac{A'.B_{,,,} - B'.A_{,,,}}{P'.\sqrt{A'^2+B'^2}}; \\ T &= \frac{M'}{P'}; \end{aligned}\right\}$$

oder:

$$\left.\begin{aligned} R &= A''.\cos.(z.x) + B''.\sin.(z.x); \\ S &= -A''\sin.(z.x)\cos.(I.xy) + B''\cos.(z.x)\cos(I.xy) + C''\sin(I.xy) \\ T &= A''\sin.(I.xy)\sin.(z.x) - B''\sin.(I.xy)\cos.(z.x) + C''\cos(I.xy) \end{aligned}\right\}$$

Die Ausdrücke, womit uns die analytische Geometrie versieht, setzen uns gleichfalls wieder in den Stand, die Winkel,

welche aus den Beziehungen der Ebene II gegen das Achsensystem XYZ entspringen, durch diejenigen Winkel auszudrücken, welche die Lagen der Ebenen I und II gegen das ursprüngliche System der Achsen xyz bestimmen, und umgekehrt. Wir werden einige der vorzüglichsten Formeln hier anführen. Es ist leicht einzusehen, dass:

$$\cos.(II.xy) = \frac{S.\sin.(I.xy) + T.\cos.(I.xy)}{\sqrt{R^2+S^2+T^2}} \quad . \quad . \quad (1)$$

denn der Zähler reduzirt sich nach gehöriger Substitution auf C'', und da:

$$(R^2+S^2+T^2) = (A''^2+B''^2+C''^2),$$

so folgt:

$$\cos.(II.xy) = \frac{C''}{\sqrt{A''^2+B''^2+C''^2}},$$

wie bekannt ist.

Ferner hat man:

$$\cos.(II.XY) = \frac{T}{\sqrt{R^2+S^2+T^2}}; \qquad \frac{R}{S} = -\operatorname{tg}.(\bar{Z}.X);$$

$$\frac{R}{T} = \operatorname{tg}.(II.XY).\sin.(\bar{Z}.X); \quad \frac{S}{T} = -\operatorname{tg}.(II.XY).\cos.(\bar{Z}.X);$$

u. s. w.

$$\cos.(II.xy) =$$
$$\cos.(I.xy).\cos.(II.XY) - \sin.(I.xy).\sin.(II.XY)\cos.(\bar{Z}.X);$$

$$\cos.(II.xz) = \left\{\begin{array}{l}\sin.(II.XY).\sin.(\bar{Z}.X).\sin.(z.x) \\ -[\sin(I.xy)\mathrm{cs}(II.xy) + \mathrm{cs}(I.xy)\sin(II.XY)]\mathrm{cs}(z.x)\end{array}\right\}$$

$$\cos.(II.yz) = \left\{\begin{array}{l}\sin.(II.XY).\sin.(\bar{Z}.X).\cos.(z.x) \\ +[\sin(I.xy)\mathrm{cs}(II.xy) + \mathrm{cs}(I.xy)\sin(II.XY)]\sin(z.x)\end{array}\right\}$$

Oder auch:

$$\cos.(II.xy) = \cos.(I.xy).\cos.(II.XY) - \sin.(I.xy).\cos.(II.xz)$$

$$\cos.(II.xz) = \cos.(II.YZ).\sin.(z.x)$$
$$-\cos(z.x)[\sin(I.xy)\mathrm{cs}(II.XY) + \mathrm{cs}(I.xy)\mathrm{cs}(II.XZ)]$$

$$\cos.(II.yz) = \cos.(II.YZ).\cos.(z.x)$$
$$+\sin(z.x)[\sin(I.xy)\mathrm{cs}.(II.XY) + \mathrm{cs}.(I.xy)\mathrm{cs}.(II.XZ)]$$

Umgekehrt findet man leicht:

$$\cos.(II.XY) = \{\cos.(I.xy).\cos.(II.xy) + \sin.(I.xy).\sin.(II.xy).\cos.(z.\bar{z})\};$$

$$\cos.(II.XZ) = \{\sin.(I.xy).\cos.(II.xy) - \cos.(I.xy).\sin.(II.xy).\cos.(z.\bar{z})\};$$

$$\cos.(II.YZ) = \{\sin.(II.xy).\sin.(z.\bar{z})\}.$$

Wir haben ferner:

$$\sin.(II.XY) = \frac{\sqrt{R^2+S^2}}{\sqrt{R^2+S^2+T^2}};$$

$$\sin.(\bar{Z}.X) = \frac{R}{\sqrt{R^2+S^2}};\ \cos.(\bar{Z}.X) = \frac{S}{\sqrt{R^2+S^2}};$$

Also ist:

$$\sin.(II.XY).\sin.(\bar{Z}.X) = \frac{R}{P''} = \left(\frac{A''.\cos.(z.x)+B''.\sin.(z.x)}{P''}\right)$$

$$\sin.(II.XY).\cos.(\bar{Z}.X) = \frac{S}{P''} =$$

$$\frac{-A''.\sin.(z.x).\cos.(I.xy)+B''.\cos.(I.xy)\cos.(z.x)+C''.\sin.(I.xy)}{P''}$$

Hieraus findet man:

$$\sin.(II.XY).\sin.(\bar{Z}.X) = \sin.(II.xy).\sin.(z.\bar{z});$$

$$\sin.(II.XY).\cos.(\bar{Z}.X) = \sin.(I.xy).\cos.(II.xy)-\cos.(I.xy).\sin.(II.xy).\cos.(z.\bar{z});$$

Eben so findet man:

$$\sin.(II.XZ).\sin.(\bar{Y}.Z) = \cos.(I.xy).\cos.(II.xy)+\sin.(I.xy).\sin.(II.xy).\cos.(z.\bar{z});$$

$$\sin.(II.XZ).\cos.(\bar{Y}.Z) = \sin.(II.xy).\sin.(z.\bar{z});$$

Und endlich:

$$\sin.(II.YZ).\sin.(\bar{X}.Y) = \sin.(I.xy).\cos.(II.xy)-\cos.(I.xy).\sin.(II.xy).\cos.(z.\bar{z});$$

$$\sin.(II.YZ).\sin.(\bar{X}.Y) = \cos.(I.xz).\cos.(II.xy)+\sin.(I.xy).\sin.(II.xy).\cos.(z.\bar{z}).$$

Es ist ferner: $\mathrm{tg}.(\bar{Z}.X) = -\frac{R}{S}$, u. s. w. d. h.

$$\operatorname{tg.}(\bar{Z}.X) = \frac{-(A''\cos.(\mathfrak{z}.x) + B''\sin.(\mathfrak{z}.x))}{-A''.\sin.(\mathfrak{z}.x).\cos.(I.xy) + B''\cos.(I.xy).\cos.(\mathfrak{z}.x) + C''\sin.(I.xy)}$$

und hieraus folgt:

$$\operatorname{tg.}(\bar{Z}.X) = \frac{\sin.(\mathfrak{z}.\bar{\mathfrak{z}})}{\cos.(I.xy).\cos.(\mathfrak{z}.\bar{\mathfrak{z}}) - \sin.(I.xy).\operatorname{tg.}(II.z)}$$

Eben so ist:

$$\operatorname{tg.}(\bar{Y}.Z) = \frac{\sin.(\mathfrak{z}.\bar{\mathfrak{z}})}{\sin.(I.xy).\cos.(\mathfrak{z}.\bar{\mathfrak{z}}) + \cos.(I.xy).\operatorname{tg.}(II.z)}$$

$$\operatorname{tg.}(\bar{X}.Y) = \left\{\frac{\cos.(I.xy).\cos.(\mathfrak{z}.\bar{\mathfrak{z}}) - \sin.(I.xy).\operatorname{tg.}(II.z)}{\sin.(I.xy).\cos.(\mathfrak{z}.\bar{\mathfrak{z}}) + \cos.(I.xy).\operatorname{tg.}(II.z)}\right\}$$

So könnte man fortfahren, und auch die Winkel $(1.x)$, $(1'.x)$. . . (wo 1 die Durchschnittlinie der Ebenen I, II ist) mit in diese mannigfachen Verbindungen aufnehmen, welche sich hier gleichsam von selbst darbiethen. Uiberhaupt lassen sich diese Relationen durch eine unzählige Menge anderer vermehren, und das Verfahren, welches dabei anzuwenden ist, bleibt eben dasselbe, als wir durchgängig bisher angewandt haben, um die interessantesten und wichtigsten Lehrsätze der Geometrie zu entwickeln.

Transformation der Gleichungen einer geraden Linie oder einer Ebene, wenn sie gegen ein zweites, der Lage nach bestimmtes, Achsen-System bezogen werden.

229. Wir wollen itzt das Problem, das wir in den vorigen Art. für zwei besondere Fälle aufgelöst haben, nun in seiner grössten Allgemeinheit lösen. Wenn nemlich gegen ein ursprüngliches Achsensystem xyz die Lage eines zweiten Achsensystems XYZ gegeben ist; wenn ferner die Lage einer geraden Linie oder einer Ebene gegen das erste System bekannt

ist; so entsteht die Frage: Welches sind die Gleichungen dieser Linie oder Ebene, wenn man sie gegen das zweite System bezieht? Bei dieser Transformation der Gleichungen einer Geraden oder einer Ebene kommen nun die Art. 226 gegebenen Ausdrücke in Anwendung.

Es seyen nun wieder:

$$\left.\begin{aligned} A'x + B'y + C'z &= 0; \\ A''x + B''y + C''z &= 0; \\ A'''x + B'''y + C'''z &= 0; \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (a)$$

respektive die Gleichungen der Ebenen YZ, XZ, XY; und es seyen:

$$\left.\begin{aligned} y &= ax + b; \\ z &= a_{,}x + b_{,}; \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (b)$$

die Gleichungen der gegebenen Geraden gegen das erste, und

$$\left.\begin{aligned} Y &= rX + t; \\ Z &= r_{,}X + t_{,}; \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (c)$$

die Gleichungen derselben Geraden gegen das zweite Achsensystem. Nun hat man:

$$\left.\begin{aligned} x &= X.\cos.(x.X) + Y.\cos.(x.Y) + Z.\cos.(x.Z); \\ y &= X.\cos.(y.X) + Y.\cos.(y.Y) + Z.\cos.(y.Z); \\ z &= X.\cos.(z.X) + Y.\cos.(z.Y) + Z.\cos.(z.Z); \end{aligned}\right\} . (A)$$

und umgekehrt:

$$\left.\begin{aligned} X &= x.\cos.(x.X) + y.\cos.(y.X) + z.\cos.(z.X); \\ Y &= x.\cos.(x.Y) + y.\cos.(y.Y) + z.\cos.(z.Y); \\ Z &= x.\cos.(x.Z) + y.\cos.(y.Z) + z.\cos.(z.Z); \end{aligned}\right\} . (B)$$

Zur Auflösung unsers Problems würden wir also, um die Cosinuse der Winkel zu finden, welche die neuen Achsen XYZ mit den ursprünglichen xyz machen, die Gleichungen jener Achsen gegen diese zu kennen nothwendig haben. Wenn man aber bemerkt, dass die Ebenen, welche wir Art. 226 die Ebenen I, II, III genannt haben, hier die Ebenen YZ, XZ, XY sind; so wird man aus der Gl. (1) dieses Art. unmittelbar finden:

$$\left.\begin{aligned}
\cos.(X.x) &= \frac{A'}{P'};\ \cos.(Y.x) = \frac{A''}{P''};\ \cos.(Z.x) = \frac{A'''}{P'''}\\
\cos.(X.y) &= \frac{B'}{P'};\ \cos.(Y.y) = \frac{B''}{P''};\ \cos.(Z.y) = \frac{B'''}{P'''}\\
\cos.(X.z) &= \frac{C'}{P'};\ \cos.(Y.z) = \frac{C''}{P''};\ \cos.(Z.z) = \frac{C'''}{P'''}
\end{aligned}\right\}$$

Substituirt man diese Ausdrücke in die Gl. (A) (B); so findet man:

$$\left.\begin{aligned}
x &= \left(\frac{A'X}{P'}+\frac{A''Y}{P''}+\frac{A'''Z}{P'''}\right)\\
y &= \left(\frac{B'X}{P'}+\frac{B''Y}{P''}+\frac{B'''Z}{P'''}\right)\\
z &= \left(\frac{C'X}{P'}+\frac{C''Y}{P''}+\frac{C'''Z}{P'''}\right)
\end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ (1)$$

und umgekehrt:

$$\left.\begin{aligned}
X &= \left(\frac{A'x + B'y + C'z}{P'}\right)\\
Y &= \left(\frac{A''x + B''y + C''z}{P''}\right)\\
Z &= \left(\frac{A'''x + B'''y + C'''z}{P'''}\right)
\end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ (2)$$

wo xyz und XYZ die Coordinaten eines Punktes sind, der in der gegebenen Geraden liegt.

Setzt man nun die Werthe von xyz aus diesen Gl. (1) in die gegebenen Gleichungen (b) der Geraden; so wird man haben:

$$\left.\begin{aligned}
\left(\frac{B'-A'a}{P'}\right)X + \left(\frac{B''-A''a}{P''}\right)Y + \left(\frac{B'''-A'''a}{P'''}\right)Z = b\\
\left(\frac{C'-A'a_{1}}{P'}\right)X + \left(\frac{C''-A''a_{1}}{P''}\right)Y + \left(\frac{C'''-A'''a_{1}}{P'''}\right)Z = b
\end{aligned}\right\} (d)$$

Setzt man aber die Werthe von XYZ aus den Gl. (2) in die gesuchten Gl. (c) der Geraden; so findet man:

$$\left.\begin{aligned}
\left(\frac{A''}{P''}-\frac{A'.r}{P'}\right)x + \left(\frac{B''}{P''}-\frac{B'r}{P'}\right)y + \left(\frac{C''}{P''}-\frac{C'r}{P'}\right)z = t\\
\left(\frac{A'''}{P'''}-\frac{A'.r_{1}}{P'}\right)x + \left(\frac{B'''}{P'''}-\frac{B'r_{1}}{P'}\right)y + \left(\frac{C'''}{P'''}-\frac{C'r_{1}}{P'}\right)z = t_{1}
\end{aligned}\right\} (e)$$

Es ist itzt nicht mehr schwer, $r t r_{,} t_{,}$ in Funktionen von $a b a_{,} b_{,}$ und umgekehrt, diese Grössen in Funktionen von jenen auszudrücken. Eliminirt man nemlich aus den Gl. (d) zuerst Z; so bleibt eine Gleichung zwischen XY; die Vergleichung dieser Relation mit der ersten der Gl. (c) giebt rt. Eliminirt man aber aus denselben Gl. (d) die Grösse Y; dann ist die resultirende Gleichung eine Relation zwischen XZ; hält man sie an die zweite der Gl. (c); so ergiebt sich $r_{,}t_{,}$. Auf ähnliche Art wird man die Gl. (e) behandeln. Nach gehörig angestellter Rechnung findet man aus den Gl. (d):

$$\left(\frac{A_{,}+B_{,}a+C_{,}a_{,}}{P''}\right)y = \left\{\begin{matrix}\left(\frac{A_{,,}+B_{,,}a+C_{,,}a_{,}}{P'}\right)x \\ +A'''(ab_{,}-a_{,}b)-B'''b_{,}+C'''b\end{matrix}\right\}$$

$$\left(\frac{A_{,}+B_{,}a+C_{,}a_{,}}{P'''}\right)z = \left\{\begin{matrix}\left(\frac{A_{,,,}+B_{,,,}a+C_{,,,}a_{,}}{P'}\right)x \\ -[A''(ab_{,}-a_{,}b)-B''b_{,}+C''b]\end{matrix}\right\}$$

Folglich ist:

$$\left.\begin{aligned} r &= \frac{P''}{P'}\cdot\left\{\frac{A_{,,}+B_{,,}a+C_{,,}a_{,}}{A_{,}+B_{,}a+C_{,}a_{,}}\right\} \\ r_{,} &= \frac{P'''}{P'}\cdot\left\{\frac{A_{,,,}+B_{,,,}a+C_{,,,}a_{,}}{A_{,}+B_{,}a+C_{,}a_{,}}\right\} \\ t &= P''.\left[\frac{A'''.(ab_{,}-a_{,}b)-B'''.b_{,}+C'''.b}{A_{,}+B_{,}a+C_{,}a_{,}}\right] \\ t_{,} &= -P'''.\left[\frac{A''.(ab_{,}-a_{,}b)-B''.b_{,}+C''.b}{A_{,}+B_{,}a+C_{,}a_{,}}\right]\end{aligned}\right\}. \quad (3)$$

Man könnte hieraus unmittelbar $a a_{,} b b_{,}$ durch $r r_{,} t t_{,}$ ausgedrückt finden; allein nachstehendes Verfahren ist viel einfacher. Man eliminire aus den Gl. (e) die Grösse z; so findet man:

$$[A_{,}P'+A_{,,}P''r+A_{,,,}P'''r_{,}].y = \left\{\begin{matrix}(B_{,}P'+B_{,,}P''r+B_{,,,}P'''r_{,}).x \\ -C'.P''P''.(rt_{,}-r_{,}t) \\ -C''.P'P'''.t+C'''.P'P''.t\end{matrix}\right\}$$

$$[A_{,}P'+A_{,,}P''r+A_{,,,}P'''r_{,}].y = \left\{\begin{matrix}(C_{,}P'+C_{,,}P''r+C_{,,,}P'''r_{,})x \\ -B'P''P''.(rt_{,}-r_{,}t) \\ +B''P'P'''t-B'''P'P''.t\end{matrix}\right\}$$

Folglich ist:

$$\left.\begin{aligned} a &= \left(\frac{B_{,}P' + B_{,,}P''r + B_{,,,}P'''r_{,}}{A_{,}P' + A_{,,}P''r + A_{,,,}P'''r_{,}}\right) \\ a_{,} &= \left(\frac{C_{,}P' + C_{,,}P''r + C_{,,,}P'''r_{,}}{A_{,}P' + A_{,,}P''r + A_{,,,}P'''r_{,}}\right) \\ b &= \left[\frac{C'.P''P'''.(rt_{,} - r_{,}t) - C''.P'P''.t + C'''.P'P''.t}{A_{,}P' + A_{,,}P''r + A_{,,,}P'''r_{,}}\right] \\ b_{,} &= -\left[\frac{B'.P''P'''.(rt_{,} - r_{,}t) - B''.P'P''.t + B'''.P'P''.t}{A_{,}P' + A_{,,}P''r + A_{,,,}P'''r_{,}}\right] \end{aligned}\right\} \cdot (4)$$

Mit Hilfe dieser allgemeinen Formeln ist man nun im Stande, alle Winkel, welche aus den Beziehungen der Geraden gegen das Achsensystem XYZ entspringen, in Funktionen derjenigen auszudrücken, welche die Lage der Geraden gegen das ursprüngliche Achsensystem xyz bestimmen; denn man hat die Sinuse, Cosinuse, Tangenten jener Winkel in Funktionen von $rr_{,}$; und diese in Funktionen von $aa_{,}$. Umgekehrt wird man ebenso die Winkel im ersten Systeme durch Winkel im zweiten ausdrücken können.

230. Endlich wollen wir noch die allgemeinen Gleichungen der Transformation der Gleichung einer Ebene geben.

Es sey daher:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; (a)$$

die Gleichung einer Ebene, in Bezug auf das erste Achsensystem xyz; und

$$R.X + S.Y + T.Z + Q = 0 \quad . \; . \; . \; . \; (b)$$

die transformirte Gleichung, oder die Gleichung derselben Ebene in Bezug auf das Achsensystem XYZ. Wir wollen nun die Funktionen suchen, durch welche die Grössen $QRST$ ausgedrückt werden.

Substituirt man die Ausdrücke für xyz aus den Gl. (1) des vorigen Art. in die Gl. (a) des gegenwärtigen, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{AA'+BB'+CC'}{P'}\right).X \\ +&\left(\frac{AA''+BB''+CC''}{P''}\right).Y \\ +&\left(\frac{AA'''+BB'''+CC'''}{P'''}\right)Z+D \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (A)$$

Setzt man aber die Ausdrücke für XYZ aus den Gl. (2) des vorigen Art. in die Gl. (b) des gegenwärtigen; so hat man:

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{R.A'}{P'}+\frac{S.A''}{P''}+\frac{T.A'''}{P'''}\right).x \\ +&\left(\frac{R.B'}{P'}+\frac{S.B''}{P''}+\frac{T.B'''}{P'''}\right).y \\ +&\left(\frac{R.C'}{P'}+\frac{S.C''}{P''}+\frac{T.C'''}{P'''}\right).z+Q \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (B)$$

Vergleicht man itzt die Gl. (A) mit (b); so hat man:

$$\left.\begin{aligned} R &= \left(\frac{AA'+BB'+CC'}{P'}\right) \\ S &= \left(\frac{AA''+BB''+CC''}{P''}\right) \\ T &= \left(\frac{AA'''+BB'''+CC'''}{P'''}\right) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Vergleicht man aber die Gl. (B) mit (a); dann ist:

$$\left.\begin{aligned} A &= \left(\frac{R.A'}{P'}+\frac{S.A''}{P''}+\frac{T.A'''}{P'''}\right) \\ B &= \left(\frac{R.B'}{P'}+\frac{S.B''}{P''}+\frac{T.B'''}{P'''}\right) \\ C &= \left(\frac{R.C'}{P'}+\frac{S.C''}{P''}+\frac{T.C'''}{P'''}\right) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Endlich ist $\qquad D = Q.$

Da der Abstand des Anfangspunktes der Coordinaten von der Ebene I ist:

$$\frac{-D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

oder

$$\frac{-Q}{\sqrt{R^2+S^2+T^2}};$$

so folgt, dass:

$$(A^2+B^2+C^2) = (R^2+S^2+T^2).$$

Mit Hilfe der Gl. (1) (2) ist man nun im Stande, die Winkel in einem Systeme, welche aus der Beziehung der Ebene gegen dasselbe entspringen, durch die Winkel im andern auszudrücken. So hat man z. B.:

$$\left.\begin{aligned}
\cos.(I.YZ) &= \frac{R}{\sqrt{R^2+S^2+T^2}} = \frac{AA'+BB'+CC'}{P'.\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\\
\cos.(I.XZ) &= \frac{S}{\sqrt{R^2+S^2+T^2}} = \frac{AA''+BB''+CC''}{P''.\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\\
\cos.(I.XY) &= \frac{T}{\sqrt{R^2+S^2+T^2}} = \frac{AA'''+BB'''+CC'''}{P'''.\sqrt{A^2+B^2+C^2}}
\end{aligned}\right\}$$

Und umgekehrt:

$$\cos.(I.yz) = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \left\{\frac{\frac{RA'}{P'}+\frac{SA''}{P''}+\frac{TA'''}{P'''}}{\sqrt{R^2+S^2+T^2}}\right\}$$

$$\cos.(I.xz) = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \left\{\frac{\frac{RB'}{P'}+\frac{SB''}{P''}+\frac{TB'''}{P'''}}{\sqrt{R^2+S^2+T^2}}\right\}$$

$$\cos.(I.xy) = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \left\{\frac{\frac{RC'}{P'}+\frac{SC''}{P''}+\frac{TC'''}{P'''}}{\sqrt{R^2+S^2+T^2}}\right\}$$

Aus diesen Gleichungen folgen nun unmittelbar nachstehende:

$$\cos.(I.YZ) =$$
$$\cos.(I.yz).\cos.(x.X)+\cos.(I.xz).\cos.(y.X)+\cos.(I.xy).\cos.(z.X);$$
$$\cos.(I.XZ) =$$
$$\cos.(I.xz).\cos.(x.Y)+\cos.(I.xz).\cos.(y.Y)+\cos.(I.xy).\cos.(z.Y);$$
$$\cos.(I.XY) =$$
$$\cos.(I.xy).\cos.(x.Z)+\cos.(I.xz).\cos.(y.Z)+\cos.(I.xy).\cos.(z.Z);$$

und umgekehrt:

$$\cos.(I.yz) =$$
$$\cos.(I.YZ)\cos.(x.X)+\cos.(I.XZ)\cos.(x.Y)+\cos.(I.XY)\cos.(x.Z)$$
$$\cos.(I.xz) =$$
$$\cos.(I.YZ)\cos.(y.X)+\cos.(I.XZ)\cos.(y.Y)+\cos.(I.XY)\cos.(y.Z)$$
$$\cos.(I.xy) =$$
$$\cos.(I.YZ)\cos.(z.X)+\cos.(I.XZ)\cos.(z.Y)+\cos.(I.XY)\cos.(z.Z).$$

Die Gleichungen der Knotenlinien $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ sind bekanntlich, und zwar die Gleichung

$$\left.\begin{array}{llll} \text{der Linie} & \bar{x} & \ldots & By+Cz+D=0 \\ \ldots\ldots & \bar{y} & \ldots & Ax+Cz+D=0 \\ \ldots\ldots & \bar{z} & \ldots & Ax+By+D=0 \end{array}\right\}$$

Wenn man nun die Gleichungen dieser Knotenlinien gegen das zweite Achsensystem haben will; so wird man nur für xyz die obigen Ausdrücke durch XYZ zu substituiren haben. Die Gleichungen dieser Knotenlinien werden also seyn, und zwar:

der Linie $\bar{x}$:

$$\begin{cases} \left(\frac{BB'+CC'}{P'}\right)X+\left(\frac{BB''+CC''}{P''}\right)Y+\left(\frac{BB'''+CC'''}{P'''}\right)Z+D=0 \\ \frac{A'}{P'}X+\frac{A''}{P''}.Y+\frac{A'''}{P'''}.Z=0; \end{cases}$$

der Linie $\bar{y}$:

$$\begin{cases} \left(\frac{AA'+CC'}{P'}\right)X+\left(\frac{AA''+CC''}{P''}\right)Y+\left(\frac{AA'''+CC'''}{P'''}\right)Z+D=0 \\ \frac{B'}{P'}.X+\frac{B''}{P''}.Y+\frac{B'''}{P'''}.Z=0; \end{cases}$$

der Linie $\bar{z}$:

$$\begin{cases} \left(\frac{AA'+BB'}{P'}\right)X+\left(\frac{AA''+BB''}{P''}\right)Y+\left(\frac{AA'''+BB'''}{P'''}\right)Z+D=0 \\ \frac{C'}{P'}.X+\frac{C''}{P''}.Y+\frac{C'''}{P'''}.Z=0; \end{cases}$$

Hieraus lassen sich die Gleichungen der Knotenlinien $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ leicht in der gebräuchlichen Form finden, wenn man zuerst Z, dann Y eliminirt. Auf diese Weise erhält man:

Gleichungen der Knotenlinie $\bar{x}$:

$$\left.\begin{aligned} Y &= \frac{P''}{P'}.\left(\frac{BC_{''}-CB_{''}}{BC_{'}-CB_{'}}\right).X+\left(\frac{A'''.P''.D}{BC_{'}-CB_{'}}\right) \\ Z &= \frac{P'''}{P'}.\left(\frac{BC_{'''}-CB_{'''}}{BC_{'}-CB_{'}}\right).X-\left(\frac{A''.P'''.D}{BC_{'}-CB_{'}}\right) \end{aligned}\right\}$$

Gleichungen der Knotenlinie $\bar{y}$:

$$\left.\begin{aligned} Y &= \frac{P''}{P'}.\left(\frac{AC_{''}-CA_{''}}{AC_{'}-CA_{'}}\right)X+\left(\frac{B'''.P''.D}{AC_{'}-CA_{'}}\right) \\ Z &= \frac{P'''}{P'}.\left(\frac{AC_{'''}-CA_{'''}}{AC_{'}-CA_{'}}\right)X-\left(\frac{B''.P'''.D}{AC_{'}-CA_{'}}\right) \end{aligned}\right\}$$

Gleichungen der Knotenlinie $\bar{z}$:

$$\left.\begin{aligned} Y &= \frac{P''}{P'}.\left(\frac{AB_{''}-BA_{''}}{AB_{'}-BA_{'}}\right)X+\left(\frac{C'''.P''.D}{AB_{'}-BA_{'}}\right) \\ Z &= \frac{P'''}{P'}.\left(\frac{AB_{'''}-BA_{'''}}{AB_{'}-BA_{'}}\right)X-\left(\frac{C''.P'''.D}{AB_{'}-BA_{'}}\right) \end{aligned}\right\}$$

Auf eben diese Art findet man die Gleichungen der Knotenlinien $\bar{X}\,\bar{Y}\,\bar{Z}$ gegen das System der rechtwinklichten coordinirten Achsen xyz. Es sind nemlich die Gleichungen:

der Linie $\bar{X}$. . $S.Y+T.Z+Q=0$; $X=0$;

. . . . $\bar{Y}$. . $R.X+T.Z+Q=0$; $Y=0$;

. . . . $\bar{Z}$. . $R.X+S.Y+Q=0$; $Z=0$;

Setzt man in diesen Gleichungen für XYZ die obigen Ausdrücke durch xyz; so findet man, dass die Gleichungen dieser Knotenlinien werden, und zwar:

Gleichungen der Linie $\bar{X}$:

$$\left\{\begin{aligned} &\left(\frac{A''S}{P''}+\frac{A'''T}{P'''}\right).x+\left(\frac{B''S}{P''}+\frac{B'''T}{P'''}\right).y+\left(\frac{C''S}{P''}+\frac{C'''T}{P'''}\right)z+Q=0 \\ &A'x+B'y+C'z=0 \end{aligned}\right.$$

Gleichungen der Linie $\bar{Y}$:

$$\left\{\begin{aligned} &\left(\frac{A'R}{P'}+\frac{A'''T}{P'''}\right)x+\left(\frac{B'R}{P'}+\frac{B'''T}{P'''}\right)y+\left(\frac{C'R}{P'}+\frac{C'''T}{P'''}\right)z+Q=0 \\ &A''x+B''y+C''z=0 \end{aligned}\right.$$

Gleichungen der Linie $\bar{Z}$:

$$\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{A'R}{P'}+\frac{A''S}{P''}\right)x+\left(\frac{B'R}{P'}+\frac{B''S}{P''}\right)y+\left(\frac{C'R}{P'}+\frac{C''S}{P''}\right)z+Q=0\\ A'''x+B'''y+C'''z=0\,.\end{array}\right.$$

Hieraus findet man die Gleichungen der Knotenlinien $\bar{X}\ \bar{Y}\ \bar{Z}$ wieder in den gebräuchlichen Formen. Die Rechnung giebt folgende Resultate:

Gleichungen der Knotenlinie $\bar{X}$:

$$\left.\begin{array}{l}y=\left(\frac{B_{\prime\prime\prime}P'''S-B_{\prime\prime}P''T}{A_{\prime\prime\prime}P'''S-A_{\prime\prime}P''T}\right)x+\left(\frac{C'P''P'''Q}{A_{\prime\prime\prime}P'''S-A_{\prime\prime}P''T}\right)\\ z=\left(\frac{C_{\prime\prime\prime}P'''S-C_{\prime\prime}P''T}{A_{\prime\prime\prime}P'''S-A_{\prime\prime}P''T}\right)x-\left(\frac{B'P''P'''Q}{A_{\prime\prime\prime}P'''S-A_{\prime\prime}P''T}\right)\end{array}\right\}$$

Gleichungen der Knotenlinie $\bar{Y}$:

$$\left.\begin{array}{l}y=\left(\frac{B_{\prime\prime\prime}P'''R-B_{\prime}P'T}{A_{\prime\prime\prime}P'''R-A_{\prime}P'T}\right)x-\left(\frac{C''P'P'''Q}{A_{\prime\prime\prime}P'''R-A_{\prime}P'T}\right)\\ z=\left(\frac{C_{\prime\prime\prime}P'''R-C_{\prime}P'T}{A_{\prime\prime\prime}P'''R-A_{\prime}P'T}\right)x+\left(\frac{B''P'P'''Q}{A_{\prime\prime\prime}P'''R-A_{\prime}P'T}\right)\end{array}\right\}$$

Gleichungen der Knotenlinie $\bar{Z}$:

$$\left.\begin{array}{l}y=\left(\frac{B_{\prime\prime}P''R-B_{\prime}P'S}{A_{\prime\prime}P''R-A_{\prime}P'S}\right)x+\left(\frac{C'''P'P''Q}{A_{\prime\prime}P''R-A_{\prime}P'S}\right)\\ z=\left(\frac{C_{\prime\prime}P''R-C_{\prime}P'S}{A_{\prime\prime}P''R-A_{\prime}P'S}\right)x-\left(\frac{B'''P'P''Q}{A_{\prime\prime}P''R-A_{\prime}P'S}\right)\end{array}\right\}$$

Man kann itzt leicht die Winkel finden, welche sowohl die Knotenlinien $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ unter einander, als auch die Knotenlinien $\bar{X}\ \bar{Y}\ \bar{Z}$ unter einander und mit $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ machen; so z. B. ist:

$$\cos.(\bar{z}.\bar{Z})=$$

$$\left\{\frac{P'.S.(AB_{\prime}-BA_{\prime})-P''.R.(AB_{\prime\prime}-BA_{\prime\prime})}{\sqrt{R^2+S^2}.\sqrt{(AB_{\prime}-A_{\prime}B)^2+(AB_{\prime\prime}-A_{\prime\prime}B)^2+(AB_{\prime\prime\prime}-A_{\prime\prime\prime}B)^2}}\right\}$$

Weil im gegenwärttgen Falle:

$$A_{\prime}B_{\prime}+A_{\prime\prime}B_{\prime\prime}+A_{\prime\prime\prime}B_{\prime\prime\prime}=0\,,$$

so hat man, wenn man setzt:

$$A_{\prime}^2+A^2_{\prime\prime}+A^2_{\prime\prime\prime}=[A]^2$$

$$B_{\prime}^2+B^2_{\prime\prime}+B^2_{\prime\prime\prime}=[B]^2\,,$$

$$\cos.(\bar{z}.\bar{Z})=\frac{P'.S.(AB_{,}-A_{,}B)-P''.R.(AB_{,,}-BA_{,,})}{\sqrt{R^2+S^2}.\sqrt{A^2[B]^2+B^2[A]^2}}.$$

Man wird itzt ohne Schwierigkeit die Sinuse, Cosinuse und Tangenten aller Winkel in dem einen Achsensysteme durch die Sinuse, Cosinuse, Tangenten der Winkel, welche sich auf das andere Achsensystem beziehen, auszudrücken im Stande seyn, wenn man die Prinzipien der analytischen Geometrie gehörig anwendet, mit den durch dieselben erhaltenen Ausdrücken die gehörigen Reduktionen vornimmt, und endlich ihre Bedeutung herstellet.

Inhalts-Anzeige

des ersten Bandes.

I. Capitel.

Analytische Bestimmungsarten der Lage eines Punktes.

Art.		Seite
1	Bestimmung der Lage eines Punktes in einer geraden Linie, in einer Ebene und im Raume. Von den Projektionen eines Punktes	1
12	Abstände eines durch drei rechtwinklichte Coordinaten bestimmten Punktes im Raume von den drei coordinirten Achsen und vom Anfangspunkte der Coordinaten. Analytische Ausdrücke für die in diesen Constructionen vorkommende Winkel. Ableitung der sphärisch-trigonometrischen Formeln für rechtwinklichte sphärische Dreiecke	19
20	Bestimmung der Lage eines Punktes in einer Ebene und im Raume mittelst der schiefwinklichten Coordinaten. Ausdruck der Entfernung eines Punktes vom Anfangspunkte durch schiefwinklichte Coordinaten. Winkel welche hier entspringen	31
28	Ausdrücke für die Abstände eines Punktes von den coordinirten Achsen und Ebenen durch seine schiefwinklichten Coordinaten. Die sphärische Trigonometrie .	40

Art.		Seite
38	Bestimmung des Ortes eines Punktes in einer Ebene und im Raume durch Polar-Coordinaten	52
42	Ausdruck des Abstandes zweier Punkte von einander in einer Ebene und im Raume durch rechtwinklichte, schiefwinklichte und Polar-Coordinaten. Winkel dieser Linien mit den coordinirten Achsen, und Winkel der Fläche des entstehenden Dreieckes mit den coordinirten Ebenen. Inhalt des schiefen Parallelepipedes. Projektionen der Polygone auf einer geraden Linie. Auflösung einer Aufgabe	57
58	Von der Transformation der rechtwinklichten, schiefwinklichten und Polar-Coordinaten sowohl in einer Ebene als im Raume	94
69	Auflösungen einiger Aufgaben über die Bestimmung der Punkte in einer Ebene oder im Raume aus gegebenen Eigenschaften	122

II. Capitel.

Analytische Bestimmungsarten der Lagen einer geraden Linie.

I. *Gerade Linien in den coordinirten Ebenen.*

Art.		Seite
72	Methode, die Lage einer Geraden in einer Ebene analytisch zu bestimmen. Ausdrücke für die Coordinaten der Durchschnittspunkte dieser Geraden mit den Achsen. Winkel der Geraden mit den coordinirten Achsen. Abstand des Anfangspunktes oder irgend eines andern gegebenen Punktes in dieser Ebene von der Geraden	134
82	Gerade Linie, welche durch zwei gegebene Punkte geht. Bedeutung ihrer Gleichung. Auflösung einiger Aufga-	

Art.		Seite
	ben, welche die Bestimmung einer Geraden in einer Ebene betreffen	149

II. *Gerade Linien im Raume.*

87	Gleichungen der in den coordinirten Ebenen projizirten Geraden. Zwei derselben bestimmen die Lage der Geraden im Raume	158
89	Analytische Ausdrücke zur Bestimmung der Winkel, welche die gerade Linie im Raume und ihre Projektionen in den coordinirten Ebenen mit den coordinirten Achsen und Ebenen machen. Coordinaten des Durchschnittspunktes der Geraden im Raume mit den coordinirten Ebenen, und der Projektionen dieser Geraden mit den Achsen	164
92	Abstände des Anfangspunktes der Coordinaten von den Projektionen der Geraden des Raumes in den coordinirten Ebenen. Abstand des Anfangspunktes von einer Geraden im Raume, und Coordinaten des Punktes, in welchem dieses Perpendikel die Gerade trifft. Projektionen dieses Abstandes in den coordinirten Ebenen. Abstand eines Punktes im Raume von einer Geraden .	169
97	Bestimmungen der Lagen der Geraden im Raume aus gegebenen Bedingungen. Gerade Linie, welche durch zwei gegebene Punkte des Raumes geht. Bedeutung ihrer Gleichungen. Winkel, welche sie mit den coordinirten Achsen und Ebenen macht. Coordinaten ihrer Durchschnittspunkte mit den coordinirten Ebenen. Allgemeine Ausdrücke für die Cosinusse der Neigungswinkel, welche die Ebene, so durch den Anfangspunkt und eine gegebene Gerade im Raume gelegt wird mit den coordinirten Ebenen macht . . .	181

III. Capitel.

Analytische Bestimmungsarten der Lagen einer Ebene.

Art.		Seite
103	Methoden, die Gleichung einer Ebene zu finden, deren Lage gegen ein System rechtwinklichter coordinirter Achsen bestimmt wird	192
107	Von den Knotenlinien einer Ebene in den coordinirten Ebenen. Winkel, welche sie mit den coordinirten Achsen und unter einander machen. Entfernungen der Punkte, in welchen die Achsen von der Ebene geschnitten werden, vom Anfangspunkte der Coordinaten. Abstände des Anfangspunktes von den drei Knotenlinien .	200
114	Gleichung einer Ebene, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten und durch eine gegebene Gerade im Raume gelegt wird. Neigung einer Ebene gegen die coordinirten Ebenen und Achsen. Ebene, welche durch zwei Punkte im Raume und den Anfangspunkt gelegt wird	215
119	Relationen zwischen den Sinussen, Cosinussen und Tangenten der Winkel, welche eine Ebene und ihre Knotenlinien mit den coordinirten Achsen und Ebenen sowohl, als die Knotenlinien unter einander machen . .	227
120	Noch einige Bestimmungsarten der Lage einer Ebene. Gleichung der Ebene, welche durch eine gegebene Gerade und durch einen gegebenen Punkt geht. Ebene, welche durch drei gegebene Punkte geht. Bedeutung ihrer Gleichung	230
125	Methoden, die Coordinaten des Punktes zu finden, in welchem das Loth, das man vom Anfangspunkte der Coordinaten auf eine Ebene herablässt, dieselbe trifft. Länge dieses Lothes und seiner Projektionen in den coordinirten Ebenen. Abstand eines Punktes im Raume von einer gegebenen Ebene. Entwicklung noch einiger Sätze aus der Gleichung einer Ebene, welche durch drei gegebene Punkte geht	243

Art.		Seite
129	Von den Projektionen der coordinirten Achsen in einer Ebene	258
132	Bestimmung der Lage der Ebenen aus gegebenen Eigenschaften. Die Haupt-Eigenschaften des Schwerpunktes werden hier ohne Beihülfe statischer Prinzipien erwiesen	269
136	Allgemeine Lehrsätze über die Projektionen der Flächen	277

IV. Capitel.

Relationen zweier Geraden gegen einander.

Art.		Seite
143	Bestimmung des Durchschnittspunktes zweier Geraden in einer Ebene. Seine Entfernung vom Anfangspunkte und von einigen andern Punkten. Winkel, den diese zwei Geraden mit einander machen. Bedingungsgleichungen des Parallellismus und der Perpendikularität zweier geraden Linien in einer Ebene	285
147	Gerade Linie, welche durch einen gegebenen Punkt geht, und zu einer gegebenen Geraden entweder parallel ist, oder auf sie senkrecht steht, oder mit ihr einen gegebenen Winkel macht	294
151	Gleichungen der Seiten eines ebenen Dreieckes. Coordinaten der Eckpunkte. Gleichungen der Perpendikel im Dreiecke. Gleichungen der die Seiten halbirenden Geraden .	303
155	Beziehungen zweier Geraden im Raume gegen einander. Bedingungen ihres Durchschneidens, und Coordinaten ihres Durchschnittspunktes. Seine Entfernung vom Anfangspunkte. Durchschnittspunkte der zwei Geraden in den coordinirten Ebenen, und ihre Relationen .	308
157	Ausdruck für den Sinus, Cosinus und für die Tangente des Winkels, welchen zwei gerade Linien im Raume mit einander machen. Bedingungsgleichung des Parallellismus und der Perpendikularität zweier Geraden im Raume	312

Art. Seite

160 Gleichungen einer Geraden, welche durch einen gegebenen Punkt geht, und zu einer gegebenen Geraden parallel ist, oder auf ihr senkrecht steht. Gleichungen einer Geraden, welche auf zwei gegebenen Geraden zugleich senkrecht steht 315

167 Anwendungen der in diesem Capitel entwickelten Prinzipien zur Auflösung einiger Aufgaben . . . 327

V. Capitel.

Relationen zwischen einer Geraden und einer Ebene.

Art. Seite

171 Bestimmung der Coordinaten der Durchschnittspunkte einer Geraden im Raume mit einer Ebene und der Projektionen jener Geraden in den coordinirten Ebenen mit den Knotenlinien der gegebenen Ebene. Besondere Betrachtung des Falles, da die Ebene durch einen gegebenen Punkt geht 335

174 Ausdrücke für den Sinus, Cosinus und die Tangente des Neigungswinkels der gegebenen Geraden im Raume gegen die gegebene Ebene. Bedingungen für den Parallelismus einer Geraden und einer Ebene. Bestimmungen der Winkel der Geraden mit den Knotenlinien der Ebene, und der Projektionen dieser Geraden mit den Knotenlinien. Allgemeine Relationen zwischen diesen Winkeln. Betrachtung des besonderen Falles, da die Gerade in der Ebene liegt 339

193 Gleichung einer Geraden, welche durch einen gegebenen Punkt geht, und auf einer gegebenen Ebene senkrecht steht. Abstand eines Punktes von der Ebene. Ebene, welche durch den Anfangspunkt und durch eine gegebene Gerade gelegt wird, und Gerade, welche durch den Anfangspunkt und durch den gegebenen im Raume

Art. Seite

geht. Hieraus entspringende Winkel und Relationen zwischen ihnen 372

198 Gleichungen einer Ebene, welche durch einen gegebenen Punkt geht, und zwei gegebenen Geraden parallel ist. Knotenlinien dieser Ebene. Winkel, welche sie mit den Achsen machen. Gleichungen einer Geraden, welche auf zwei gegebenen zugleich senkrecht steht. Gleichung einer Ebene, welche durch einen gegebenen Punkt geht, und senkrecht auf einer gegebenen Geraden steht. Ebene, welche durch zwei sich schneidende Linien gelegt wird. Lage eines rechtwinklichten Achsensystems gegen das andere. Allgemeine Auflösung der Probleme der Transformation der rechtwinklichten Coordinaten 380

210 Gleichungen für die Projektion einer gegebenen Geraden im Raume auf einer der Lage nach bekannten Ebene. Analytische Ausdrücke für die Winkel, welche hierbei entspringen 413

VI. Capitel,

Relationen zwischen zwei Ebenen.


Art. Seite

215 Gleichung der Durchschnittslinie zweier Ebenen. Durchschnittspunkte dieser Geraden mit den coordinirten Ebenen. Abstände des Anfangspunktes von ihren Projektionen in den coordinirten Ebenen, und Abstand des Anfangspunktes von dieser Geraden selbst . . 423


217 Winkel der Durchschnittslinie und ihrer Projektionen mit den coordinirten Achsen. Ausdrücke für den Sinus, Cosinus und die Tangente des Neigungswinkels der beiden Ebenen. Bedingungsgleichung des Parallellismus und der Perpendikularität zweier Ebenen. Gleichung einer Ebene, welche durch einen gegebenen Punkt geht, und zu einer gegebenen Ebene parallel ist; oder welche

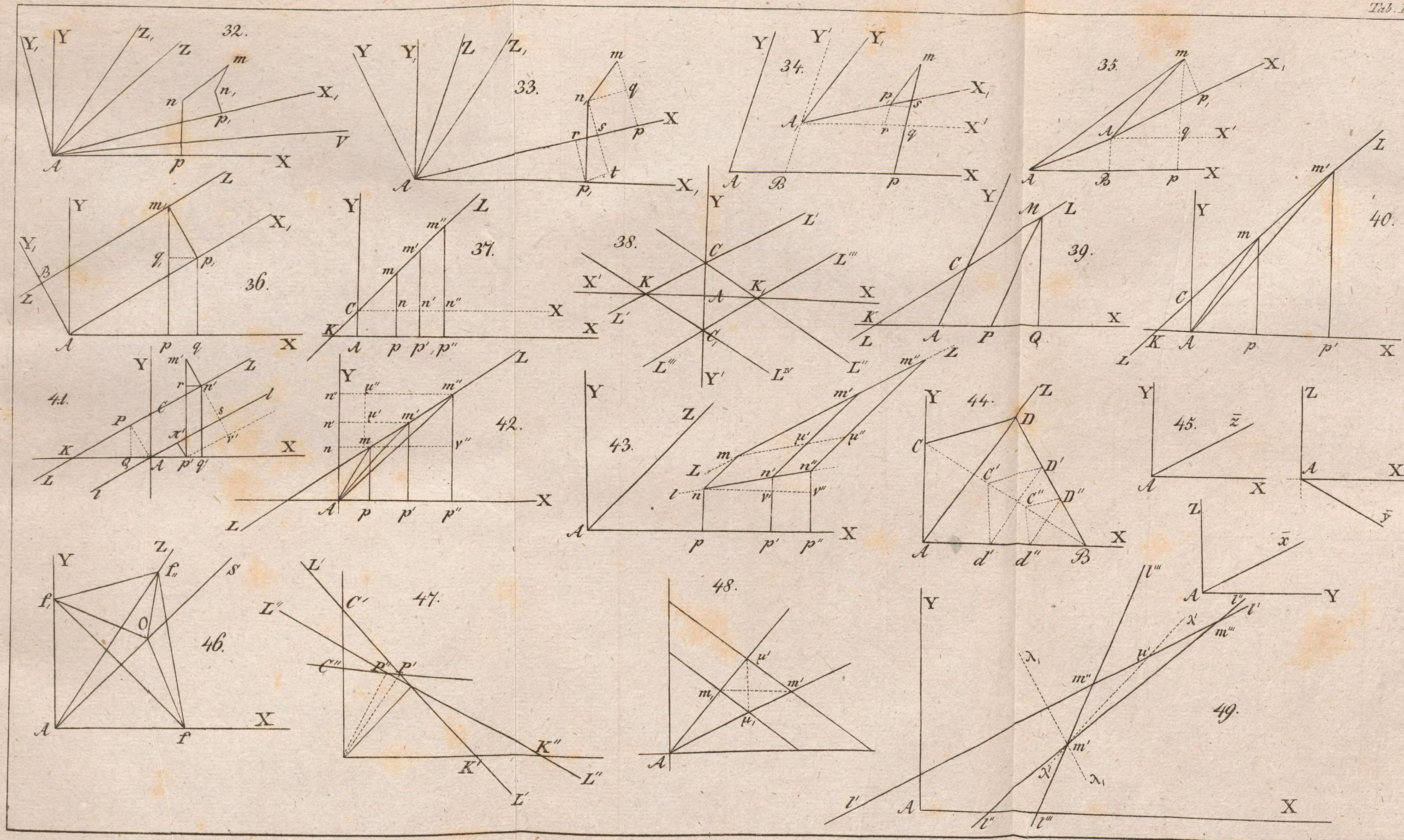
Art.		Seite
	durch einen gegebenen Punkt geht, und auf zwei Ebenen zugleich senkrecht steht	428
223	Ausdrücke der Sinusse, Cosinusse und Tangenten der Winkel, welche die Durchschnittslinie zweier Ebenen und ihre Projektionen in den coordinirten Ebenen mit den Knotenlinien jener Ebenen bilden, und welche diese Knotenlinien unter einander machen. Relationen unter diesen Winkeln. Nähere Betrachtung des besonderen Falles, da beide Ebenen auf einander senkrecht stehen. Das Problem von der Transformation der Coordinaten	437
227	Bestimmung der Lage einer Ebene gegen eine andere, wenn die Lagen dieser beiden Ebenen gegen ein rechtwinklichtes Coordinaten - System bestimmt sind . .	453
229	Transformation der Gleichungen einer geraden Linie oder einer Ebene, wenn sie gegen ein zweites, der Lage nach bestimmtes Achsen - System bezogen werden . .	460

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.



Zeliske gest.


17.
18.
19.
20.
21.
22.
23.
24.
25.
26.
27.
28.
29
(xy)
(xz)
(xz)
30.
31.
Y
X
Z
A
m'
m''
q
r
p'
p''



Zeliske gestochen.

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Moth, Franz, 1802-1879

System der analytischen Geometrie hrsg. von Franz Xav. Moth

Bd.: 1

Prag (1828)

Math.p. 363 m-1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10137686-8